

Hopf 方程式の相互作用表示

東大 工 物工 桑原真二

§ 1. まえがき

古典統計力学の方法を無限連続次元の力学系 Navier-Stokes の方程式に適用したのが, Hopf の統計流体力学である。

この論文では, N.-S. 方程式の代りに, その一次元単純化の Burgers モデルの波数空間における方程式

$$\frac{\partial v(k, t)}{\partial t} + i \int k' v(k-k') v(k') dk' + \bar{\nu} k^2 v(k) = 0 \quad (1.1)$$

にもとづいて議論する。

乱流状態は $v(k)$ - 空間の 1 点で表わされ, 位相空間 (関数空間) $v(k)$ に確率密度汎関数 $P[v(k)]$ を導入することによって統計的あつかいができる。 P の Fourier 変換 $\Phi[z(k)] = \int e^{i(z, v)} P[v(k)] \delta v$ すなわち特性汎関数に対して, いわゆる Hopf の方程式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \iint k z(k+k') \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial k \partial z' \partial k'} dk dk' = 0$$

$$+ \bar{v} \int k^2 z \frac{\partial \Phi}{\partial z dk} dk = 0 \quad (1.2)$$

が成立する。 $z(k)$ については

$$|k| \rightarrow \infty \text{ のとき, } |z(k)| \rightarrow 0 \quad (1.3)$$

の条件が課せられる。

エネルギー・スペクトルは

$$E(k, t) \delta(k+k') = i^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z dk \partial z' dk'} \right)_{z=0} \quad (1.4)$$

によってもとめられる。

§ 2. 初期値問題としての定式化

Hopf 方程式 (1.2) を満足する $\Phi[z(k)]$ は次のような

副条件を満たさなければならない：

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \Phi[0] = 1 \quad \quad \quad 2) \quad |\Phi[z]| \leq 1 \\ 3) \quad \Phi[-z] = \Phi[z]^* \\ 4) \quad \Phi[e^{ika} z] = \Phi[z] \quad a: \text{任意 (一様性)} \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

初期値問題を考える場合には Φ の初期値として

$$\Phi[z, 0] \equiv \hat{\Phi}[z] = e^{-\frac{1}{2} \int \hat{E}(k) z z^* dk} \quad (2.2)$$

とおく。 $\hat{E}(k) = E(k, 0)$ は初期のエネルギー・スペクトルである。初期値として (2.2) をとる必然性はないが、(2.1)

を満足する最も簡単な汎関数であり、更に (1.4) すなわち、

$$\hat{E}(k)\delta(k+k') = i^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial z dk \partial z' dk'} \right)_{z=0} \quad (2.3)$$

を満足していることがわかる。微分してわかるように、

(2.2) の偶数次のエネルギー・伝達関数は一般に 0 とならない。

§ 3. 相互作用表示

相互作用表示では、独立変数 $(z(k), t)$ を新しい独立変数 $(\zeta(k), s)$ に変換する：

$$\zeta(k) = z(k) e^{-i\nu k^2 t}, \quad s = t \quad (3.1)$$

(1.2) はこの新変数によって

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + A[\zeta(k), t] \Phi &= 0 \\ A[\zeta, t] &= - \iint dk dk' k \zeta(k+k') e^{2i\nu k k' t} \frac{\partial^2}{\partial \zeta dk \partial \zeta' dk'} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

とかきあらためられる。ここで s は t とかきなおしてある。

エネルギー・スペクトルは (1.4) を変形して

$$E(k, t) \delta(k+k') = i^2 e^{-i\nu(k^2+k'^2)t} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta dk \partial \zeta' dk'} \right)_{\zeta=0} \quad (3.3)$$

によってもとまる。

§4. 時間による展開

Φ が時間について解析的であると仮定し、 t の中で展開する。

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} t^l \Phi_l \quad (4.1)$$

(4.1) を (3.2) に代入して Φ_l の漸化式

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{m+1}[\zeta] &= \sum_{l=0}^m \frac{m!}{l!(m-l)!} (2\bar{D})^{m-l} \iint k_2^{m-l} k_1^{m-l+1} \\ &\quad \partial_{\zeta_1} \Phi_m dk_2 dk_1, \\ \partial_{\zeta_1} &= \zeta_2(k_2 + k_1) D_2 D_1, \quad D_1 = \frac{\partial}{\partial \zeta_1 dk_2} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

をうる。

汎関数微分 (Volterra's derivative) は $F = F[z(k)]$

ならば、 z の増分 $\delta z(k)$ に対して F の増分 δF が

$$\delta F = \int A(k) \delta z(k) dk + O(\delta z^2) \quad \delta z: \text{任意} \quad (4.3)$$

で表わされるとき

$$A(k) \equiv \frac{\partial F}{\partial z(k) dk} \quad (4.4)$$

によって定義される。

今 $F = z(k)$ となれば

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} z(k') \delta(k - k') dk' \quad (4.5)$$

と考えると

$$\delta F = \int_{-\infty}^{\infty} \delta z(k') \delta(k-k') dk' + O(\delta z^2) \quad (4.6)$$

であるから (4.3), (4.4) より

$$\frac{\partial z(k)}{\partial z(k') dk'} = \delta(k-k') \quad (4.7)$$

がえられる。それ故、多項式汎関数

$$F[z] = \int K(k_1, \dots, k_\ell) z(k_1) \cdots z(k_\ell) dk_1 \cdots dk_\ell \quad (4.8)$$

の汎関数微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z dk} &= \int \{ K(k, k_1, \dots, k_{\ell-1}) + K(k_1, k, k_2, \dots, k_\ell) + \cdots \\ &\quad \cdots + K(k_1, \dots, k_{\ell-1}, k) \} z(k_1) \cdots z(k_{\ell-1}) dk_1 \cdots dk_{\ell-1} \end{aligned} \quad (4.9)$$

となる。

(4.2) によつて Φ_ℓ を逐次に計算するためには、(4.9) の形の微分演算にけが現われる。(2.2) の Φ の初期値に対して、

$$\begin{aligned} E(k, t) &= e^{-2\bar{\nu} k^2 t} \left[\hat{E} - \frac{1}{2} k^2 t^2 (2\hat{E} - \hat{E} * \hat{E}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (2\bar{\nu}) k^2 t^3 \{ 4C, \hat{E} + k^2 (\hat{E} * \hat{E}) - 2(k^2 \hat{E}) * \hat{E} \} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4!} t^4 \{ 2(6(2\bar{\nu})^2 C_2 - 8C_0 C, + ((2\bar{\nu})^2 C, \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -6C_1^2)k^2)k^2\hat{E} - (\frac{7}{2}(2\bar{\nu})^2k^2 - 4C_1 - 14C_0k^2)k^2 \\
& \hat{E} * \hat{E} + 2(7(2\bar{\nu})^2 - 2C_0)k^2(k^2\hat{E}) * \hat{E} \\
& - 7(2\bar{\nu})^2(k^4\hat{E}) * \hat{E} - 4k^4(\hat{E} * \hat{E}) * \hat{E} \}] \quad (4.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \hat{E} - 2\bar{\nu}k^2t\hat{E} + \frac{1}{2}k^2t^2 \{ (2\bar{\nu})^2k^2\hat{E} - 2\hat{E} + \hat{E} * \hat{E} \} \\
& - \frac{1}{3!}(2\bar{\nu})k^2t^3 \{ (2\bar{\nu})^2k^4\hat{E} - 6(C_1 + k^2)\hat{E} \\
& + \frac{3}{2}k^2\hat{E} * \hat{E} + 3(k^2\hat{E}) * \hat{E} \} \\
& + \frac{1}{4!}t^4 [\{ (2\bar{\nu})^4k^6 - (2\bar{\nu})^2(12C_2 + 26C_1k^2 \\
& + 12k^4) + 4C_0(4C_1 + 3C_0k^2)k^2 \} k^2\hat{E} \\
& + \{ \frac{7}{2}(2\bar{\nu})^2k^2 - 4C_1 - 14C_0k^2 \} k^2\hat{E} * \hat{E} \\
& - 2 \{ (2\bar{\nu})^2(7 - 6k^2) - 2C_0 \} k^2(k^2\hat{E}) * \hat{E} \\
& + 7(2\bar{\nu})^2(k^4\hat{E}) * \hat{E} + 4k^4(\hat{E} * \hat{E}) * \hat{E} \} \quad (4.11)
\end{aligned}$$

がえられる。(4.11)は(4.10)の $e^{-2\bar{\nu}k^2t}$ を展開したものであり、他の方法でや、たものと一致する。ここで $*$ は合成積(convolution)をあらわし、又

$$C_l = \int_{-\infty}^{\infty} k^{2l} \hat{E}(k) dk \quad (4.12)$$

である。

特に二重 δ 関数形初期エネルギー・スペクトル

$$\hat{E}(k) = \frac{1}{2} \{ \delta(k+1) + \delta(k-1) \} \quad (4.13)$$

に対しては.

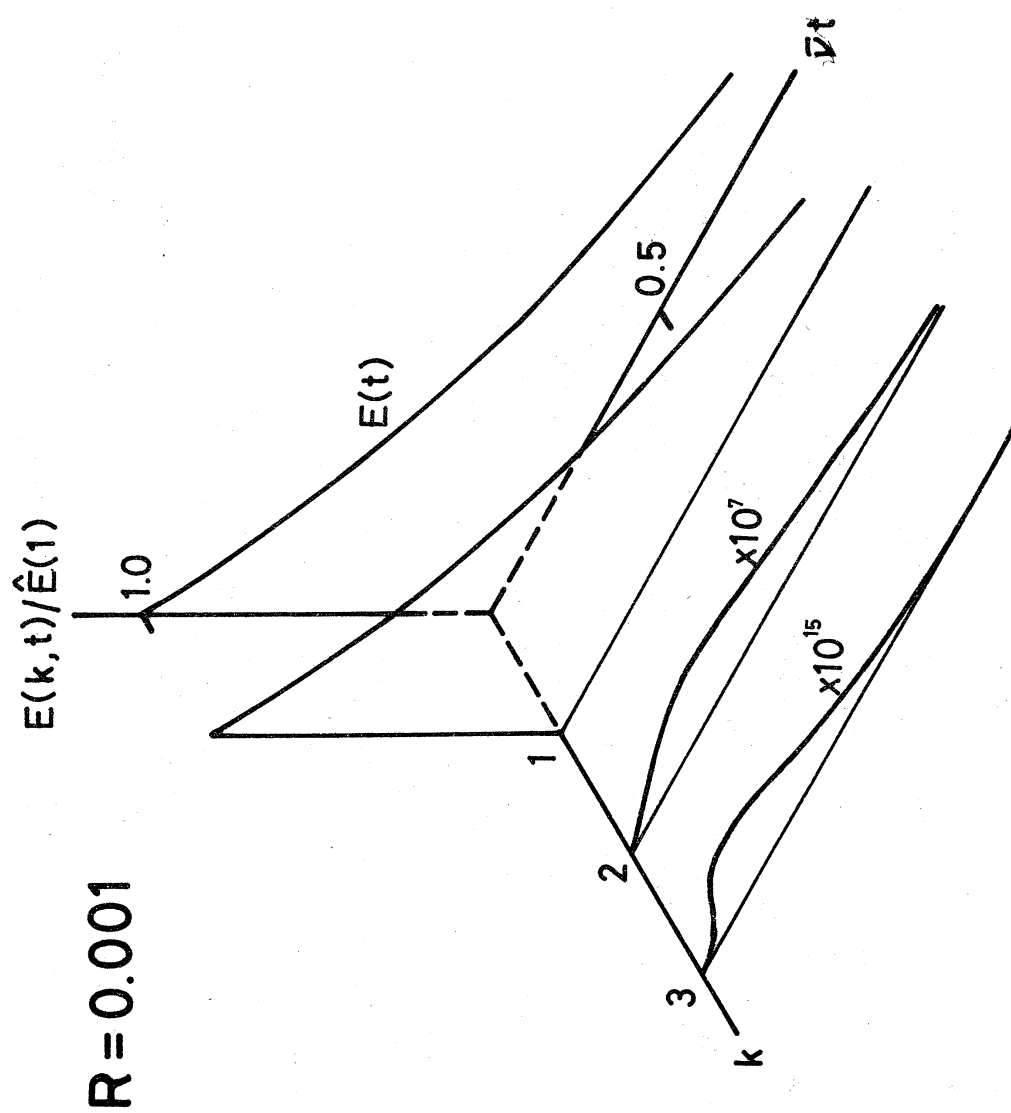
$$\begin{aligned}
 E(k, t) = & \hat{E}(1) e^{-2\bar{\nu}t} - t^2 (\hat{E}(1) e^{-2\bar{\nu}t} + \hat{E}(2) e^{-8\bar{\nu}t}) \\
 & + 2\bar{\nu} t^3 (\hat{E}(1) e^{-2\bar{\nu}t} + \hat{E}(2) e^{-8\bar{\nu}t}) \\
 & - \frac{1}{4!} t^4 \{ (14(2\bar{\nu})^2 - 31) \hat{E}(1) e^{-2\bar{\nu}t} \\
 & - \frac{7}{2} ((2\bar{\nu})^2 - 32) \hat{E}(2) e^{-8\bar{\nu}t} - 81 \hat{E}(3) e^{-18\bar{\nu}t} \} \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

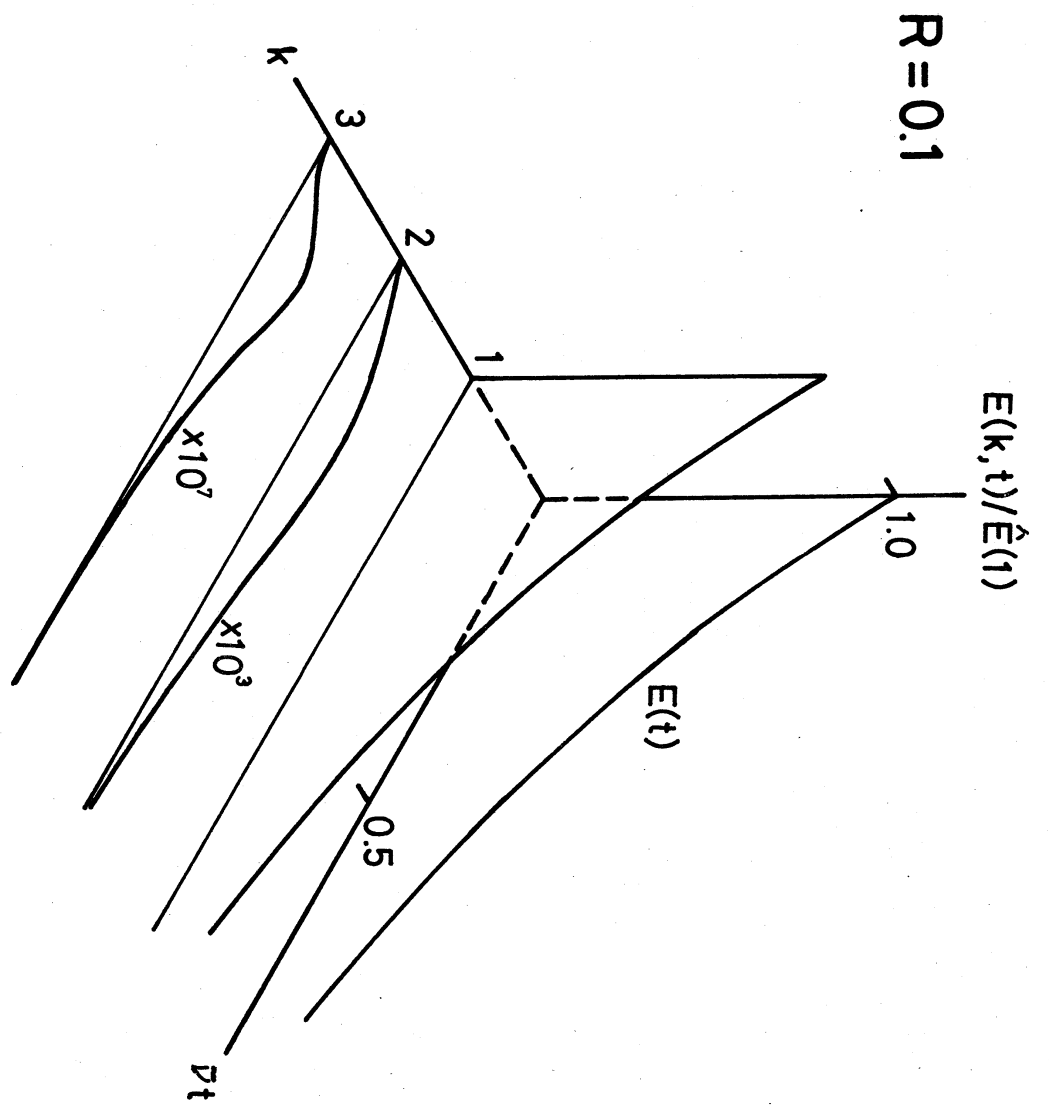
$$\begin{aligned}
 = & \hat{E}(1) - 2\bar{\nu} t \hat{E}(1) + \frac{1}{2!} t^2 \{ (2\bar{\nu})^2 \hat{E}(1) - 2\hat{E}(2) \\
 & + 2\hat{E}(2) \} - \frac{1}{3!} (2\bar{\nu}) t^3 \{ (2\bar{\nu})^2 \hat{E}(1) - 12\hat{E}(1) \\
 & + 18\hat{E}(2) \} + \frac{1}{4!} t^4 [\{ (2\bar{\nu})^4 - 50(2\bar{\nu})^2 + 31 \} \hat{E}(1) \\
 & + \frac{1}{2} \{ 391(2\bar{\nu})^2 - 224 \} \hat{E}(2) + 81\hat{E}(3)] \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

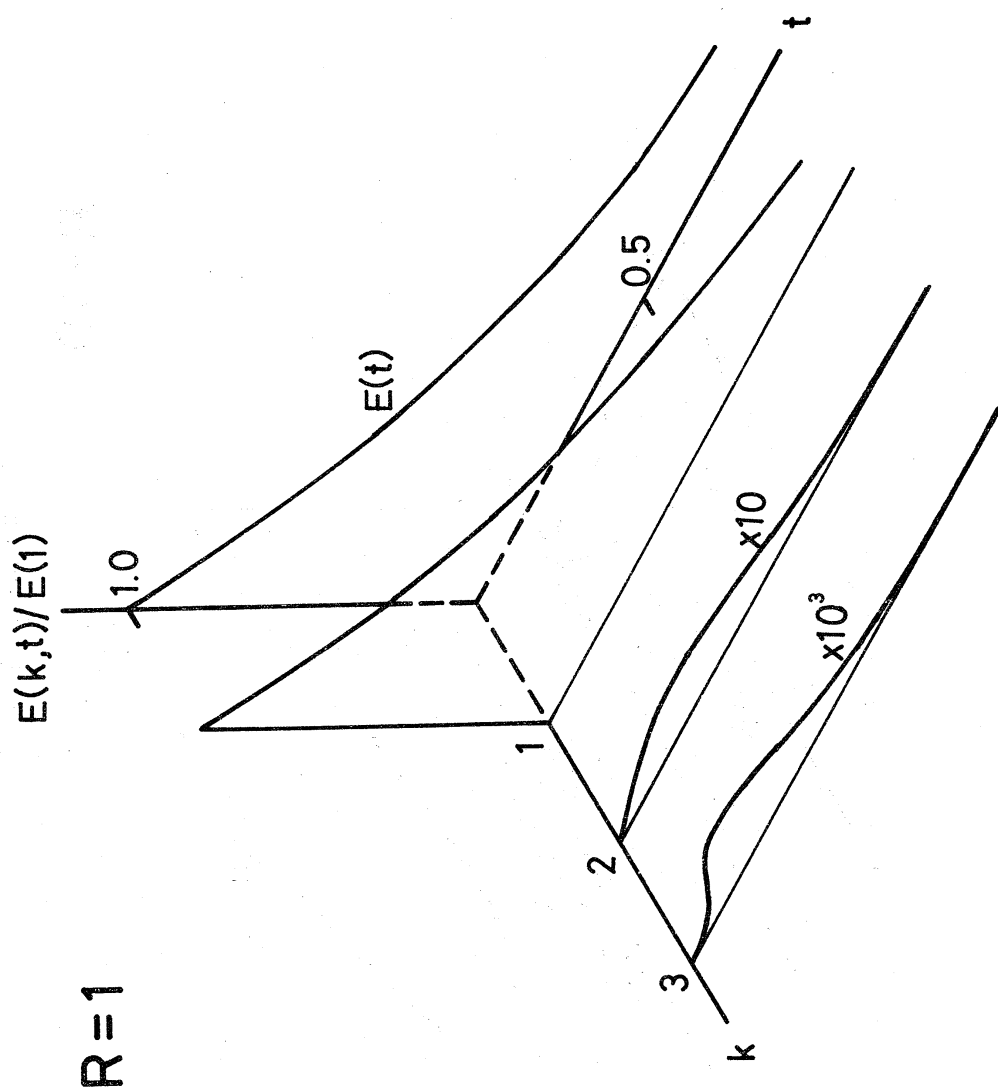
がえられる。ここで

$$\hat{E}(l) = \frac{1}{2} \{ \delta(k+l) + \delta(k-l) \} \quad (4.16)$$

である。(4.14)によって計算された結果がいろいろの
 $R = \bar{\nu}^{-1}$ について図に示されている。図中の $E(t)$ は全エ
 ネルギーである。







$R=10$

