

賭の問題の数値計算

電研 戸田 英雄

1. まえおき

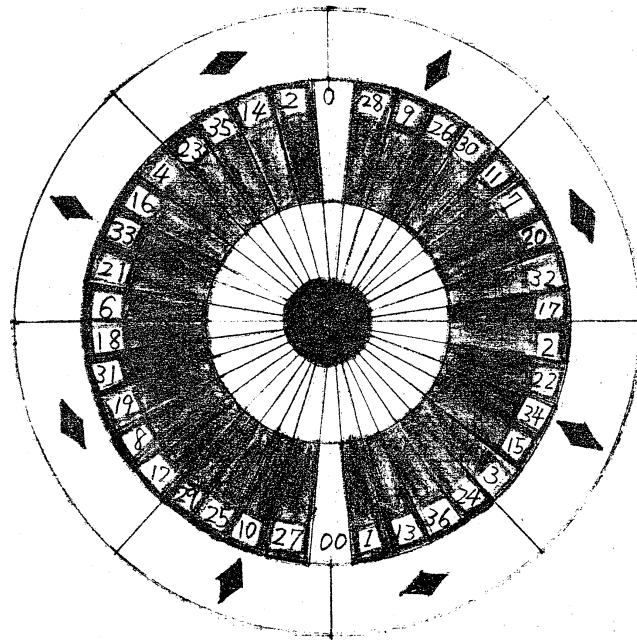
森口繁一(1963)氏のトバクの数理[1]の中の古典的な破産の問題について、数値実験と数値計算の結果を報告する。この種の問題は、線形の差分方程式を適当な境界条件で解くため、特性方程式(2次以上の高次方程式)の根を求めるのが一つの手法であるが、パラメータを数値で与えてしまえば、連立方程式の形にして数値計算で答を求めるのは簡単である。また、このような確率の問題は、モンテカルロ法でもかなり性質がつかめるようだ。

2. 賭の問題の数値実験

ルーレットを用いる賭は、トバクの本命(?)で、オ1圓のような円周を38等分し、1から36までの番号とその他に0と00があるものを用いる。0と00は緑色で1から36までの数は

、交互に赤と黒になつてゐる。この車をまわすのと反対の方向に小さい白球をまわすと、この玉は最後には38区かくのどちか一つに入つてしまう。その番号と色を読み上げ勝負するわけである。

図一 ルーレット



ルーレットを用いた賭で次のものを試みた。

(A) 1:1 の賭

これには次の6種類がある： (1) 黒色 (2) 赤色 (3) 偶数 (4) 奇数 (5) 1 から 18 までの数 (6) 19 から 36 までの数。

たとえば、1 串を黒色にかけると、もし黒が出ればアタリで 1 串貰える。もし赤か緑が出ればハズレで賭金の 1 串は取られてしまう。1 回の試みで、アタリの確率をと、ハズレ

の確率を p とすると、

$$p = \frac{18}{38}, \quad q = \frac{20}{38}$$

である。

(A') 1:1 の賭で、かけ金を 2 倍にする。

(B) 2:1 の賭

これには次の 6 種類がある：(1) 最初の 12 の数 (1 から 12 までの数) (2) 次の 12 の数 (13 から 24 までの数)

(3) 最後の 12 の数 (25 から 36 までの数)

(4) オ 1 列 (1, 4, 7, ..., 34)

(5) オ 2 列 (2, 5, 8, ..., 35)

(6) オ 3 列 (3, 6, 9, ..., 36)

$p = \frac{12}{38}$, $q = \frac{26}{38}$ であるが、支拂いは 2:1 であり、つまり 1 円かけてもアタレば 2 円貰える。ハズレは 1 円取られる。

(C) ペテルスブルグ式のかけ

これは次のように賭ける。まず 1 円賭ける。ハズレなら 2 円かける。これもハズレなら 4 円と、... アタリまで賭金を倍倍にする。アタレば、そこで賭金をふやすのをやめてまた 1 円から出なおす。このようにすれば、アタリが 1 つ出るたびに、その前のアタリするときよりも所持金は 1 円増える。

たとえば、4 回ハズレて 5 回目にアタレば、

	賭け金	当たり/ハズレ	所持金
1 回目	1 円	ハズレ	$2-1 = 2-1 (\text{円})$
2 回目	2 円	ハズレ	$2-(1+2) = 2-3 (\text{円})$
3 回目	4 円	ハズレ	$2-(1+2+4) = 2-7 (\text{円})$
4 回目	8 円	ハズレ	$2-(1+2+4+8) = 2-15 (\text{円})$
5 回目	16 円	当たり	$2-15 + 16 = 2+1 (\text{円})$

そこで、ある人が所持金 $2=10$ 円で賭を楽しんだ。所持金が 15 円以上になれば勝、所持金が 0 円 (~~またはそれ以下~~)^ト になれば破産として負とする。勝負がつけば止めて帰ることにして、このような方針で、破産する確率と勝負がつくまでの平均時間を求める。その結果は次の表-1 となる:

表-1 所持金 $2=10$ 円で破産する確率 $\hat{\rho}_{10}$

	実験値 (500 回)			計算値
	WIN	RUIN	$\hat{\rho}_{10}$	ρ_{10}
(A) 1:1	248	252	0.504	0.516
(A') 1:1 かけ金 2 倍	251	249	0.498	0.475
(B) 2:1	290	210	0.42	0.444
(C) ペテリスブルック はじめ 1 円が	300	200	0.40	0.399

表-2 所持金 $Z=10^4$ の勝負がつくまでの回数の期待値

	実験値 (500回)	計算値 D_Z
(A) 1:1	49.84	51.97
(A') 1:1 かけ金 2倍	14.89	15.33
(B) 2:1	27.77	27.82
(C) ペテルスブルグ はじめ1千から	9.32	9.65

この実験から次のことが分かる。

- 1) 1:1 の賭で遊ぶ人の約半数は喜び、半数は悲しむ。
もし同じ人が毎日こういう賭をやれば、約半分はツイテ
いる日となる。
 - 2) もし賭金を倍にして 1:1 の賭をやると成功する割合は
大きいですが、勝負のきまり方が遅すぎる。
 - 3) 2:1 の賭では、成功する割合も比較的高いし、長い
時間楽しめる。
 - 4) ペテルスブルグ式の賭では、2:1 の賭より少し成功率
は下り、勝負の決り方が速い。
- こうして見ると、私は 2:1 の賭がよいと思う。

3. 賭の問題の数値計算

確率 p でアタリ, q でハズレる ($p+q=1$) 賭で, はじめの所持金 x 中の人が, ある賭を行い, 所持金が a に達したときは勝, 0 となったとき負 というゲームを続ける. このとき, 負となる確率 q_x と, ゲームの継続時間の期待値 D_x を求める. ランダム・ウォークの言葉でいえば, q_x は x から出発した1つの粒子が, 0 の壁に吸収される確率である. $p_x = 1 - q_x$ (これが成立することは証明されている.) は a の壁に吸収される確率である. D_x は両側の壁に吸収されるまでの平均歩行距離である.

(A) 1:1 の賭 ([2] フェラ著 河田訳 "確率論入門" とその応用) 才14章 参照)

最初の賭で, ある人の所持金は $x+1$ か $x-1$ となる.

$$(A-1) \quad \begin{cases} q_x = p \cdot q_{x+1} + q \cdot q_{x-1} & (1 \leq x \leq a-1) \\ q_1 = p \cdot q_2 + q \\ q_a = q \cdot q_{a-2} \end{cases}$$

となる. 才14章を統一するため,

$$q_0 = 1, \quad q_a = 0 \quad (\text{境界条件})$$

$$\text{とおき} \quad q_x = p \cdot q_{x+1} + q \cdot q_{x-1} \quad (1 \leq x \leq a-1)$$

を解く. [2]によれば,

$$(A-2) \quad q_z = \frac{(q/p)^a - (q/p)^z}{(q/p)^a - 1} \quad (p \neq q \text{ のとき})$$

$$(A-3) \quad q_z = 1 - \frac{z}{a} \quad (p = q \text{ のとき})$$

$$(A-4) \quad D_z = p D_{z+1} + q D_{z-1} + 1 \quad (0 \leq z \leq a)$$

$$D_0 = 0, \quad D_a = 0 \quad (\text{境界条件})$$

これは

$$(A-5) \quad D_z = \frac{z}{q-p} - \frac{a}{q-p} \cdot \frac{1 - (q/p)^z}{1 - (q/p)^a} \quad (p \neq q \text{ のとき})$$

$$(A-6) \quad D_z = z(a-z) \quad (p = q \text{ のとき})$$

(B) 2:1 の賭

q_z については次の差分方程式が成立つ.

$$(B-1) \quad q_z = p q_{z+2} + q \cdot q_{z-1} \quad (1 \leq z \leq a-1).$$

$$(B-2) \quad \begin{cases} q_0 = 1 \\ q_a = q_{a+1} = 0 \end{cases}.$$

この解は 直接 (B-1) と (B-2) から 連立方程式をクラメルズというて,

$$(B-3) \quad q_z = q^z P_{a-1-z} / P_{a-1},$$

$$(B-4) \quad P_k = \sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (-1)^j \binom{k-2j}{j} (q^2 p)^j$$

が求められる。たとえば $a=15$ のとき

$$(B-5) \quad g_{10} = g^{10} (1 - 2g^2 p) / (1 - 12g^2 p + 45(g^2 p)^2 - 56(g^2 p)^3 + 15(g^2 p)^4)$$

となる。

D_z については

$$(B-6) \quad D_z = p D_{z+2} + g D_{z-1} + 1 \quad (1 \leq z \leq a-1)$$

ただし

$$(B-7) \quad D_0 = 0, \quad D_a = 0, \quad D_{a+1} = 0$$

$$p = \frac{12}{38} = 0.3157895 \quad \text{の場合} \quad g_z = Q(z), \quad D_z = D(z)$$

の表は、数値計算の結果、次のようになる。(a=15)

表-3

$Q(1) =$	0.9566342	$D(1) =$	6.3715
$Q(2) =$	0.9109084	$D(2) =$	12.0545
$Q(3) =$	0.8626752	$D(3) =$	17.0098
$Q(4) =$	0.8118362	$D(4) =$	21.2011
$Q(5) =$	0.7581704	$D(5) =$	24.5795
$Q(6) =$	0.7016852	$D(6) =$	27.1157
$Q(7) =$	0.6418950	$D(7) =$	28.7327
$Q(8) =$	0.5793011	$D(8) =$	29.4442
$Q(9) =$	0.5123498	$D(9) =$	29.0696
$Q(10) =$	0.4436812	$D(10) =$	27.8192
$Q(11) =$	0.3672891	$D(11) =$	25.0913
$Q(12) =$	0.2948995	$D(12) =$	21.9436
$Q(13) =$	0.2017733	$D(13) =$	16.0140
$Q(14) =$	0.1380554	$D(14) =$	11.9570
$Q(15) =$	0.0000000	$D(15) =$	0.0000

(C) ペテルスブルグ式の賭

$$p = \frac{18}{38}, \quad q = \frac{20}{38} \quad \text{として,}$$

$g(z, \Delta)$ を所持金 z の人がペテルスブルグ式に Δ を賭けて遂に破産する確率

$D(z, \Delta)$ を所持金 z の人がペテルスブルグ式に Δ を賭けて, 勝負がきまるまでの時間の期待値

とする。ただし, $\Delta \leq z$ (倍々と賭金をふやしていく原則) だけあるが, 現在の所持金以上の金を賭けてはならない。) とする。

$g(z, \Delta)$ については, 次の差分方程式が成立つ。

$$\begin{array}{lcl}
 g(1, 1) & = & p \cdot g(2, 1) + q \\
 g(2, 1) & = & p \cdot g(3, 1) + q \cdot g(1, 1) \\
 g(3, 1) & = & p \cdot g(4, 1) + q \cdot g(2, 2) \\
 g(4, 1) & = & p \cdot g(5, 1) + q \cdot g(3, 2) \\
 g(5, 1) & = & p \cdot g(6, 1) + q \cdot g(4, 2) \\
 g(6, 1) & = & p \cdot g(7, 1) + q \cdot g(5, 2) \\
 g(7, 1) & = & p \cdot g(8, 1) + q \cdot g(6, 2) \\
 g(8, 1) & = & p \cdot g(9, 1) + q \cdot g(7, 2) \\
 g(9, 1) & = & p \cdot g(10, 1) + q \cdot g(8, 2) \\
 g(10, 1) & = & p \cdot g(11, 1) + q \cdot g(9, 2) \\
 g(11, 1) & = & p \cdot g(12, 1) + q \cdot g(10, 2) \\
 g(12, 1) & = & p \cdot g(13, 1) + q \cdot g(11, 2) \\
 g(13, 1) & = & p \cdot g(14, 1) + q \cdot g(12, 2) \\
 g(14, 1) & = & + q \cdot g(13, 2) \\
 g(2, 2) & = & p \cdot g(4, 1) + q \\
 g(3, 2) & = & p \cdot g(5, 1) + q \cdot g(1, 1) \\
 g(4, 2) & = & p \cdot g(6, 1) + q \cdot g(2, 2)
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}(5, 2) &= \mathcal{P} \cdot \mathcal{Z}(7, 1) + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(3, 3) \\
\mathcal{Z}(6, 2) &= \mathcal{P} \cdot \mathcal{Z}(8, 1) + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(4, 4) \\
\mathcal{Z}(7, 2) &= \mathcal{P} \cdot \mathcal{Z}(9, 1) + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(5, 4) \\
\mathcal{Z}(8, 2) &= \mathcal{P} \cdot \mathcal{Z}(10, 1) + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(6, 4) \\
\mathcal{Z}(9, 2) &= \mathcal{P} \cdot \mathcal{Z}(11, 1) + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(7, 4) \\
\mathcal{Z}(10, 2) &= \mathcal{P} \cdot \mathcal{Z}(12, 1) + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(8, 4) \\
\mathcal{Z}(11, 2) &= \mathcal{P} \cdot \mathcal{Z}(13, 1) + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(9, 4) \\
\mathcal{Z}(12, 2) &= \mathcal{P} \cdot \mathcal{Z}(14, 1) + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(10, 4) \\
\mathcal{Z}(13, 2) &= + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(11, 4) \\
\mathcal{Z}(14, 2) &= + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(12, 4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}(4, 4) &= \mathcal{P} \cdot \mathcal{Z}(8, 1) + \mathcal{Z} \\
\mathcal{Z}(5, 4) &= \mathcal{P} \cdot \mathcal{Z}(9, 1) + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(1, 1) \\
\mathcal{Z}(6, 4) &= \mathcal{P} \cdot \mathcal{Z}(10, 1) + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(2, 2) \\
\mathcal{Z}(7, 4) &= \mathcal{P} \cdot \mathcal{Z}(11, 1) + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(3, 3) \\
\mathcal{Z}(8, 4) &= \mathcal{P} \cdot \mathcal{Z}(12, 1) + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(4, 4) \\
\mathcal{Z}(9, 4) &= \mathcal{P} \cdot \mathcal{Z}(13, 1) + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(5, 5) \\
\mathcal{Z}(10, 4) &= \mathcal{P} \cdot \mathcal{Z}(14, 1) + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(6, 6) \\
\mathcal{Z}(11, 4) &= + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(7, 7) \\
\mathcal{Z}(12, 4) &= + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(8, 8) \\
\mathcal{Z}(13, 4) &= + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(9, 8) \\
\mathcal{Z}(14, 4) &= + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(10, 8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}(8, 8) &= + \mathcal{Z} \\
\mathcal{Z}(9, 8) &= + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(1, 1) \\
\mathcal{Z}(10, 8) &= + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(2, 2) \\
\mathcal{Z}(11, 8) &= + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(3, 3) \\
\mathcal{Z}(12, 8) &= + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(4, 4) \\
\mathcal{Z}(13, 8) &= + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(5, 5) \\
\mathcal{Z}(14, 8) &= + \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}(6, 6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}(3, 3) &= \mathcal{P} \cdot \mathcal{Z}(6, 1) + \mathcal{Z} \\
\mathcal{Z}(5, 5) &= \mathcal{P} \cdot \mathcal{Z}(10, 1) + \mathcal{Z} \\
\mathcal{Z}(6, 6) &= \mathcal{P} \cdot \mathcal{Z}(12, 1) + \mathcal{Z} \\
\mathcal{Z}(7, 7) &= \mathcal{P} \cdot \mathcal{Z}(14, 1) + \mathcal{Z}
\end{aligned}$$

$D(2, \Delta)$ については 次の差分方程式が成立つ。

	$D(1, 1) = P \cdot D(2, 1)$		$+ 1$
	$D(2, 1) = P \cdot D(3, 1)$	$+ 8 \cdot D(1, 1)$	$+ 1$
	$D(3, 1) = P \cdot D(4, 1)$	$+ 8 \cdot D(2, 2)$	$+ 1$
	$D(4, 1) = P \cdot D(5, 1)$	$+ 8 \cdot D(3, 2)$	$+ 1$
	$D(5, 1) = P \cdot D(6, 1)$	$+ 8 \cdot D(4, 2)$	$+ 1$
	$D(6, 1) = P \cdot D(7, 1)$	$+ 8 \cdot D(5, 2)$	$+ 1$
	$D(7, 1) = P \cdot D(8, 1)$	$+ 8 \cdot D(6, 2)$	$+ 1$
	$D(8, 1) = P \cdot D(9, 1)$	$+ 8 \cdot D(7, 2)$	$+ 1$
	$D(9, 1) = P \cdot D(10, 1)$	$+ 8 \cdot D(8, 2)$	$+ 1$
	$D(10, 1) = P \cdot D(11, 1)$	$+ 8 \cdot D(9, 2)$	$+ 1$
	$D(11, 1) = P \cdot D(12, 1)$	$+ 8 \cdot D(10, 2)$	$+ 1$
	$D(12, 1) = P \cdot D(13, 1)$	$+ 8 \cdot D(11, 2)$	$+ 1$
	$D(13, 1) = P \cdot D(14, 1)$	$+ 8 \cdot D(12, 2)$	$+ 1$
	$D(14, 1) =$	$+ 8 \cdot D(13, 2)$	$+ 1$
(C-2)	$D(2, 2) = P \cdot D(4, 1)$		$+ 1$
	$D(3, 2) = P \cdot D(5, 1)$	$+ 8 \cdot D(1, 1)$	$+ 1$
	$D(4, 2) = P \cdot D(6, 1)$	$+ 8 \cdot D(2, 2)$	$+ 1$
	$D(5, 2) = P \cdot D(7, 1)$	$+ 8 \cdot D(3, 3)$	$+ 1$
	$D(6, 2) = P \cdot D(8, 1)$	$+ 8 \cdot D(4, 4)$	$+ 1$
	$D(7, 2) = P \cdot D(9, 1)$	$+ 8 \cdot D(5, 4)$	$+ 1$
	$D(8, 2) = P \cdot D(10, 1)$	$+ 8 \cdot D(6, 4)$	$+ 1$
	$D(9, 2) = P \cdot D(11, 1)$	$+ 8 \cdot D(7, 4)$	$+ 1$
	$D(10, 2) = P \cdot D(12, 1)$	$+ 8 \cdot D(8, 4)$	$+ 1$
	$D(11, 2) = P \cdot D(13, 1)$	$+ 8 \cdot D(9, 4)$	$+ 1$
	$D(12, 2) = P \cdot D(14, 1)$	$+ 8 \cdot D(10, 4)$	$+ 1$
	$D(13, 2) =$	$+ 8 \cdot D(11, 4)$	$+ 1$
	$D(14, 2) =$	$+ 8 \cdot D(12, 4)$	$+ 1$
	$D(4, 4) = P \cdot D(8, 1)$		$+ 1$
	$D(5, 4) = P \cdot D(9, 1)$	$+ 8 \cdot D(1, 1)$	$+ 1$
	$D(6, 4) = P \cdot D(10, 1)$	$+ 8 \cdot D(2, 2)$	$+ 1$
	$D(7, 4) = P \cdot D(11, 1)$	$+ 8 \cdot D(3, 3)$	$+ 1$
	$D(8, 4) = P \cdot D(12, 1)$	$+ 8 \cdot D(4, 4)$	$+ 1$
	$D(9, 4) = P \cdot D(13, 1)$	$+ 8 \cdot D(5, 5)$	$+ 1$
	$D(10, 4) = P \cdot D(14, 1)$	$+ 8 \cdot D(6, 6)$	$+ 1$
	$D(11, 4) =$	$+ 8 \cdot D(7, 7)$	$+ 1$
	$D(12, 4) =$	$+ 8 \cdot D(8, 8)$	$+ 1$
	$D(13, 4) =$	$+ 8 \cdot D(9, 8)$	$+ 1$
	$D(14, 4) =$	$+ 8 \cdot D(10, 8)$	$+ 1$

$D(8, 8) =$		$+ 8 \cdot D(1, 1)$	$+ 1$
$D(9, 8) =$		$+ 8 \cdot D(2, 2)$	$+ 1$
$D(10, 8) =$		$+ 8 \cdot D(3, 3)$	$+ 1$
$D(11, 8) =$		$+ 8 \cdot D(4, 4)$	$+ 1$
$D(12, 8) =$		$+ 8 \cdot D(5, 5)$	$+ 1$
$D(13, 8) =$		$+ 8 \cdot D(6, 6)$	$+ 1$
$D(14, 8) =$			
$D(3, 3) =$	$p \cdot D(6, 1)$		$+ 1$
$D(5, 5) =$	$p \cdot D(10, 1)$		$+ 1$
$D(6, 6) =$	$p \cdot D(12, 1)$		$+ 1$
$D(7, 7) =$	$p \cdot D(14, 1)$		$+ 1$

(C-1) と (C-2) を数値的に解くため、適当な初期値を
いれて、Gauss-Seidel 法で 50 回反復した。その結果を
表-4 と表-5 に示す。

(5) 1:1 の賭で かけ金を 2 倍にする場合

p = 1 回の試みで アタリの確率

q = 1 回の試みで ハズレの確率

Z = (最初の所持金) / (1 回のかけ金)

a = (目標額) / (1 回のかけ金)

とする。

(A) 1:1 のかけの場合 $p = \frac{18}{38}$, $q = \frac{20}{38}$, $Z = \frac{10}{1} = 10$, $a = \frac{15}{1} = 15$

$$q_2 = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^Z}{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1} = \frac{\left(\frac{10}{9}\right)^{15} - \left(\frac{10}{9}\right)^{10}}{\left(\frac{10}{9}\right)^{15} - 1} = 0.516$$

$$D_2 = \frac{Z - a(1 - q_2)}{q - p} = 51.97$$

(A') 1:1 のかけで かけ金を 2 倍にする場合は

$$Z = \frac{10}{2} = 5, \quad a = \frac{15}{2} = 7.5 \quad \text{とすればよい。}$$

表-4 (C-1) の計算結果 , たい $R(z, \lambda) \equiv g(z, \lambda)$ である

$\kappa = 49$	$R(1,1) = 0.9566$	$R(1,2) = 0.5000$	$R(1,4) = 0.5000$	$R(1,8) = 0.5000$
	$R(2,1) = 0.9085$	$R(2,2) = 0.9050$	$R(2,4) = 0.5000$	$R(2,8) = 0.5000$
	$R(3,1) = 0.8549$	$R(3,2) = 0.8536$	$R(3,4) = 0.5000$	$R(3,8) = 0.5000$
	$R(4,1) = 0.7994$	$R(4,2) = 0.7963$	$R(4,4) = 0.7838$	$R(4,8) = 0.5000$
	$R(5,1) = 0.7391$	$R(5,2) = 0.7344$	$R(5,4) = 0.7276$	$R(5,8) = 0.5000$
	$R(6,1) = 0.6755$	$R(6,2) = 0.6700$	$R(6,4) = 0.6655$	$R(6,8) = 0.5000$
	$R(7,1) = 0.6101$	$R(7,2) = 0.6070$	$R(7,4) = 0.5985$	$R(7,8) = 0.5000$
	$R(8,1) = 0.5436$	$R(8,2) = 0.5394$	$R(8,4) = 0.5283$	$R(8,8) = 0.5263$
	$R(9,1) = 0.4731$	$R(9,2) = 0.4680$	$R(9,4) = 0.4543$	$R(9,8) = 0.5035$
	$R(10,1) = 0.3993$	$R(10,2) = 0.3938$	$R(10,4) = 0.3770$	$R(10,8) = 0.4763$
	$R(11,1) = 0.3231$	$R(11,2) = 0.3168$	$R(11,4) = 0.2976$	$R(11,8) = 0.4454$
	$R(12,1) = 0.2444$	$R(12,2) = 0.2375$	$R(12,4) = 0.2770$	$R(12,8) = 0.4125$
	$R(13,1) = 0.1640$	$R(13,2) = 0.1566$	$R(13,4) = 0.2650$	$R(13,8) = 0.3766$
	$R(14,1) = 0.0824$	$R(14,2) = 0.1458$	$R(14,4) = 0.2507$	$R(14,8) = 0.3379$

$\kappa = 50$	$R(1,1) = 0.9566$	$R(1,2) = 0.5000$	$R(1,4) = 0.5000$	$R(1,8) = 0.5000$
	$R(2,1) = 0.9085$	$R(2,2) = 0.9050$	$R(2,4) = 0.5000$	$R(2,8) = 0.5000$
	$R(3,1) = 0.8549$	$R(3,2) = 0.8536$	$R(3,4) = 0.5000$	$R(3,8) = 0.5000$
	$R(4,1) = 0.7994$	$R(4,2) = 0.7963$	$R(4,4) = 0.7838$	$R(4,8) = 0.5000$
	$R(5,1) = 0.7391$	$R(5,2) = 0.7344$	$R(5,4) = 0.7276$	$R(5,8) = 0.5000$
	$R(6,1) = 0.6755$	$R(6,2) = 0.6700$	$R(6,4) = 0.6655$	$R(6,8) = 0.5000$
	$R(7,1) = 0.6101$	$R(7,2) = 0.6070$	$R(7,4) = 0.5985$	$R(7,8) = 0.5000$
	$R(8,1) = 0.5436$	$R(8,2) = 0.5394$	$R(8,4) = 0.5283$	$R(8,8) = 0.5263$
	$R(9,1) = 0.4731$	$R(9,2) = 0.4680$	$R(9,4) = 0.4543$	$R(9,8) = 0.5035$
	$R(10,1) = 0.3993$	$R(10,2) = 0.3938$	$R(10,4) = 0.3770$	$R(10,8) = 0.4763$
	$R(11,1) = 0.3231$	$R(11,2) = 0.3168$	$R(11,4) = 0.2976$	$R(11,8) = 0.4454$
	$R(12,1) = 0.2444$	$R(12,2) = 0.2375$	$R(12,4) = 0.2770$	$R(12,8) = 0.4125$
	$R(13,1) = 0.1640$	$R(13,2) = 0.1566$	$R(13,4) = 0.2650$	$R(13,8) = 0.3766$
	$R(14,1) = 0.0824$	$R(14,2) = 0.1458$	$R(14,4) = 0.2507$	$R(14,8) = 0.3379$

表-5 (c-2) の計算結果

K=59	D(1,1)=	4.924	D(1,2)=	1.000	D(1,4)=	1.000	D(1,8)=	1.000
	D(2,1)=	8.283	D(2,2)=	6.490	D(2,4)=	1.000	D(2,8)=	1.000
	D(3,1)=	9.905	D(3,2)=	9.291	D(3,4)=	1.000	D(3,8)=	1.000
	D(4,1)=	11.589	D(4,2)=	10.121	D(4,4)=	6.643	D(4,8)=	1.000
	D(5,1)=	12.032	D(5,2)=	10.204	D(5,4)=	8.799	D(5,8)=	1.000
	D(6,1)=	12.045	D(6,2)=	10.139	D(6,4)=	8.988	D(6,8)=	1.000
	D(7,1)=	11.979	D(7,2)=	10.839	D(7,4)=	8.340	D(7,8)=	1.000
	D(8,1)=	11.913	D(8,2)=	10.303	D(8,4)=	7.420	D(8,8)=	1.000
	D(9,1)=	10.995	D(9,2)=	9.200	D(9,4)=	5.905	D(9,8)=	3.591
	D(10,1)=	9.652	D(10,2)=	7.829	D(10,4)=	4.057	D(10,8)=	4.416
	D(11,1)=	8.044	D(11,2)=	6.080	D(11,4)=	2.048	D(11,8)=	4.529
	D(12,1)=	6.173	D(12,2)=	4.127	D(12,4)=	1.526	D(12,8)=	4.496
	D(13,1)=	4.164	D(13,2)=	2.078	D(13,4)=	2.890	D(13,8)=	3.933
	D(14,1)=	2.094	D(14,2)=	1.803	D(14,4)=	3.324	D(14,8)=	3.065

K=50	D(1,1)=	4.924	D(1,2)=	1.000	D(1,4)=	1.000	D(1,8)=	1.000
	D(2,1)=	8.283	D(2,2)=	6.490	D(2,4)=	1.000	D(2,8)=	1.000
	D(3,1)=	9.905	D(3,2)=	9.291	D(3,4)=	1.000	D(3,8)=	1.000
	D(4,1)=	11.589	D(4,2)=	10.121	D(4,4)=	6.643	D(4,8)=	1.000
	D(5,1)=	12.032	D(5,2)=	10.204	D(5,4)=	8.799	D(5,8)=	1.000
	D(6,1)=	12.045	D(6,2)=	10.139	D(6,4)=	8.988	D(6,8)=	1.000
	D(7,1)=	11.979	D(7,2)=	10.839	D(7,4)=	8.340	D(7,8)=	1.000
	D(8,1)=	11.913	D(8,2)=	10.303	D(8,4)=	7.420	D(8,8)=	1.000
	D(9,1)=	10.995	D(9,2)=	9.200	D(9,4)=	5.905	D(9,8)=	3.591
	D(10,1)=	9.652	D(10,2)=	7.829	D(10,4)=	4.057	D(10,8)=	4.416
	D(11,1)=	8.044	D(11,2)=	6.080	D(11,4)=	2.048	D(11,8)=	4.529
	D(12,1)=	6.173	D(12,2)=	4.127	D(12,4)=	1.526	D(12,8)=	4.496
	D(13,1)=	4.164	D(13,2)=	2.078	D(13,4)=	2.890	D(13,8)=	3.933
	D(14,1)=	2.094	D(14,2)=	1.803	D(14,4)=	3.324	D(14,8)=	3.065

4. むすび

目標額を決めない賭の場合は、いままでのやり方では解けない。しかし、実際に賭をするときは、目標額は決めるのがよい。殊に、ペテルスブルグ式に賭けるときはそうである。目標額は、(所持金 + アルファ) に決めるのが、一番安全ではあるが、スリルがない。

参考文献

- [1] 森口繁一 (1963), トバコ の数理, 数理科学 8.63, 12-19.
- [2] フェラ著, 河田龍夫他訳 (1960), 確率論とその応用
紀伊国屋書店, 才 14 頁
- [3] H. Tanai (1967), A Generalized Method to Evaluate the Lipschitz Constant Associated with a Class of Simultaneous Operator Systems, Proceedings of the Fujihara Memorial Faculty of Engineering, KEIO University, Vol. 20 NO. 79, PP. 1251.

研究集会の後上記 [3] の文献 を頂きましたことと感謝します。