

誤差関数の逆関数 の最良近似式

電研研 中田英雄, 高山文雄

0. はじめに

誤差関数の逆関数の計算については, 今年(1971)の3月の研究集会で一松信氏の発表があり, 端の付近での特異性から, 逆関数は Newton 法で解くプログラムが示された.

山内二郎(1965)及び筆者(1967)の最良近似式は端の方で弱かったので, 今回はかなり端の方(確率 $P \approx 0.2 \times 10^{-32}$ 位)まで有効な最良近似式を追加した.

*注

Function: $P = 1/\sqrt{2\pi} \int_{x(P)}^{\infty} \exp(-t^2/2) dt$

Range : $0 < P \leq 0.5$

New approximation:

Let $y = -\ln(4P \cdot (1-P))$,

$x(P) \approx \{y(b_0 + b_1 y + b_2/(b_3 + b_1 y))\}^{1/2}$,

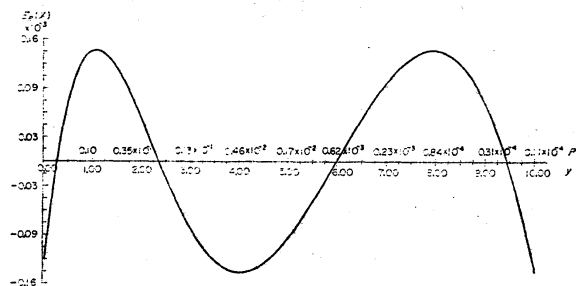
$b_0 = 3.7029934$,

$b_1 = -0.029489901$,

$b_2 = 1.9561294$,

$b_3 = -0.91722758$.

Error Curve: (Approximation-Function)/(Function):



逆正規積分関数は,

$$(8) \quad P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x(P)}^{\infty} \exp(-t^2/2) dt$$

とある, 引数 P に対して $x(P)$ を求める. ($x(P)$ は $P \rightarrow 0$

のとき主要項が $x \simeq \sqrt{-2 \log_e (cP)}$ となる.)

$x(P)$ の近似式として,

$$(9) \quad y = -\log_e 4P \cdot (1-P)$$

とある, y の区間を $y_1 \leq y \leq y_6$ とした

$$(10) \quad x(P) = \left\{ \left(\frac{\pi}{2} y + r \right) \cdot (p_0 + y p_1 + y^2 p_2) / (1 + y g) \right\}^{1/2}$$

を求める. このときの誤差を

$$(11) \quad x(P) - \bar{x} = E(y; p_0, p_1, p_2, g, r)$$

とかく. 区間 $[y_1, y_6]$ で誤差 $|E|$ の max が min

になるように, パラメタ p_0, p_1, p_2, g, r を定める.

そのために, 極値を与える y_i ($i=2, 3, 4, 5$), すなわち

4 個の偏差臭と (10) 式の 5 個のパラメタの全部で 9 個

の未知数を次の連立方程式を解いて定める. (最良近似法

の求め方の原理)

$$(12) \quad \sum_{j=0}^2 \left\{ \left(\frac{\partial E}{\partial p_j} \right)_{y_i} + \left(\frac{\partial E}{\partial p_j} \right)_{y_{i+1}} \right\} \Delta p_j + \left\{ \left(\frac{\partial E}{\partial g} \right)_{y_i} + \left(\frac{\partial E}{\partial g} \right)_{y_{i+1}} \right\} \Delta g \\ + \left\{ \left(\frac{\partial E}{\partial r} \right)_{y_i} + \left(\frac{\partial E}{\partial r} \right)_{y_{i+1}} \right\} \Delta r = -(E(y_i) + E(y_{i+1})) \\ i=1, 2, 3, 4, 5$$

$$(13) \quad \frac{\partial E}{\partial y_i} = 0, (i=2, 3, 4, 5)$$

$\Delta p_j, \Delta g, \Delta r$ は p_j ($j=0, 1, 2$) と g, r の修正量である.

2. 最良近似式とその誤差曲線

関数 $P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x(P)}^{\infty} \exp(-t^2/2) dt$ の逆関数

近似式 $y = -\log(4P(1-P))$ とおき,

$$x(P) = \left\{ d_2 + y \cdot (d_3 + y \cdot d_4) + d_1 / (y + e_1) \right\}^{1/2}$$

種類	範囲	$\Delta = \text{マックス誤差}(\text{絶対})$
(1-1)	$10 \leq y \leq 20$ ($4.24 \leq x \leq 6.10$)	$2.352 \cdot 10^{-7}$
(1-2)	$10 \leq y \leq 30$ ($4.24 \leq x \leq 7.54$)	$2.461 \cdot 10^{-6}$
(1-3)	$10 \leq y \leq 40$ ($4.24 \leq x \leq 8.75$)	$7.632 \cdot 10^{-6}$
(1-4)	$10 \leq y \leq 50$ ($4.24 \leq x \leq 9.82$)	$1.547 \cdot 10^{-5}$
(1-5)	$10 \leq y \leq 60$ ($4.24 \leq x \leq 10.78$)	$2.544 \cdot 10^{-5}$
(1-6)	$10 \leq y \leq 70$ ($4.24 \leq x \leq 11.66$)	$3.707 \cdot 10^{-5}$
(1-7)	$10 \leq y \leq 80$ ($4.24 \leq x \leq 12.48$)	$4.995 \cdot 10^{-5}$
(2-1)	$0 \leq y \leq 30$ ($0 \leq x \leq 7.54$)	$1.18 \cdot 10^{-3}$
(2-2)	$0 \leq y \leq 40$ ($0 \leq x \leq 8.75$)	$1.42 \cdot 10^{-3}$
(2-3)	$0 \leq y \leq 50$ ($0 \leq x \leq 9.82$)	$1.59 \cdot 10^{-3}$
(2-4)	$0 \leq y \leq 60$ ($0 \leq x \leq 10.78$)	$1.71 \cdot 10^{-3}$
(2-5)	$0 \leq y \leq 70$ ($0 \leq x \leq 11.66$)	$1.78 \cdot 10^{-3}$
(2-6)	$0 \leq y \leq 80$ ($0 \leq x \leq 12.48$)	$1.83 \cdot 10^{-3}$

1-7) の 最良近似 の OUTPUT の 結果

RESULT

D1, D2, D3, D4, Q1 = 0.3101297130347349D 02 -0.3462000441946561D 01 0.1983127810920972D 01
 0.5318339775891995D-04 0.9713886314943654D 01

	偏差 差 γ	$E(\gamma; \rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$	$E(\gamma; d_1, d_2, d_3, d_4, e_1)$	$E'(\gamma)$
1	0.1000000000000000D 02	-0.49950613D-04	-0.49950613D-04	0.11910708D-03
2	0.1219850214100199D 02	0.49950613D-04	0.49950613D-04	-0.58286709D-15
3	0.2039438181146771D 02	-0.49950613D-04	-0.49950613D-04	-0.54123372D-15
4	0.3863359090027883D 02	0.49950613D-04	0.49950613D-04	0.69388939D-16
5	0.6534666531854526D 02	-0.49950613D-04	-0.49950613D-04	-0.15265567D-15
6	0.8000000000000000D 02	0.49950613D-04	0.49950613D-04	0.14720563D-04

RESULT (2-1) $0 \leq y \leq 30$ で $x(P)$ を求める最良近似の OUTPUT 例:

01, D2, D3, D4, Q1 = 2.4427475802502647D 02 -0.4567739481548870D 01 0.2033781074649546D 01
 -0.7983207583081582D-03 0.9692925396439944D 01

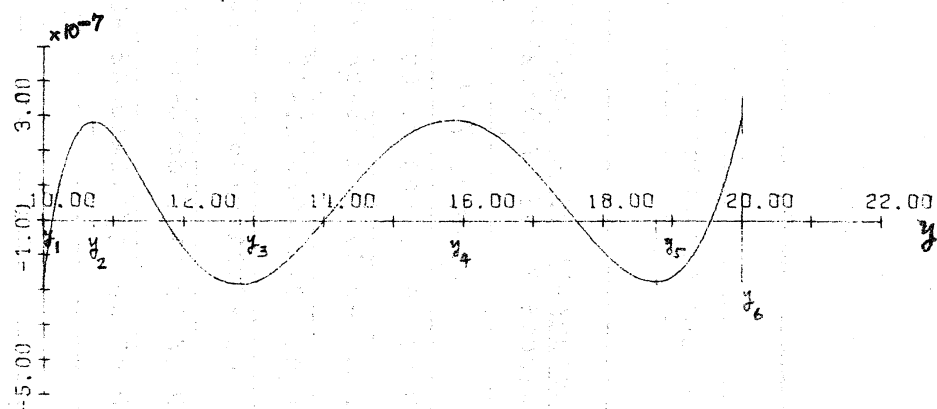
	偏差点 y	$E(y; p_0, p_1, p_2, q)$	$E(y; d_1, d_2, d_3, d_4, q_1)$	$ E'(y) $
1	0.0000000000000000	00 0.0000000000 00	0.00000000D 00	0.00000000D 00
2	$y_1 = 0.3138218588808790D$	00 -0.11757361D-02	-0.11757361D-02	-0.69730888D-10
3	$y_2 = 0.2911715783754899D$	01 0.11757361D-02	0.11757361D-02	-0.15265567D-15
4	$y_3 = 0.9273232697111082D$	01 -0.11757361D-02	-0.11757361D-02	0.76327833D-15
5	$y_4 = 0.2153586857176258D$	02 0.11757361D-02	0.11757361D-02	0.11102230D-15
6	$y_5 = 0.3000000000000000D$	02 -0.11757361D-02	-0.11757361D-02	-0.56033722D-03

(1-1)

$$10 \leq y \leq 20, \quad 4.2365284 \leq x \leq 6.1046012$$

1

D1 # .1741676102
 D2 # -.2827231001
 D3 # .1966544601
 D4 # .233385610-3
 Q1 # .6028416501

絶対誤差 (L_P) - 真の x)

$$|\min - \max \text{ error}| = 2.352 \cdot 10^{-7}$$

(1-2)

$$10 \leq y \leq 30 \quad 4.2365284 \leq x \leq 6.1046012$$

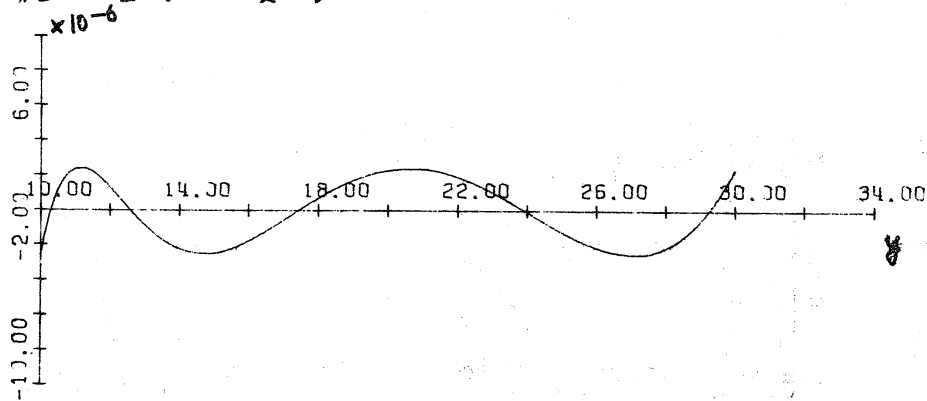
D1# .2051414202

D2# -.3004779201

D3# .1972272501

D4# .156580270-3

Q1# .6890353401

絶対誤差 ($x(P)$ -真の x)

$$|\min - \max \text{ error}| = 2.461 \times 10^{-6}$$

(1-3)

$$10 \leq y \leq 40 \quad 4.236528 \leq x \leq 8.7504956$$

D1# .23148572D2

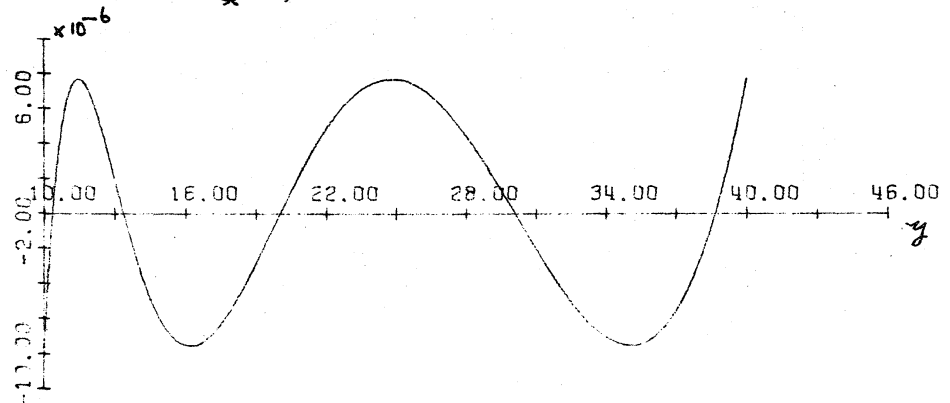
D2# -.31369430D1

D3# .19759292D1

D4# .11557150D-3

Q1# .76141593D1

FM# 22

絶対誤差 $(X(P) - \text{真の } x)$ 

$$|\min \max \text{ error}| = 7.632 \times 10^{-6}$$

(1-4)

$$10 \leq x \leq 50 \quad 4.2365284 \leq x \leq 9.8156261$$

D1# .25439117D2

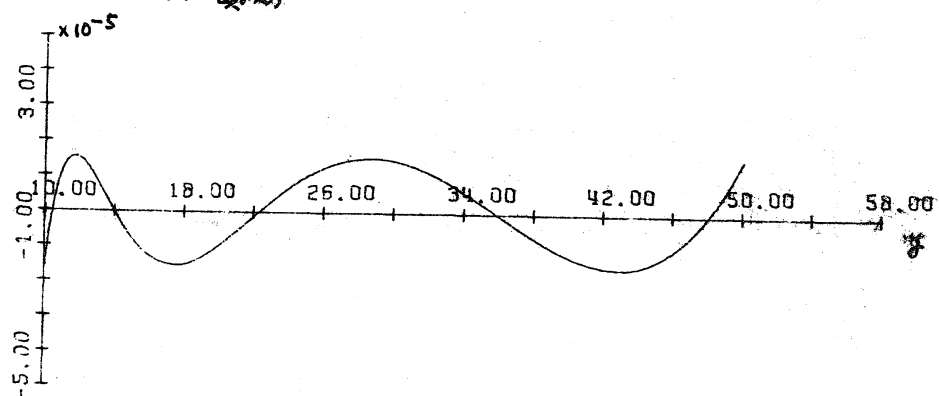
D2# -.32409735D1

D3# .19784904D1

D4# .90575861D-4

Q1# .82352212D1

程的誤差 (X(P)-真, X)



$$| \min - \max \text{ error} | = 1.547 \times 10^{-5}$$

(1-5)

$$10 \leq y \leq 60$$

$$4.2365284 \leq x \leq 10.777887$$

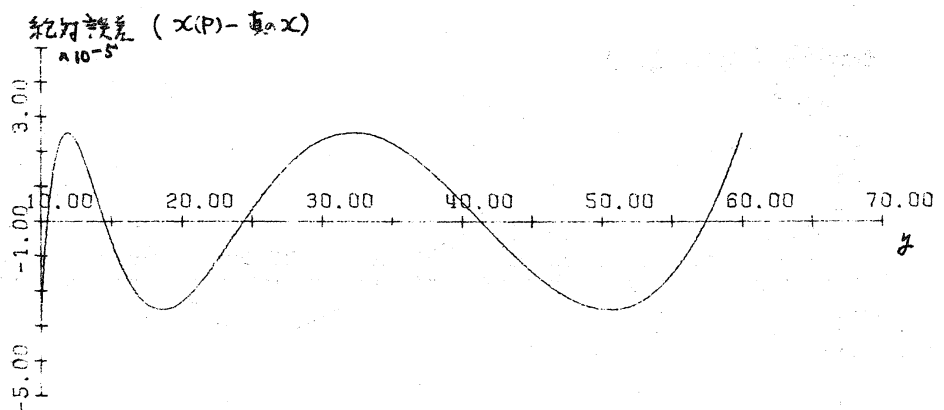
D1# .2747711202

D2# -.3326517301

D3# .1980407401

D4# .738870730-4

Q1# .8781194601

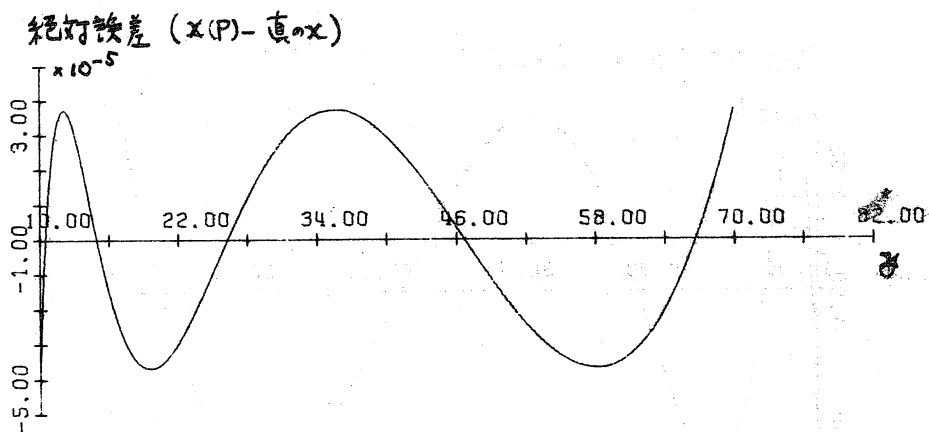


$$| \min - \max \text{ error} | = \frac{2.544}{3.707} \times 10^{-5}$$

(1-6)

$$10 \leq \gamma \leq 70 \quad 4.2365284 \leq x \leq 11.662228$$

D1#	.2932177302
D2#	-.3399066501
D3#	.1981910001
D4#	.620192760-4
Q1#	.9270053801



$$|\min - \max \text{ error}| = 3.767 \times 10^{-5}$$

(1-7)

$$10 \leq y \leq 80 \quad 4.2365284 \leq x \leq 12.484912$$

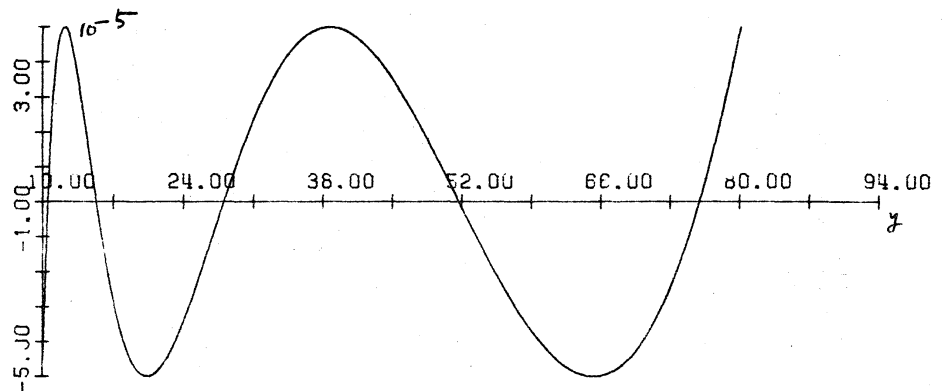
$$D1 = .31012971D+2$$

$$D2 = -.34620004D+1$$

$$D3 = .19831278D+1$$

$$D4 = .53183398D-4$$

$$Q1 = .97138863D+1$$

絕對誤差 ($x(P) - \text{真}x$)

$$|\min \max \text{ error}| = 4.995 \times 10^{-5}$$

(2-1)

$$0 \leq y \leq 30 \quad (0 \leq x \leq 7.541)$$

$$D1 = .44274758D+2$$

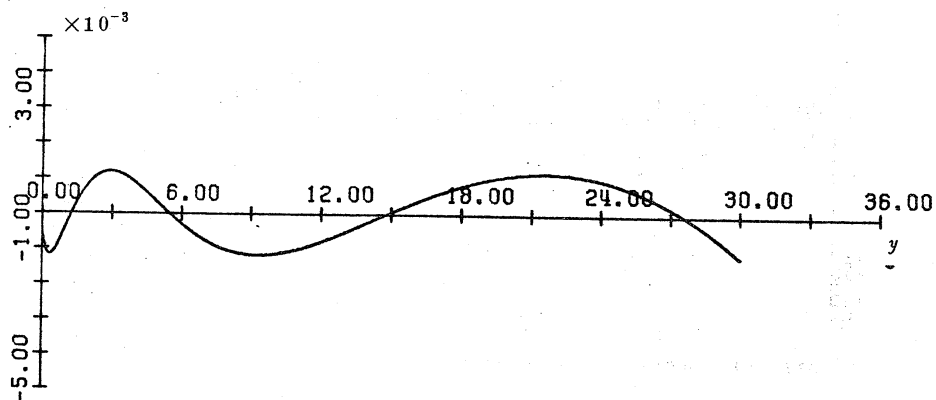
$$D2 = -.45677395D+1$$

$$D3 = .20337811D+1$$

$$D4 = -.79832076D-3$$

$$Q1 = .96929254D+1$$

誤差曲線：

絶対誤差 ($x(P)$ - 真の x)|min-max error| : $.118_{10^{-2}}$

(2-2)

$$0 \leq y \leq 40 \quad (0 \leq x \leq 8.75)$$

$$D1 = .370097040+2$$

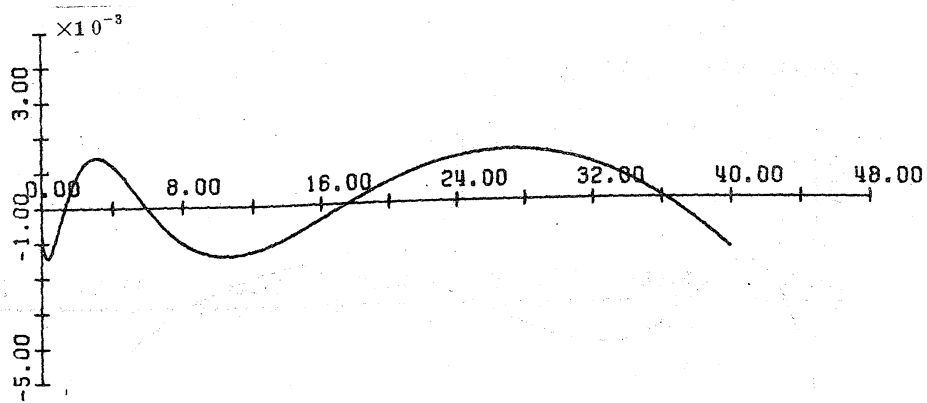
$$D2 = -.408302040+1$$

$$D3 = .201142730+1$$

$$D4 = -.363877440-3$$

$$Q1 = .906429560+1$$

誤差曲線：

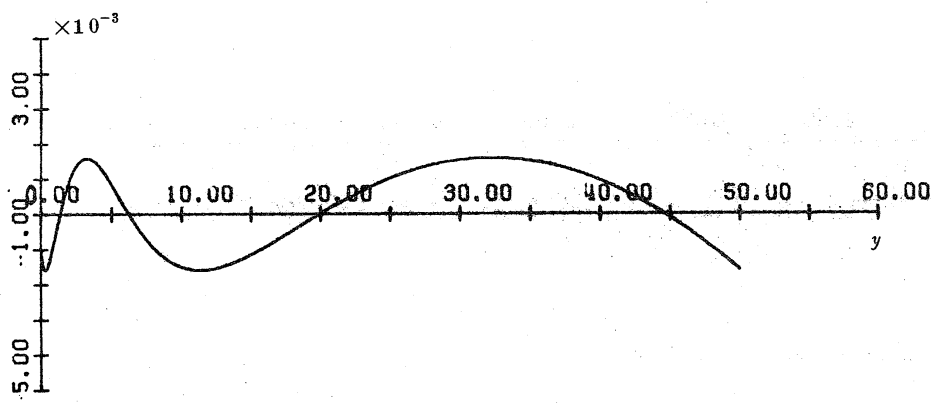
絶対誤差 ($x(P) - \text{真の } x$), x)| min-max error | : $0.142 \cdot 10^{-2}$

(2-3)

$$0 \leq y \leq 50 \quad (0 \leq x \leq 9.81)$$

$$\begin{aligned} D1 &= .33797650D+2 \\ D2 &= -.38626532D+1 \\ D3 &= .20014274D+1 \\ D4 &= -.18750894D-3 \\ Q1 &= .87498536D+1 \end{aligned}$$

誤差曲線:

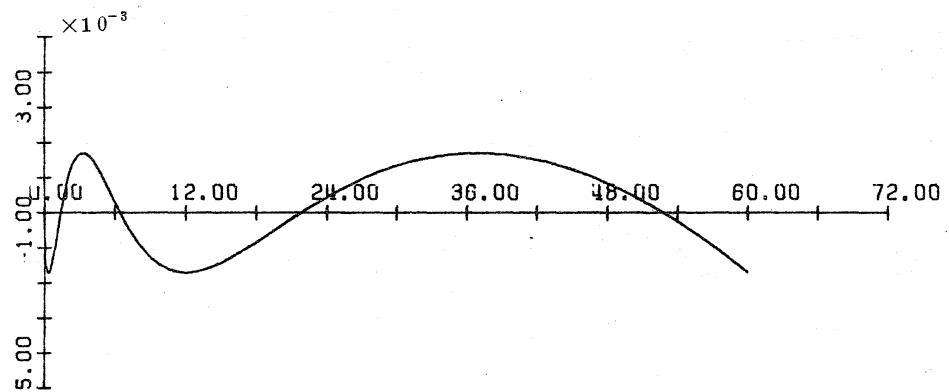
絶対誤差 ($x(P) - \text{真の } x$) (mX)min-max error : $0.159_{10^{-2}}$

(2-4)

$$0 \leq y \leq 60 \quad (0 \leq x \leq 10.8)$$

$$\begin{aligned} D1 &= .32089922D+2 \\ D2 &= -.37441245D+1 \\ D3 &= .19961595D+1 \\ D4 &= -.10203501D-3 \\ Q1 &= .85707412D+1 \end{aligned}$$

誤差曲線:

絶対誤差 ($x(P)$ - 真の x)|min-max error|: $0.171 \cdot 10^{-2}$

(2-5)

$$0 \leq y \leq 70 \quad (0 \leq x \leq 11.66)$$

$$D1 = .31083719D+2$$

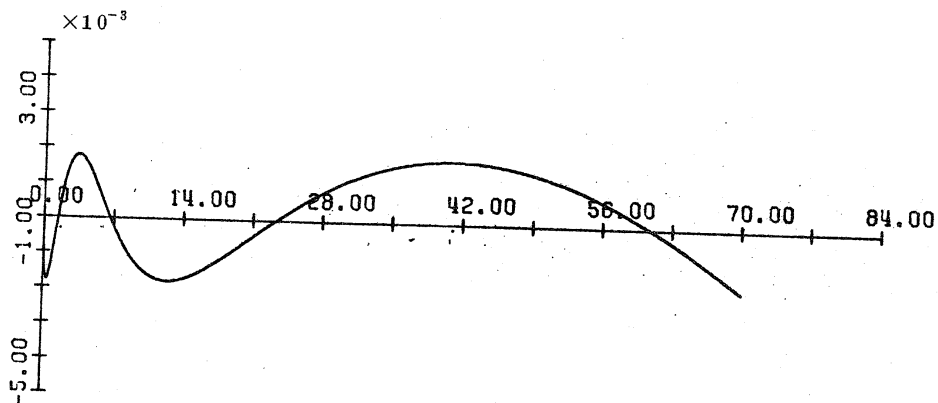
$$D2 = -.36739402D+1$$

$$D3 = .19931008D+1$$

$$D4 = .55770481D-4$$

$$Q1 = .84605946D+1$$

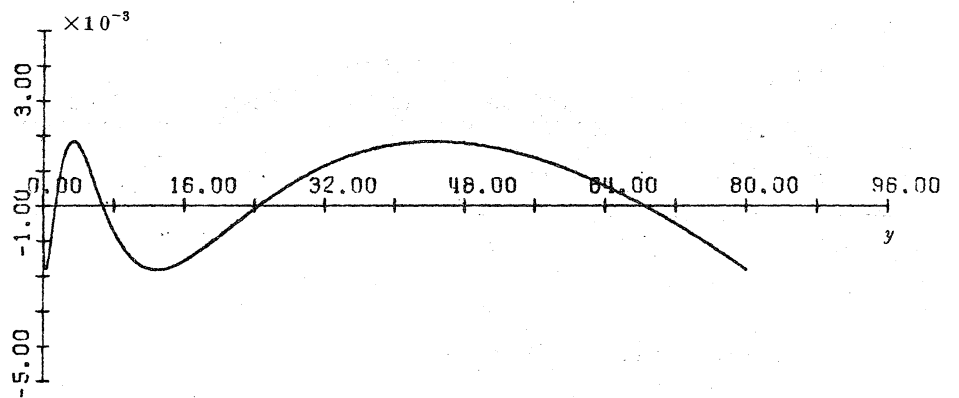
誤差曲線:

絶対誤差 ($x(P)$ - 真の x)| min-max error | : $0.178_{10^{-2}}$

(2-6)

$$0 \leq y \leq 80 \quad (0 \leq x \leq 12.48)$$

$D1 = .304518450+2$ ___
 $D2 = -.362978080+1$ ___
 $D3 = .199120870+1$ ___
 $D4 = -.287797450-4$ ___
 $Q1 = .838944440+1$ ___

絶対誤差 ($x(P)$ - 真の x)|min-max error|: $0.183 \cdot 10^{-2}$

3. 検討

$$y = -\log(4P(1-P))$$

なる山内の変換により, y の広い範囲で高精度の近似式を作ることも出来ると思うが, 一松氏のやり方のように, (8)式を直接 Newton 法で数値的に求めるプログラムの方が高精度の計算には実用的であらう. そのときの x の 1 近似を与えるには, たとえば (2-6) の近似式が x の広範囲 ($0 \leq x \leq 12.5$) にわたって役に立つと思う.

4. 文献

- 1) 一松 信 (1971) 誤差函数の逆函数の計算, 数理解析研 研究集会予稿 (1971/3/27)
- 2) 山内二郎 (1965) 正規分布の百分率表の一次有理関数近似 オも回プログラミング・シンポジウム報告集
- 3) H. Toda (1967) An Optimal Rational Approximation of Normal Deviates for Digital Computers, Bul. Electro-Tech. Lab., Vol. 31, No. 12, pp. 17~26.