

無限精度計算が切り開く応用解析・数値解析の未来

徳島大学大学院ソシオテクノサイエンス研究部 今井 仁司 (Hitoshi Imai)
Institute of Technology and Science, University of Tokushima

1. はじめに

無限精度数値計算の可能性を [26] で紹介したが、本論文では開発にいたるまでの背景とその後の計算結果をふまえてさらなる可能性を紹介する。

1980 年を過ぎた頃、修士課程の学生だった私の指導教官は河原田秀夫先生であった。河原田先生は、藤田宏先生の影響を受けて自由境界問題を研究していて、フランスとの縁が深かった。というのも、河原田先生はその少し前、自由境界問題の解析に有効なペナルティ法 [37] を考案した。それを、藤田先生とも関係深い、日仏セミナーで来日中の J. L. Lions 先生に披露した。すると、Lions 先生はそのアイディアに興味をもち、その関係で河原田先生はフランスに留学することになって Lions 学派との交流を深めることとなったからである。このような経緯から、河原田先生は、応用数学・数値解析の最先端を行くフランスの優秀な若手研究者の修士論文や博士論文あるいは INRIA レポートといった、普通では入手しづらい最新情報を入手していた。私の専らの研究は、この自由境界問題に関する文献のトレースとそこで必要になる関数解析などの基礎知識の勉強であった。

自由境界問題は、固体の融解や地下資源採掘、核融合など実用問題のほとんどが関係していると思われるくらい一般的で身近な問題であるにも関わらず、その解析は困難を極める。名前が示す通り自由境界問題では、方程式が定義される領域あるいはその境界自身が未知量となっている。そのために、たとえ方程式が線形であっても、方程式の解と境界の未知量全体に関しては非線形問題となる。非線形問題では解の存在や一意性の保証はなく、ましてや自由境界問題では方程式が成立する領域も未知であることから、その理論解析のみならず数値シミュレーションさえも容易ではない。当時河原田先生が入手した最先端を行く若手の研究論文には、自由境界問題に対して、領域摂動法 (参照領域と diffeomorphism を併用した方法) を用いた非常に数学的な逐次近似法の開発があったり、変分法を用いた解の存在の理論解析があったりした。もっとも、河原田先生のペナルティ法は理論解析にも数値計算にも使える優れもので、とくに自由境界を意識しないで固定領域で数値計算できるため、領域の位相が変わるような複雑な問題とくに流体の問題でその効力をいかに発揮する。

河原田先生が大学をかわられて、実質指導はそのままであったが、学生として在籍する研究室は流体が専門の高見頼郎先生の研究室になった。(当時の教室の都合上、同時にブラズマが専門の金子尚武先生の研究室とも関係した。) 当時の高見研究室には、その後世界を席巻することになる河村スキーム [34] をまさに開発しようとしていた河村哲也さん

よって、初めて研究者として独り立ちした喜びを感じたと同時に不満足感も感じた。というのも、状況によっては数値計算の精度が悪すぎたのである。問題1を解くには、調和共役関数 v を導入し、ホドグラフ変換を用いて未知量を写像関数にする。この写像関数の実部と虚部が次の $A(u, v)$ と $B(u, v)$ である。これに含まれている未知定数を境界上で定義された積分方程式で決定する。

$$B(u, v) = \frac{\pi}{2}v + \sum_{n=1} R_n \frac{\cosh\left(\frac{n\pi u}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi \kappa}{2}\right)} \sin\left(\frac{n\pi v}{2}\right),$$

$$A(u, v) = A_0 + \frac{\pi}{2}u + \sum_{n=1} R_n \frac{\sinh\left(\frac{n\pi u}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi \kappa}{2}\right)} \cos\left(\frac{n\pi v}{2}\right),$$

$$R_n = \frac{1}{n} \left\{ \frac{1 + (-1)^n}{2} + \cos\left(\frac{n\pi \sigma_1}{2}\right) - \cos\left(\frac{n\pi \sigma_2}{2}\right) + \cos\left(\frac{n\pi \sigma_3}{2}\right) \right\}.$$

この無限級数をよく眺めていると精度が悪い原因が浮かびあがってくる。 $u = \kappa$ のとき、無限級数が $O(1/n)$ となって収束があやしくなるのである。実際、 $A(u, v)$, $B(u, v)$ のプロファイルを図2に示すが、 $A(u, v)$ は境界で発散している。

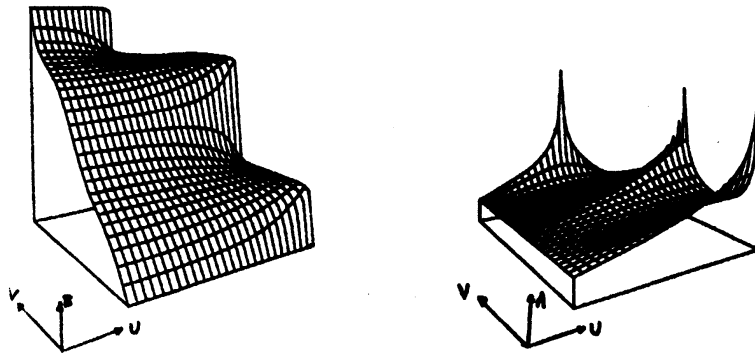


図2. $A(u, v)$, $B(u, v)$ のプロファイル.

この無限級数を有限項で切って数値計算したのでは精度が良いわけがない。これに気がつくとその対策も考えることができた。次式のように $O(1/n)$ の(発散)級数を、 $O(1/n)$ で特異的な既知関数になる部分とそれ以外の指数関数的に収束する部分に分離できることに気がついた[36]。前者は無限級数を特異的な既知関数で置き換えてしまう。

$$\begin{aligned} A(\kappa, v) - A_0 &= \frac{\pi}{2}\kappa + \sum_{n=1} \frac{\exp\left(\frac{n\pi \kappa}{2}\right) - \exp\left(-\frac{n\pi \kappa}{2}\right)}{\exp\left(\frac{n\pi \kappa}{2}\right) + \exp\left(-\frac{n\pi \kappa}{2}\right)} R_n \cos\left(\frac{n\pi v}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\kappa - \sum_{n=1} \frac{2 \exp(-n\pi \kappa)}{1 + \exp(-n\pi \kappa)} R_n \cos\left(\frac{n\pi v}{2}\right) + \sum_{n=1} R_n \cos\left(\frac{n\pi v}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{2} \kappa - \sum_{n=1} \frac{2 \exp(-n\pi\kappa)}{1 + \exp(-n\pi\kappa)} R_n \cos\left(\frac{n\pi v}{2}\right) - \log 4 - \frac{1}{2} \log s_{+0}(v) \\
&\quad - \frac{1}{2} \log s_{-4}(v) - \frac{1}{2} \log \left| \frac{s_{-1}(v)s_{+1}(v)s_{-3}(v)s_{+3}(v)}{s_{-2}(v)s_{+2}(v)} \right|
\end{aligned}$$

残った無限級数は指数関数的に収束するので、高々十項程度とるだけで十分である。これによって、数値計算は格段に高精度になった。実際、この級数の変形の前後の写像関数の積分による領域形状のプロット図を見ると違いが明らかである(図3)。領域が閉じていないといけないうのに、変形前は数値誤差のために領域が閉じていない。一方、変形後は閉じている。

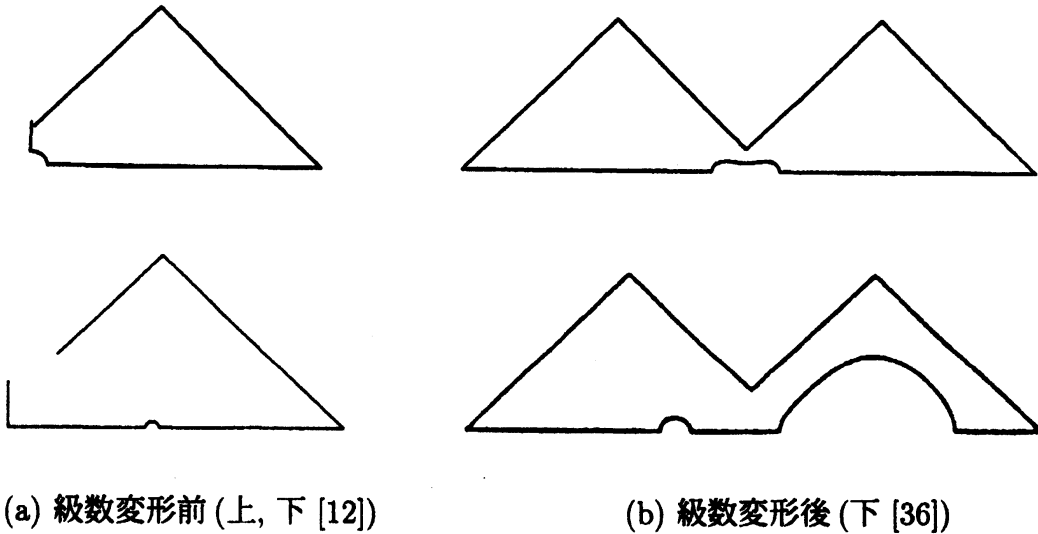


図3. 級数の変形による写像関数の精度の違い。

また、この級数変形は特異性の抽出による高精度化をもたらしたのみならず、高速化ももたらした。数値計算の向かうべきひとつの姿をここに見ることができる。

ここまでの研究成果は駆けだしの自分にとっては満足のいくものであったが、同時に研究の閉塞感も感じた。かといって全く他の研究に着手するのも大変なことである。特に当時は、乱流の直接数値計算を可能にした河村スキーム[34]が世界を席巻する様子をまのあたりにしていたので、他の研究分野に着手してもその道の優秀な研究者を追いこすような研究ができるとは到底思えなかった。いろいろ考えた末に、この問題1をテスト問題として利用する研究を行うことにした。これによって今までの成果を利用できると考えた。この方針に沿った一つの研究が次の(逆)問題であった[15]。すなわち、プラズマ形状 γ を与えたとき、それを実現するような炉壁形状を決定する問題である。これは制御の問題と関係したので、工学的に興味ある問題を提案できたと思ったのが浅はかであった。

問題2 γ と正定数 κ が与えられたとき、次をみたす $\Gamma_\kappa = \{(x, y) | u(x, y) = \kappa\}$ を求めよ。ここで、 Ω_γ は γ の外部領域を示す。

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega_\gamma^e, \quad u = 0 \quad \text{on } \gamma, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{4}{l_\gamma} \quad \text{on } \gamma.$$

プログラミングには自信があったので、早速方位角方向は差分法で、動径方向は陽的 Euler 法で数値計算してみた(図4)[15]。x 軸対称性を仮定しているのに、上半分しか表示していない。見ての通り、数値計算は全くうまくいっていない。u の等高線が外側に向かって求められているが、途中で強い振動現象を起こして意味のない計算結果になっている。ちなみに、 γ のデータは問題1のある Γ_0 に対する数値解にとっている。したがって、等高線は y 軸対称になるように外へと膨らんでいこうとするのであるが、振動現象のため途中で数値計算が破綻したのである。



図4. 問題2の数値解の等高線[15].

この計算結果を数理解析研究所の研究集会で発表したところ、磯祐介さんから「逆問題を直接数値計算するのは非常識とされているが、あえてそれを行うということは何か別の目的があるのか」といわれ、自分の勉強不足を痛感すると同時に研究者として芽生え始めていた自信を一挙に無くしてしまったのである。後から知ったことであるが、問題2は、実は、典型的な逆問題であり非適切な問題であった[40, 46, 59]。また、逆問題の直接数値計算は誤差の増大による振動現象によってすぐ破綻するというのが常識であった。にも関わらず、それを知らなかったために非常識なことをやってしまったのである。逆問題の常識は、正則化[57]を行って順問題の最適化を行うというものである。この問題の場合は、順問題が自由境界問題になるので少し複雑である。そこで、数値計算における離散化も一種の正則化とみなして、通常の正則化は考慮しない順問題の最適化(汎関数の最小化)を数値的に強引に行ってみた[49]。数値的安定性に欠けていたので、コスト関数の形をプロットすると性質の悪さを見事に反映して、谷が狭く長いものであった(図5)。その後、当時制御分野で安定性に関して注目されていたファジィ理論等をこの問題に応用するなどしていろいろと試しては見たが、数値計算結果は大した進歩もなく満足いくものではなかった[16, 18]。アルゴリズムを複雑にすると不都合に対して簡単に対応できなくなってしまったためである。無謀ではあったが図2の直接数値計算の方が単純であった。

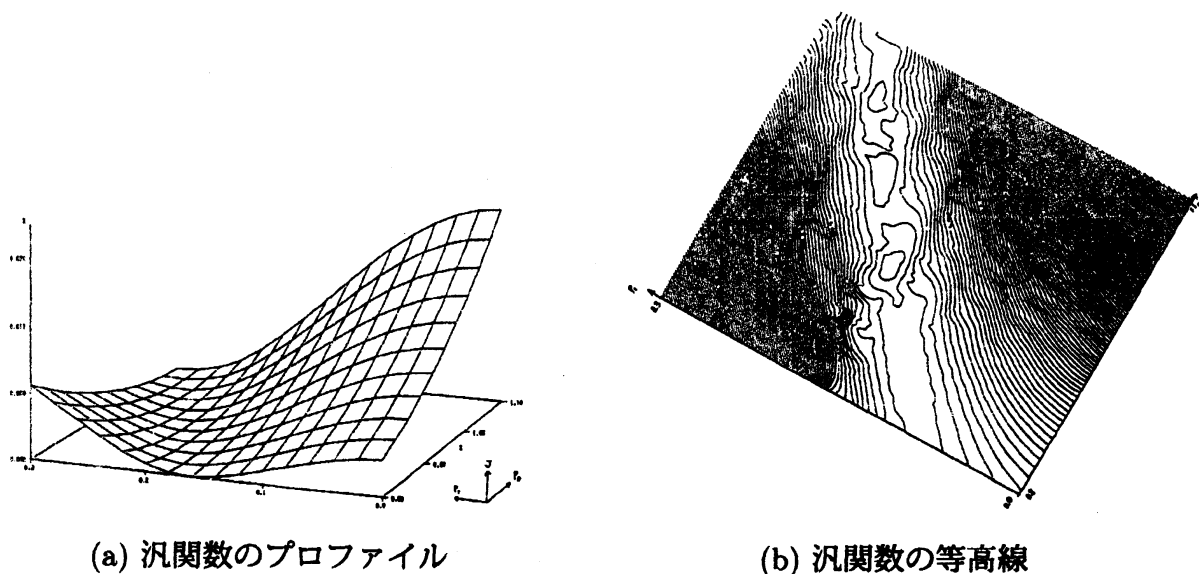


図 5. 問題 2 に関連する汎関数の例.

この頃数値計算が困難である問題に興味をもっていたので、他の分野にもないものかという関心はあった。ちょうどその頃、自由境界問題に関連して相分離に興味を持っていた河原田研究室では、恩田智彦君に異常拡散という物理現象を講演してもらった。その支配方程式は、応用数学で Cahn-Hilliard 方程式と呼ばれるものであった。拡散係数が負になる可能性があるので逆問題の一種になるのではと思い、その数値計算をやってみると確かに難しかった [35]。その直後、高階微分をもつ Cahn-Hilliard 方程式に関しては、降旗大介君が修士論文で安定に計算できる保存スキームを開発して解決してしまった。高階微分項がない Cahn-Hilliard 方程式や熱伝導方程式の拡散係数が負の場合 (熱伝導逆問題) の数値計算を様々な数値解法を用いて行ってみたが、すぐ不安定になって数値計算は破綻した [17]。

熱伝導逆問題やプラズマ逆問題の数値解の様子を見ていると、最初はそこそこうまくいっているのに、途中で微小な振動が始まるとあっという間にそれが発散している。数値誤差が拡大されて発散 (不安定) を引き起こしていることが分かる。では、逆転の発想で、数値誤差を極端に抑えたら例えそれが拡大されたとしても、数値解は必要とされる精度で得られるのではなかろうか。これが無限精度数値計算の開発の動機となった。

2. 無限精度数値シミュレーション (IPNS)

前節で紹介したように、逆問題の数値計算では、数値誤差が指数関数的に増大して振動現象が起きやすい。逆問題に対する常套手段に正則化があるが、正則化が強いと厳密解からかけ離れてしまうし、正則化を弱くするとやはり振動現象が起きてしまう。根本的に異なる手法を考える必要があると思われた。そこで逆転の発想であるが、振動現象は誤差が急速に増大して引き起こされるので、増大しても振動現象に見えないように最初の誤差を極端に小さくすればよいのではないかと考えた。ところで、数値誤差は丸め誤差と打ち切

り誤差からなる。数値誤差を極端に任意に小さくするという事は、これらをそれぞれ任意に小さくしなくてはならない。

丸め誤差を任意に小さくするには多倍長演算を用いればよい [38, 42, 45, 63]。多倍長演算に基づく数値計算を多倍長計算とよぶことにする。現在では優秀な多倍長演算用のライブラリがネット上で数多く公開されており [5, 51]、関数値を計算するような単純な多倍長計算なら、それらライブラリのユーザーに徹すれば十分こと足りる。ただし、多倍長計算は膨大な計算時間とメモリ空間を必要とする。以前の多倍長計算といえば、円周率の計算に代表されるように、ほとんどがスカラーについてのものであった。ところが、最近の計算機性能の発展は目を見はるものがあり、現在の性能では無理な計算でも数年後には可能になっていることも多い。このことを考えると、多倍長計算は決して趣味のものではないと考えた。多倍長計算はとにかく今後の計算機のさらなる性能向上を最も期待する分野である [23]。例えば、近年、計算機で行われる丸めを厳密に考慮することで、厳密解が入るべき区間を特定する「精度保証付き数値計算」が実用的になってきた [43, 44]。これと多倍長演算を併用すると解の存在区間を極端に小さくできる [30]。

丸め誤差は、計算機のアーキテクチャから生じているもので、有効数字の桁数に関して「無限」を「有限」としたことによって生じた。計算機が原理的に無限の情報量を扱えないためである。一方、微分方程式や積分方程式の数値計算では、さらにもう一つの「無限」を考えなくてはならない。それは、方程式の解が無限次元の関数空間に属しているということである。この次元に関して、「無限」を「有限」にすることを離散化といい、離散化によって生じる誤差を打ち切り誤差という。打ち切り誤差を任意に小さくするには、任意次数を実現する離散化近似を用いる必要がある。離散化手法の中にスペクトル法と呼ばれるものがある [1, 4, 9, 58, 62]。スペクトル法は、有り体にいえば直交関数展開のことであるが、近似の次数に関して非常に興味深い性質を持っている。周期的な境界条件が課せられている問題に対しては三角関数を用いる。そうでない問題に対しては Legendre 多項式や Chebyshev 多項式などを用いるが、後者が次の意味で便利である。Chebyshev 多項式に対しては、Chebyshev-Gauss-Lobatto 選点や Chebyshev-Gauss 選点などの特殊な点が知られている [1]。例えば、Chebyshev-Gauss-Lobatto 選点というのは、 N を正整数として、 $x_l = \cos(l\pi/N)$, $l = 0, 1, \dots, N$ 。このように解析的にわかっていると、この数値計算は多倍長計算でいくらでも精度良くできる。もし、関数が N 次式であれば、この $(N+1)$ 個の選点上の関数値さえわかれば関数を完全に再現できる。即ち、Chebyshev 多項式による展開係数と選点上の関数値との間には反転公式が存在する。つまり、選点の個数が変わると近似の次数が自動的に変わるという特徴を持っているので、我々が望んでいた任意次数の近似を容易に実現する離散化手法である。ここでは、スペクトル法の中でも、非線形問題に容易に適用可能なスペクトル選点法 (SCM) をとりあげる。選点上の関数値を未知とするスペクトル法を SCM という。SCM は、選点を中心のデルタ関数を重み関数とする重さ付き残差法と見ることができる [4, 62]。Chebyshev 多項式を用いた SCM では、選点上の導関数値は、例えば、 $u'(x_l) = \sum_{j=0}^N (D_x)_{l,j} u_j$, $u''(x_l) = \sum_{j=0}^N (D_{xx})_{l,j} u_j$ 。ここで x_l は先の選点で $u_j = u(x_j)$ である。 D_x , D_{xx} は微分係数行列と呼ばれる定数行列で、 $(\cdot)_{l,j}$ は (l, j) 成分を表す。もちろんこの成分は解析的に知られている [1]。これより、微分方程式への SCM の適用法は差分法と同様であることがわかる。

SCM は、選点が1つ増えると打ち切り誤差が1,2桁小さくなるような、桁違いの誤差の減少スピードを誇る。これをスペクトル精度という [62]。倍精度計算ではあつというまに打ち切り誤差が丸め誤差より小さくなるので、その特長を生かすことはできない。そこで、丸めの影響を排除するために多倍長演算の併用は不可欠となる。また、これによって打ち切り誤差と丸め誤差を任意に小さくできることになる。このような任意次数を容易に実現する離散化法と多倍長演算を併用した数値シミュレーションを、我々は無限精度数値シミュレーション (IPNS, Infinite-Precision Numerical Simulation) とよんだ [20]。上にも書いたように、IPNS は多倍長演算を用いるために膨大な計算資源を要求する。空間3次元、時間を入れて4次元のシミュレーションを行うには、まだ20年ほど計算機性能の発展を待たなくてはならない。

無限精度、任意精度が実現することを次の簡単な1次元問題で確認する。

問題3 次をみたす $u(x)$ を求めよ。

$$u_{xx} = -\frac{\pi^2}{16} \sin \frac{(x+1)\pi}{4} \quad \text{in } -1 < x < 1, \quad u(-1) = u_x(1) = 0.$$

この問題の厳密解は $u(x) = \sin((x+1)\pi/4)$ である。IPNS の計算結果を下に示す。計算には、Dual Core の Opteron Dual CPU の計算機を用いた。メモリ容量は16GBである。多倍長演算用のライブラリ exflib[5] を用いて7000桁で計算した。表の*のデータは、さらなる計算機資源を必要としたので、同様の計算機を5台ギガビットネットワーク接続してメモリ総容量が96GBになる計算機クラスターで求めた。表にはのせていないが、 $N = 10$ で倍精度限界に近い 10^{-10} 程度の誤差に到達する [26]。スペクトル法の特徴をいかすには多倍長演算が必要であることが容易にわかる。また、計算誤差を任意に小さくできることもわかる。差分法で計算したときの誤差が200個の格子点を用いて 10^{-6} 程度である [26] ことを考えると、究極の計算結果であるといっても過言ではない。

表 1. 最大誤差 (IPNS, 7000 桁 (*11000 桁))。

N	最大誤差	N	最大誤差
100	6.01×10^{-199}	600	4.78×10^{-1652}
200	1.82×10^{-456}	1000	6.33×10^{-2974}
300	1.20×10^{-736}	1200	2.60×10^{-3663}
400	1.46×10^{-1031}	1500	5.67×10^{-4724}
500	1.95×10^{-1337}	2000	8.82×10^{-6548}
		3100*	7.57×10^{-10738}

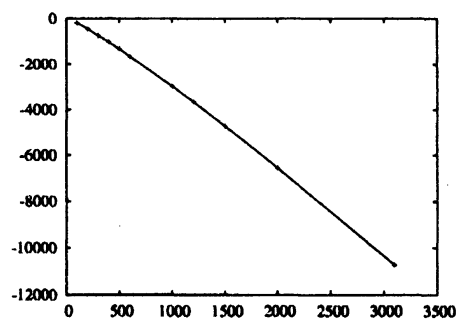


図 6. 最大誤差 (IPNS)。

3. 応用例とその周辺

ここでは IPNS による興味深い計算例とその周辺を紹介する。

3.1 第1種積分方程式の直接数値計算

逆問題の典型的な例が、次の Fredholm 型の第1種積分方程式である [6].

問題4 次をみたす $u(y)$ を求めよ.

$$\int_0^1 e^{xy} u(y) dy = f(x), \quad f(x) = \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2}, \quad f(0) = \frac{1}{2}.$$

この問題の厳密解は $u(y) = y$ である. 第1種積分方程式の数値計算が困難であることは教科書的な話であって、常套手段である正則化 [57] を適用したとしても、数値解から厳密解を想像できる保証はない [7]. 数値計算するときは多倍長計算が必要であると指摘されていた [6] が、離散化手法の吟味も重要になる. 簡単な離散化法として台形法を適用した数値計算結果を図7に示す. 縦軸のスケールが異なっているのでわかりづらいが、(a) と (b) の縦軸を同じスケールにして比較すると実は2つのグラフの立ち上がり具合は同じになっている. 即ち、この部分は丸め誤差の影響はなく、打ち切り誤差が指数関数的に増大していることがわかる. 一方、グラフの右の方では丸め誤差の影響が見られる. とにかく、数値計算は全く失敗している.

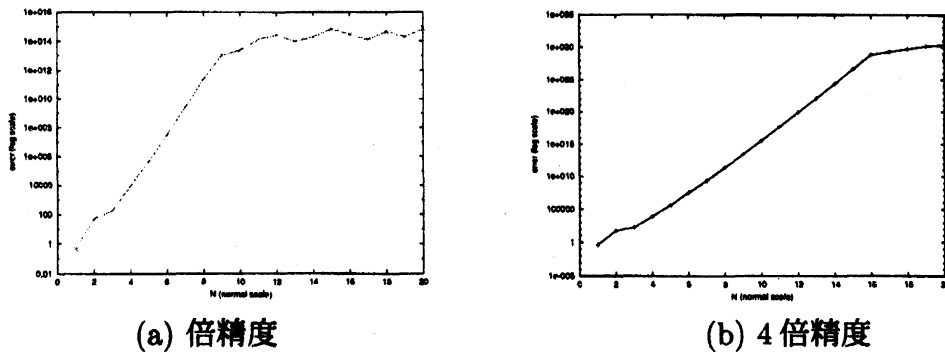


図7. 台形法用いたときの最大誤差.

そこでIPNSを適用する. IPNSとしては、SCMとしてChebyshev-Gauss-Lobatto法を用い、多倍長演算ライブラリはFMLIB[51]を用いた. まず、被積分関数にSCMを適用した例を次に示す. 数値計算が不可能と思われていた問題4が解けている. このときの離散化と解の再構成は少し複雑である [22, 24] のでここでは省略する.

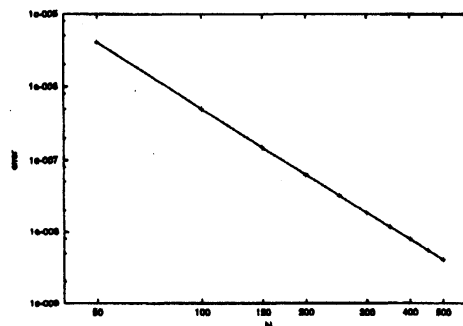


図8. 被積分関数にSCMを適用したIPNSの最大誤差 (2000桁)[24].

とにかく、逆問題の直接数値シミュレーションが一部の問題とはいえ可能になったことは意味は大きい。数値実験が進むと理論の発展も期待されるからである。実際、問題4に関しては、理論的に興味深い現象が数値計算から得られている [24]。図8の誤差の減少は $O(N^{-2})$ でとても遅いが、解 u を SCM で離散化すると誤差が指数関数的に減少するスペクトル精度が得られることがわかった [8]。また、このように様々な離散化法で精度が全く異なるにも関わらず、得られた連立一次方程式の条件数はそれ程かわらず、その性質は Hilbert 行列よりはるかに悪いという計算結果が得られた (図9)[48]。

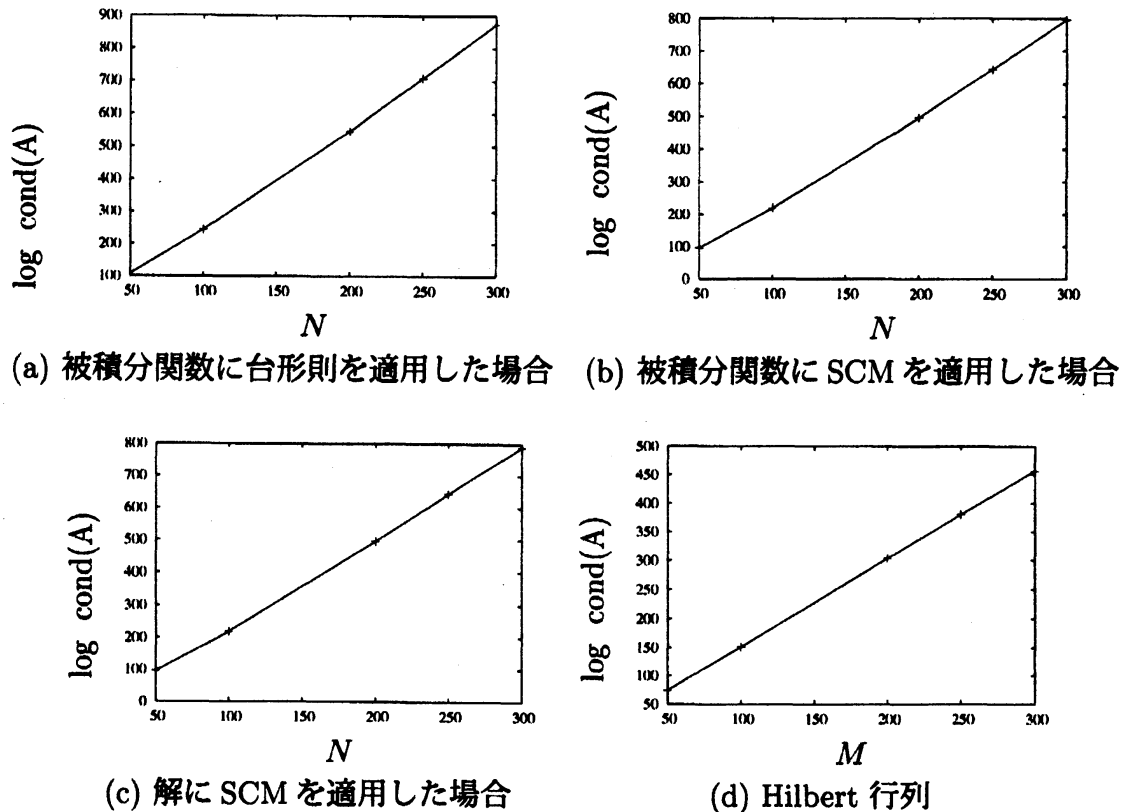


図9. 各種離散化と条件数 (2000 桁).

3.2 ラプラス作用素の Cauchy 問題 [52]

IPNS の動機となったプラズマ逆問題に近い、次の典型的な非適切問題である楕円型作用素の Cauchy 問題を考えた。

問題5 次をみたす $u(x, y)$ を求めよ。

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= \sinh(2\pi y), & 0 < x < 1, & 0 < y < 1, \\ u(0, y) &= 0, & 0 \leq y < 1, \\ u(1, y) &= 0, & 0 \leq y < 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, & 0 < x < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) &= g_\varepsilon(x), & 0 < x < 1. \end{aligned}$$

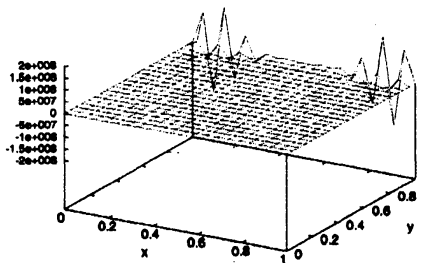
ここで

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x \leq \frac{\varepsilon}{2}, \\ \frac{1}{2\pi} \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{x - \frac{\varepsilon}{2}}{1 - \varepsilon} \right) \right) & , \frac{\varepsilon}{2} < x < 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \\ 0 & , 1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

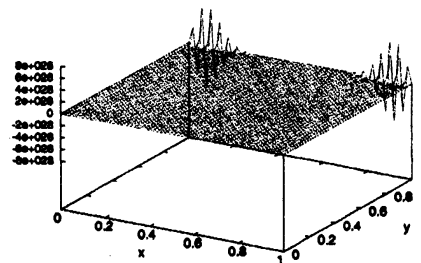
$\varepsilon = 0$ のときは次の厳密解が存在する

$$u(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} (1 - \cos(2\pi x)) \sinh(2\pi y)$$

厳密解が存在する $\varepsilon = 0$ の数値計算結果を次に示す. 差分法 (N は x, y 方向の分割数) は数値解が発散する傾向にある. 差分法はこの計算には向いていない. 一方, IPNS (N は x, y 方向の近似の次数) を適用したところ数値解が厳密解に指数関数的に収束している. ここで, IPNS としては, SCM として Chebyshev-Gauss-Lobatto 法を用い, 多倍長演算ライブラリは FMLIB[51] を用いた. IPNS では SCM の適用のために x, y 方向を $[-1, 1]$ にアフィン変換した同値な問題を解いているため, 図の軸の目盛りが異なっていることに注意する.

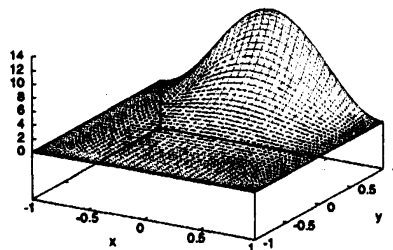


(a-1) $N = 20$

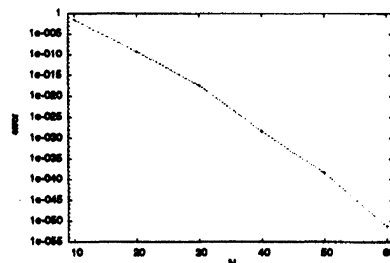


(a-2) $N = 50$

(a) 差分法



(b-1) $N = 50$



(b-2) 最大誤差

(b) IPNS

図 10. $\varepsilon = 0$ のときの数値解のプロファイルと最大誤差 (120 桁).

$\varepsilon = 0.0001$ の場合の計算結果を次に示す。差分法の結果は省略する。IPNS の数値解が発散傾向を示している。これは、経験的には、解が存在しないことを示唆していると考えられる。

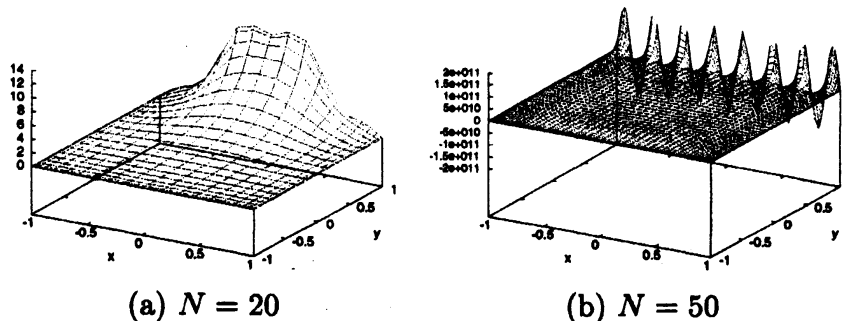


図 11. IPNS による $\varepsilon = 0.0001$ のときの数値解のプロファイル (120 桁).

3.3 熱伝導順問題 [29]

解析接続は基本的で教科書的なものである。この解析接続に関する実用的な応用例が逆問題に関連して研究されてきた [11, 59]。そこでは、ラプラス方程式のコーシー問題の解の接続が考えられている。そこで、[29] では熱伝導問題に対する解の接続問題とそれに関連した次の問題を取りあげた。2つのパラメータ T と ε を含んでいる。

問題 6 2つのパラメータ $T \in [-1, 1]$ と ε に対して、次を満たす $u(t, x)$ を求めよ。

$$\begin{aligned}
 u_t(t, x) &= u_{xx}(t, x), & -1 < t < 1, \quad -1 < x < 1, \\
 u(0, x) &= \cos \frac{\pi}{2} x, & -1 < x < 1, \\
 u(t, -1) &= 0, \quad u(t, 1) = f(t) & -1 \leq t < T, \\
 u_t(t, \pm 1) &= u_{xx}(t, \pm 1), & T \leq t < 1.
 \end{aligned}$$

ここで、 $f(t) = \varepsilon(t+1)$ とする。

注意 問題 6 は T の値によって様々な問題になる。

$$\begin{cases} T = 1 & \dots & \text{初期境界値問題,} \\ -1 < T < 1 & \dots & \text{解の接続問題,} \\ T = -1 & \dots & \text{初期値問題.} \end{cases}$$

$T = 1, \varepsilon = 0$ のときの問題 6 の厳密解は、

$$u(t, x) = \exp\left(-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2(t+1)\right) \cos \frac{\pi}{2} x.$$

$T = -1$ とすると熱伝導方程式の初期値問題となり、解の一意性は成り立たない [32]。この問題の数値実験は、熱伝導方程式の初期値問題の一意性に関する数値実験といえるし、

解の接続に関する数値実験ともいえる。また、 ε は解の解析性に関するパラメータである。 $\varepsilon = 0$ のときは、 T の値にかかわらず上の関数が、時空間大域的な解析的関数で問題の解になる。

数値計算は、IPNSと単純な離散化法(FDM $\oplus$ EE)(空間:2次差分法, 時間:1次陽的オイラー法)の2種類で行った。IPNSでは、任意次数近似離散化法にSCMを用い、多倍長演算ライブラリはコンパクトで高速なexflib[5]を用いた。SCMとしてChebyshev-Gauss-Lobatto法を用いた。SCMにおいて、時間方向、空間方向の近似次数をそれぞれ N_t , N_x で表す。数値計算では簡単のために $N = N_t = N_x$ とした。FDM $\oplus$ EEでは、安定性を考慮して、空間方向の分割数を N_x としたとき、 $\Delta x = 2/N_x$, $\Delta t = 0.2(\Delta x)^2$ とした。

まず、通常の初期境界値問題($T = 1$)の場合の数値計算を行った。このときは、連続的な解は一意的に存在する[32]。さらに、 $\varepsilon = 0$ ではそれは $\tilde{u}(t, x)$ に他ならない。 $\varepsilon = 0$ としたときの計算例を図12に示す。FDM $\oplus$ EEでもIPNSでも期待通りの結果が出ている。FDM $\oplus$ EEが2次収束するのは、 $\Delta t = 0.2(\Delta x)^2$ であるので、EEの精度がFDMの次数に対応するためである。

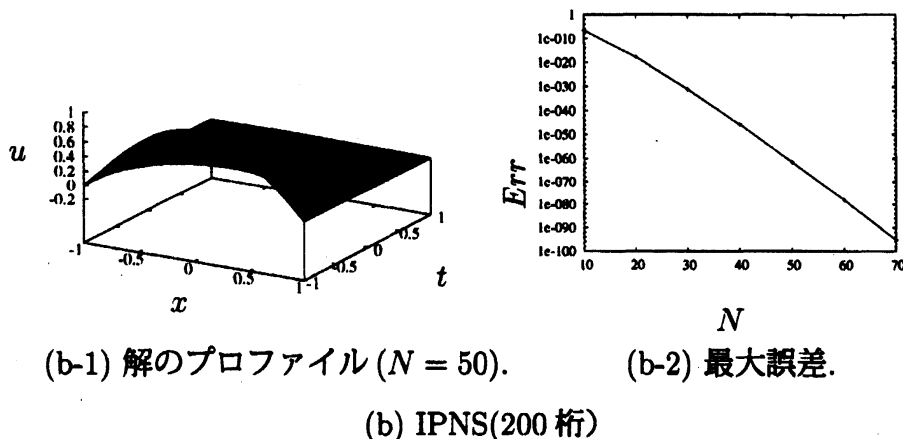
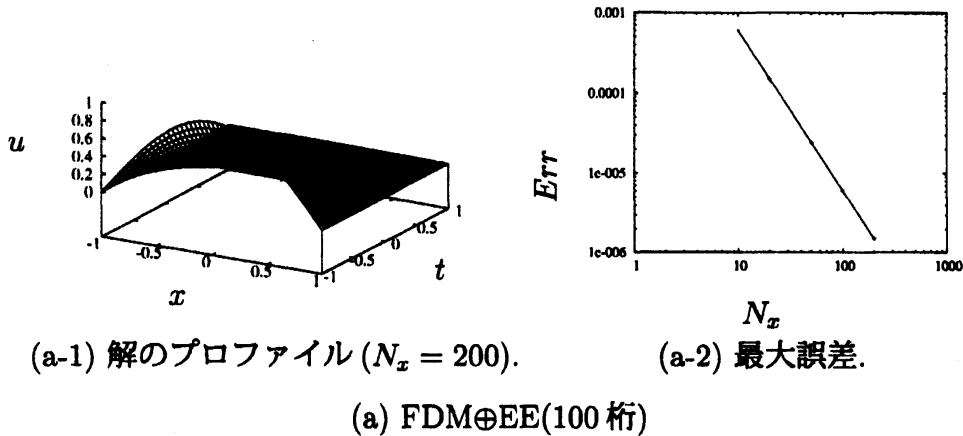


図12. 数値解のプロファイルと最大誤差 ($T = 1$, $\varepsilon = 0$).

$\varepsilon \neq 0$ のときは厳密解の形はよくわからないが、計算は安定に問題なく実行できた。

つぎに、初期値問題($T = -1$)の数値計算を行う。問題の解の一意的性はない[32]。この場合、 ε は意味をなさなくなる。計算結果を図13に示す。図13(b)をみるとSCMを使う

ときには多倍長演算が必要であることがわかる。この現象は実は IPNS の動機を示している。解の一意性がない初期値問題に対して数値解は収束傾向を示している。解析的関数が解になっているので、数値解法が正則な関数即ち解析関数を解としてとらえにいったものと考えられる [28].

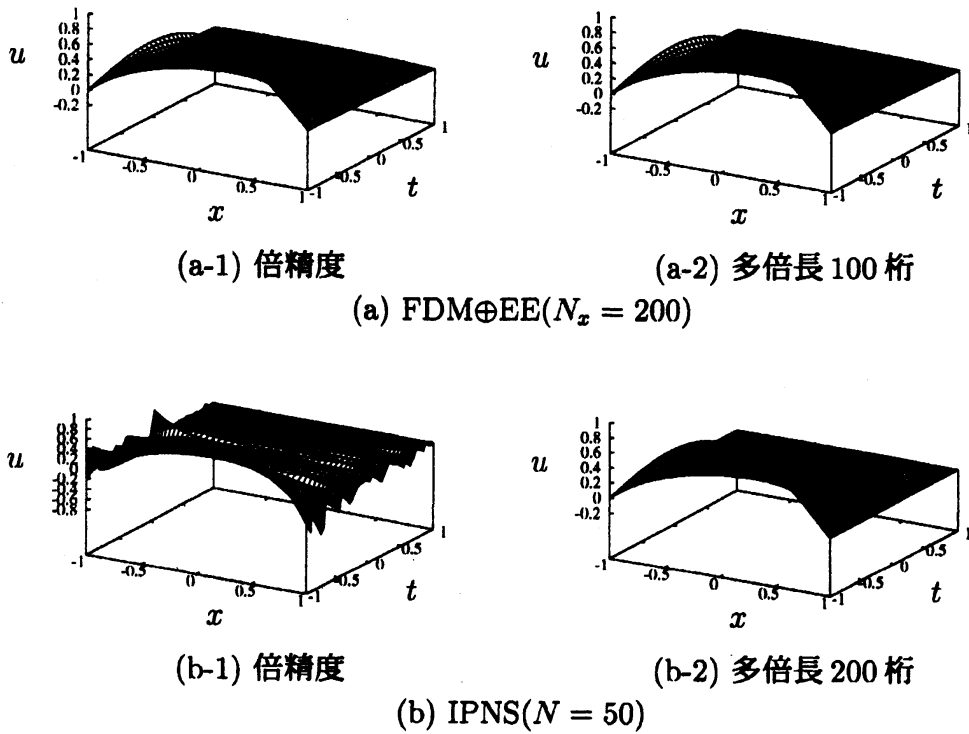
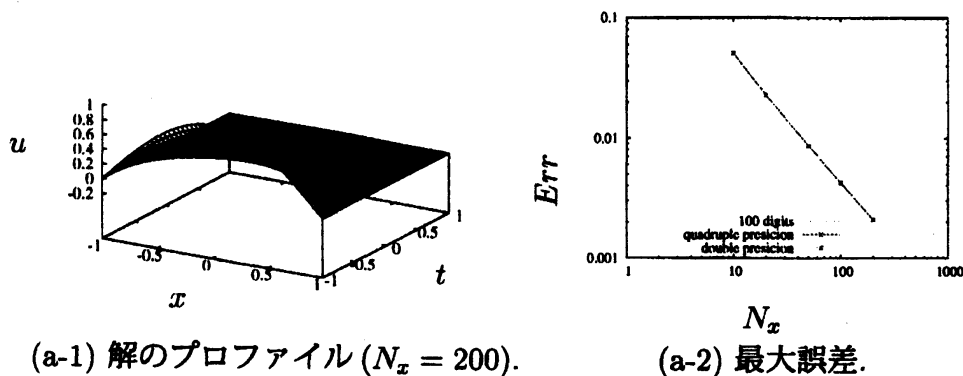
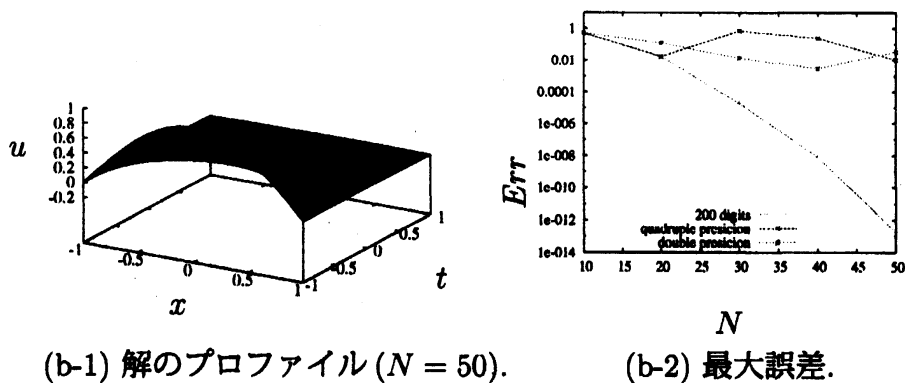


図 13. 数値解のプロファイル ($T = -1$).

解の接続問題 ($T = 0$) を考える。 $\varepsilon = 0$ のときの計算を図 14 に示す。解の一意性はわからないものの、時空間大域的解析的関数 $\tilde{u}(t, x)$ が解になるので、数値解は $\tilde{u}(t, x)$ に収束していることがわかる。

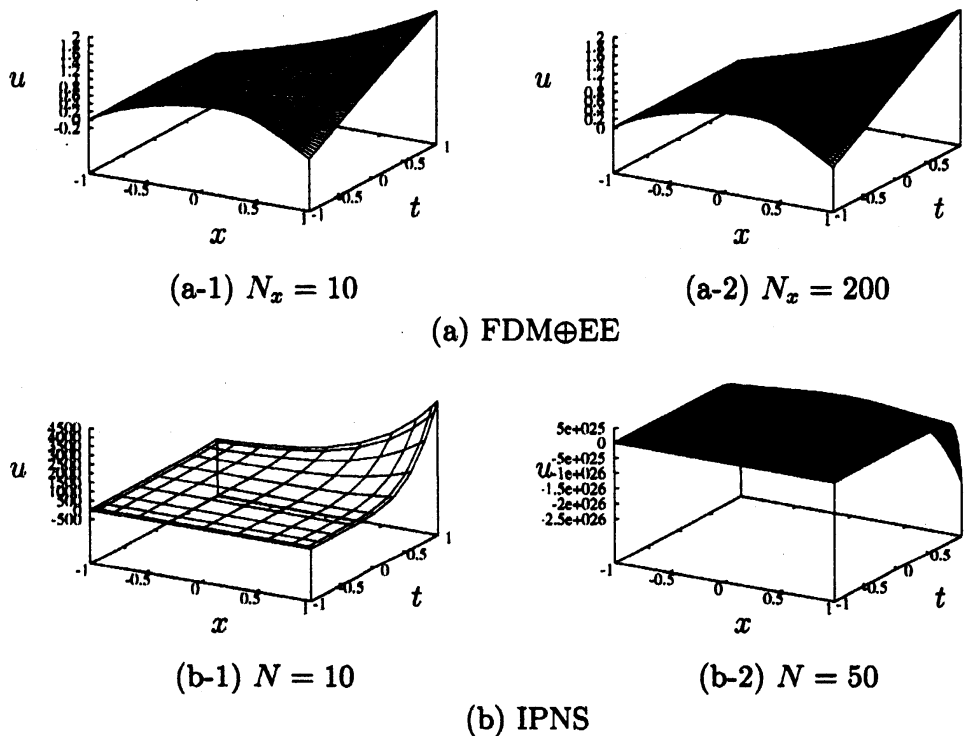




(b) IPNS(200 桁)

図 14. 数値解のプロファイルと最大誤差 ($T = 0, \varepsilon = 0$).

$\varepsilon \neq 0$ のときの数値計算結果を図 15 に示す。FDM $\oplus$ EE は数値解が収束しているように見えるが、IPNS は振動をおこして収束しない。我々の経験では、IPNS が収束しないときは解が存在しないことを示唆するのであるが、これに関する解析は今後の課題である。

図 15. 数値解のプロファイル ($T = 0, \varepsilon = 1, 200$ 桁).

3.4 熱伝導逆問題 [30]

[30] では熱伝導逆問題に対する解の接続問題とそれに関連した次の問題を取りあげた。2つのパラメータ T と ε を含んでいる。

問題7 2つのパラメータ $T \in [-1, 1]$ と ε に対して, 次を満たす $u(t, x)$ を求めよ.

$$u_t = -u_{xx}, \quad -1 < t < 1, \quad -1 < x < 1, \quad (1)$$

$$u(0, x) = \cos \frac{\pi}{2} x, \quad -1 < x < 1, \quad (2)$$

$$u(t, -1) = 0, \quad -1 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(t, 1) = \varepsilon(t+1), \quad -1 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$u_t(t, \pm 1) = -u_{xx}(t, \pm 1), \quad T < t < 1. \quad (5)$$

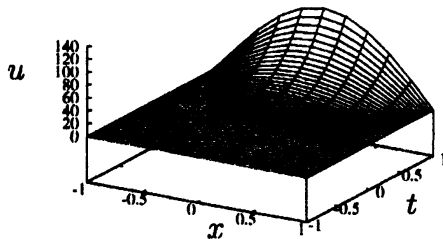
注意 問題7はパラメータ T の値によって様々な問題になる.

$$\begin{cases} T = 1 & \dots \text{初期値境界値問題,} \\ -1 < T < 1 & \dots \text{解の接続問題,} \\ T = -1 & \dots \text{初期値問題.} \end{cases}$$

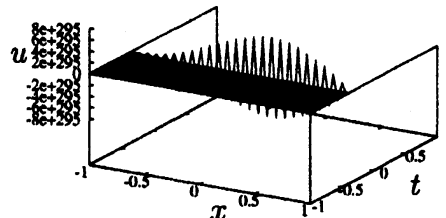
問題7の $T = 1, \varepsilon = 0$ のときの厳密解は次で与えられる.

$$u(t, x) = \exp\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2(t+1)\right) \cos \frac{\pi}{2} x \quad (6)$$

我々は, 方程式(1)に対して直接数値計算を行ってきた[19, 53, 54]. 数値誤差が指数関数的に増加するため, 簡単な離散化法では安定に数値計算できない. 図16は, 2つの手法 FDM $\oplus$ EE(空間: 2次差分法, 時間: 1次陽的オイラー法) と 3.3 と同様の IPNS における $T = 1, \varepsilon = 0$ のときの問題6の数値計算結果である. IPNS が安定に計算できていることがわかる.

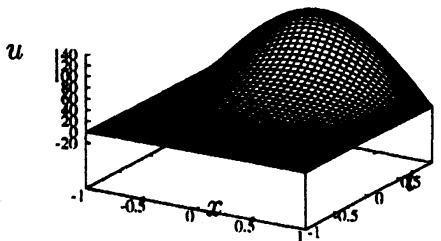


(a-1) $N_x = 10$

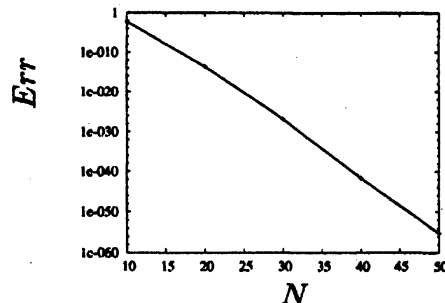


(a-2) $N_x = 50$

(a) 数値解のプロファイル (FDM $\oplus$ EE)



(b-1) $N = 50$



(b-2) 最大誤差

(b) 数値解のプロファイルと誤差 (IPNS)

図16. 数値計算結果 ($T = 1, \varepsilon = 0, 200\text{digits}$).

FDM $\oplus$ EEは不安定で全く役に立たないので、その計算結果は省略する。

$\varepsilon \neq 0$ のときには解が存在するかどうか不明である。次の図では $T = 1$, $\varepsilon = 10^{-10}$ の IPNS の計算結果を示す。数値解が収束しないで振動を始めている。経験的には、これは発散傾向にある。実際、ここでは省略しているが大きい ε では明らかに解が発散傾向にある [30]。多分 $\varepsilon \neq 0$ であれば同様の結果になると思われる。 $T = 0, -1$ のときの数値解も同様の振る舞いをする。この結果は解の非存在を示唆するものである。

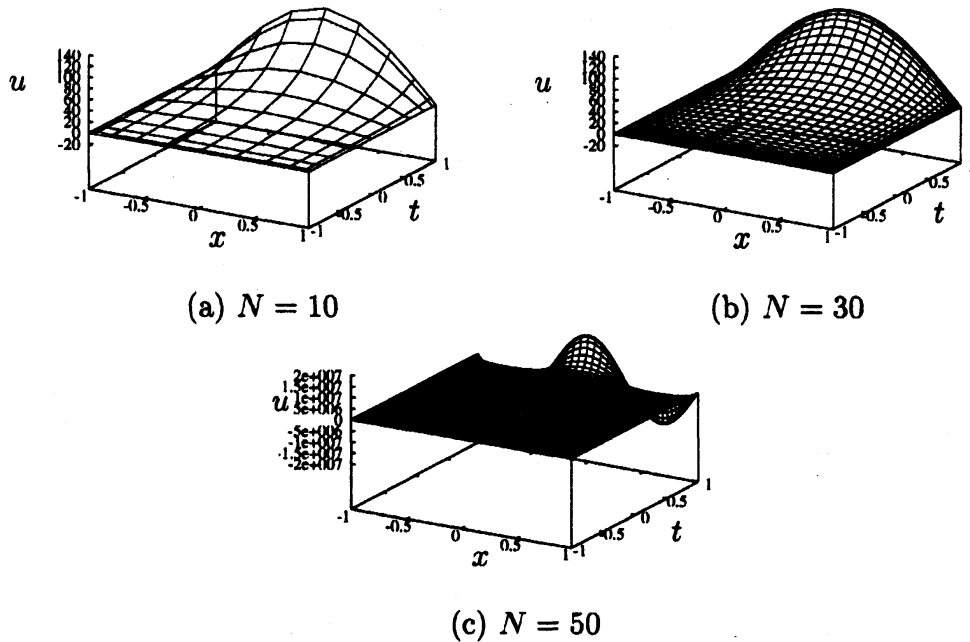


図 17. 数値解のプロファイル ($\varepsilon = 10^{-10}$, IPNS, $T = 1$, 200digits).

我々は、当初、数値解が収束しない理由が $(t, x) = (-1, 1)$ において $u_t \neq -u_{xx}$ にあると考えた。そこで、境界条件 (4) を $u_t \neq -u_{xx}$ を満たすもので置き換えた。しかしながら、計算結果は同様であった。これによって、当初の我々の考えが間違っていたことが判明したと同時に、より高度に数学的な理由があると考えられる。その理由は解の解析性と解の存在の関連に関連していると思われる。実際、いくつかの問題では、解の存在は解の解析性を意味する。解が解析的ならば、IPNS はとても精度よくそれをとらえることができる。もし、このような状況の数値計算を行っているとするれば、数値解が収束しないという計算結果は解の非存在を示していることになる。解の非存在の証明は解の存在証明より一般に難しいといわれているが、我々の数値解法である IPNS は解の非存在の証明に役立つ可能性があることがわかった。

$T = 0, \varepsilon = 0$ の場合、問題 7 は解の接続問題になる。問題 7 の $T = 1, \varepsilon = 0$ のときの厳密解 (6) がこの場合の厳密解になる。ただし、解の一意性が成立するかどうかはわからない。数値計算結果を図 18 に示す。数値解は問題 7 の $T = 1, \varepsilon = 0$ のときの厳密解 (6) に収束している。即ち、IPNS は一つの解析関数を厳密解としてとらえることに成功している。解が複数存在するとき、数値解法は最も滑らかな解を選択する傾向がある [28]。今の

場合、解析関数 (6) が最も滑らかな解であるので、解の一意性がこの問題において保証されていなくても、IPNS は解として (6) をとらえたと考えられる。

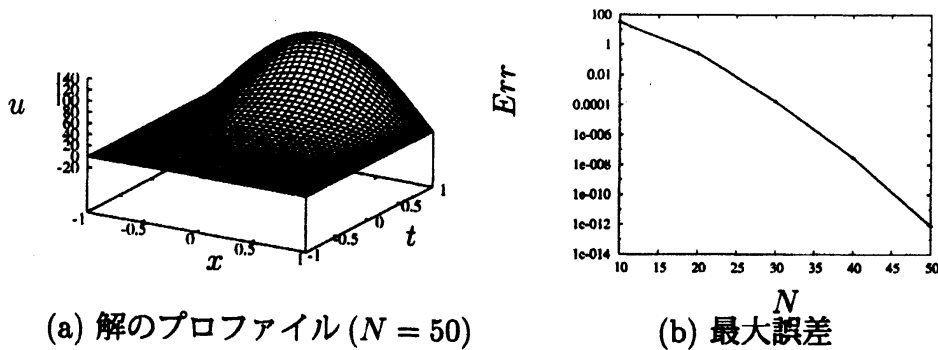


図 18. 数値解のプロファイルと誤差 (IPNS, $T = 0$, $\varepsilon = 0$, 200digits).

$T = -1$ の場合、問題 7 は初期値問題になり、 $T = 1$, $\varepsilon = 0$ のときと同様に厳密解 (6) が存在する。方程式が通常の熱伝導方程式であれば、解の非一意性はよく知られた事実である [32]。しかしながら、今の熱伝導逆問題の場合に解が一意であるかどうかはわからない。数値計算結果を図 19 に示す。数値解は厳密解 (6) に収束している。IPNS 法が上と同じ理由で、一つの解析関数を厳密解としてとらえることに成功している。

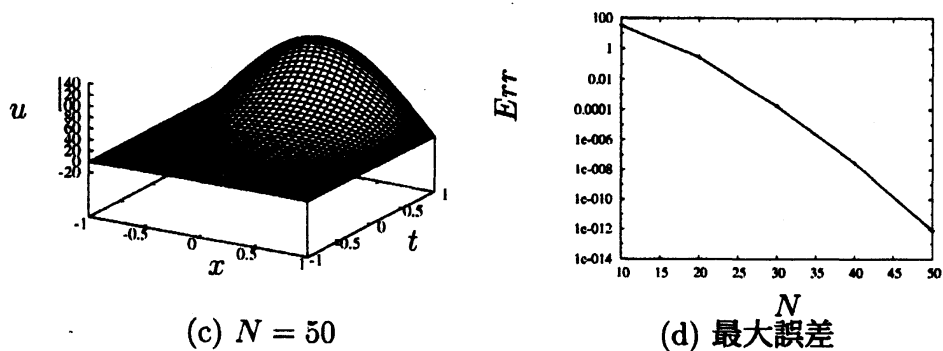


図 19. 数値解のプロファイルと誤差 (IPNS, $T = -1$, 200digits).

3.5 その他の計算手法の開発

IPNS をやっているとき微妙なことが見過ごせなくなる。極座標変換に伴う擬似特異性の出現も気になる問題である。格子点 (選点) を用いる数値解法では、格子点 (選点) の配置を工夫することで特異性を回避できる。スペクトル・ガレルキン法においては級数を制限するという特異性の回避法が提案されているが [31, 39, 60, 61]、非線形項の処理や境界条件の処理に手間がかかる。この特異性ができれば除去できればそれにこしたことはない。そこでこの特異性を除去することを考えた [25, 28]。応用では 2 階までの偏微分がよく使われるので、ここでは 2 階までの偏微分に対する特異性回避公式を紹介する。もとの極座

標変換の公式は次であり原点 $r = 0$ で特異性が見られる.

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y) &= \cos \theta u_r(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} u_\theta(r, \theta) \\
 u_y(x, y) &= \sin \theta u_r(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} u_\theta(r, \theta) \\
 u_{xx}(x, y) &= \cos^2 \theta u_{rr}(r, \theta) - \frac{\sin 2\theta}{r^2} (r u_{r\theta}(r, \theta) - u_\theta(r, \theta)) + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} (u_{\theta\theta}(r, \theta) + r u_r(r, \theta)) \\
 u_{xy}(x, y) &= \frac{\sin 2\theta}{2} \left\{ u_{rr}(r, \theta) - \frac{1}{r^2} (u_{\theta\theta}(r, \theta) + r u_r(r, \theta)) \right\} + \frac{\cos 2\theta}{r^2} (r u_{r\theta}(r, \theta) - u_\theta(r, \theta)) \\
 u_{yy}(x, y) &= \sin^2 \theta u_{rr}(r, \theta) + \frac{\sin 2\theta}{r^2} (r u_{r\theta}(r, \theta) - u_\theta(r, \theta)) + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} (u_{\theta\theta}(r, \theta) + r u_r(r, \theta))
 \end{aligned}$$

上の公式における $r = 0$ での特異性を除去した式が次である. ここで, 左辺の例えば $u_x(0, \theta)$ とは, 極座標平面の $(r, \theta) = (0, \theta)$ における $u_x(x, y)$ の値を示す. $r \neq 0$ では上の公式をそのまま使えばよい.

$$\begin{aligned}
 u_x(0, \theta) &= \cos \theta u_r(0, \theta) - \sin \theta u_{r\theta}(0, \theta) \\
 u_y(0, \theta) &= \sin \theta u_r(0, \theta) + \cos \theta u_{r\theta}(0, \theta) \\
 u_{xx}(0, \theta) &= u_{rr}(0, \theta) - \frac{1}{2} \sin 2\theta u_{rr\theta}(0, \theta) + \frac{1}{2} \sin^2 \theta u_{rr\theta\theta}(0, \theta) \\
 u_{xy}(0, \theta) &= \frac{1}{2} \cos 2\theta u_{rr\theta}(0, \theta) - \frac{1}{4} \sin 2\theta u_{rr\theta\theta}(0, \theta) \\
 u_{yy}(0, \theta) &= u_{rr}(0, \theta) + \frac{1}{2} \sin 2\theta u_{rr\theta}(0, \theta) + \frac{1}{2} \cos^2 \theta u_{rr\theta\theta}(0, \theta)
 \end{aligned}$$

3.3 で紹介した熱伝導逆問題に関して, 時間大域的な数値計算も IPNS で試みた. このときには解が非有界になるという困難が伴う. そこで, 有界化 [27, 28] というテクニックを開発し大域計算を実行した [53, 54, 64]. この過程で方形波を解析関数で近似する簡単な手法が見つかった. 熱伝導逆問題の厳密解

$$u(x, t) = \exp \frac{\pi^2 t}{4} \cos \frac{\pi x}{2}, \quad 0 \leq t, \quad -1 \leq x \leq 1$$

に対して, 時間変数 t を $t = \frac{\tilde{s}}{1 - \tilde{s}^2}$ で有理化して, 得られた関数 $\tilde{u}(x, \tilde{s}) = \tilde{u}(x, \tilde{s}(t)) = u(x, t)$ を $\tilde{u} = \frac{\tilde{v}}{1 - \tilde{v}^2}$ で有界化する.

$$\tilde{v}(x, \tilde{s}) = \frac{2e^{\frac{\pi^2}{4} \frac{\tilde{s}}{1 - \tilde{s}^2}} \cos \frac{\pi x}{2}}{1 + \sqrt{1 + 4e^{\frac{\pi^2}{2} \frac{\tilde{s}}{1 - \tilde{s}^2}} \cos^2 \frac{\pi x}{2}}}, \quad 0 \leq \tilde{s} < 1, \quad -1 \leq x \leq 1$$

すると, $\tilde{v}$ は $0 \leq \tilde{s} < 1$ のとき, 方形波を近似する解析関数となっている (図 20).

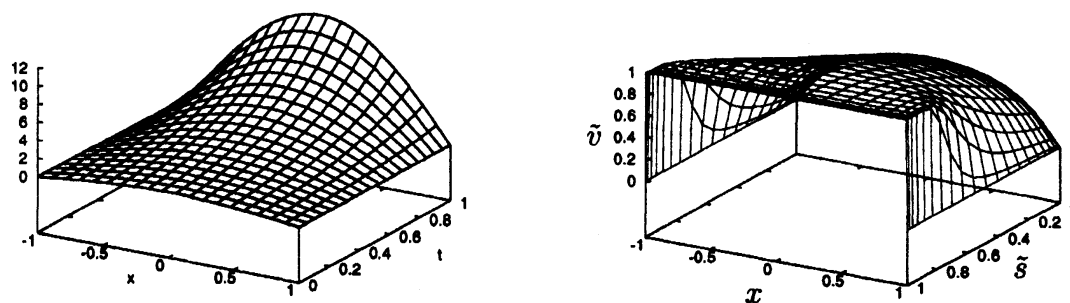
(a) 有界化前 ($u(x, t)$)(b) 有界化後 ($\tilde{v}(x, \tilde{s})$)

図 20. 有界化による方形波の解析近似.

振動的な関数 $f(x)$ に非有界な指数関数 ($e^{\lambda t}$, $\lambda > 0$ のようなもの) をかけて得られる関数
をこの手続きで有界化すれば, $f(x)$ の 0 点を不連続点にもつ方形波のオーバーシュート
のない解析近似ができあがる.

その他にも, 写像関数を用いた固定領域法によって, 1次元の自由境界問題の IPNS が実
現できた [21, 55]. 1次元自由境界問題のアトラクターの解析も SCM を用いて行った [50].
多倍長演算と組み合わせると自由境界問題のアトラクターの IPNS となる. また, 空間 1
次元の解のプロファイルの収束の IPNS を, 解の等高点の動きを自由境界とみなして行っ
た [47].

4. まとめ

任意次数近似を容易に実現する離散化法と多倍長演算を組み合わせた数値シミュレー
ションを無限精度数値シミュレーションと呼んだ. このシミュレーションでは計算誤差を
任意に小さくできるので, 不可能だと思われてきた逆問題の直接数値シミュレーションを
可能にした. また, 逆問題の様々な数値実験を可能にしてきた. 例えば, 熱伝導問題など
では数値計算結果から解の非存在が示唆された. これを理解するためには, 解の存在と解
の解析性の関係を考慮する必要があると思われる. 解の非存在の証明は解の存在証明より
一般に難しいといわれているが, 無限精度数値シミュレーションは解の非存在の証明に役
立つ可能性があることがわかった. 熱伝導問題に関連しては, 解の一意性がない問題に対
して数値解法が滑らかな解を選択するというようなおもしろい数値実験もできた. 一方,
無限精度数値シミュレーションに耐えられるように, 数値計算法の高度化も必要になった.
これは有界化法や極座標変換の特異性の除去法の開発につながった. このように無限精度
数値シミュレーションは新しい分野をどんどん開拓している. 現在の計算機の性能では,
空間 3 次元, 時間を入れて 4 次元の無限精度数値シミュレーションは不可能であるが, 今
後のハードウェアの発展を考えると 20 年後には可能になっていると思われる. 将来が楽
しみなシミュレーション法である.

謝辞

ここで紹介した数値計算結果のいくつかは、徳島大学工学部の竹内敏己教授、坂口秀雄助教のご厚意による。以上の方々に感謝申しあげる。なお、本研究は科学研究費 (Nos. 16340024, 16340029, 18654023, 18340045) の支援を受けて行なわれたものである。

参考文献

- [1] C. Canuto et al., *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer, 1998.
- [2] A.S. Demidov, The form of a steady plasma subject to the skin effect in a tokamak with non-circular cross-section, *Nucl. Fusion* **15** (1975), pp. 765-768.
- [3] A.S. Demidov, Equilibrium form of a steady plasma, *Phys. Fluids* **21**(6)(1978), pp.902-904.
- [4] C.A.J. フレッチャー, コンピュータ流体力学, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1993.
- [5] H. Fujiwara and Y. Iso, Design of a multiple-precision arithmetic package for a 64-bit computing environment and its application to numerical computation of ill-posed problems, *IPSJ J.*, **44**(3)(2003), 925-931.
- [6] H. Fujiwara and Y. Iso, Numerical Challenge to Ill-posed Problems by Fast Multiple-Precision System, *Proc. the 50th Japan National Congress on Theoretical and Applied Mechanics*, 2001, pp.419-424.
- [7] H. Fujiwara and Y. Iso, Some Remarks on the Choice of Regularization Parameters under Multiple-Precision Arithmetic, *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, Vol.51(2002), pp.387-393.
- [8] 藤原 宏志, 今井 仁司, 竹内 敏己, 磯 祐介, 第一種積分方程式の高精度数値計算について, *日本応用数理解学会論文誌*, Vol.15, No.3(2005), pp.419-434.
- [9] D. Gottlieb and S.A. Orszag, *Numerical analysis of spectral methods: Theory and applications*, SIAM-CBMS, 1977.
- [10] F. H. Harlow and J. E. Welch, Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Phys. Fluids*, Vol. 8, No. 12, pp. 2182-2189, 1965.
- [11] K. Iijima et al., Usefulness of Multiple-Precision Arithmetic for Numerical Solution of Inverse Problems, *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, **54**(2005), 307-317.
- [12] 今井 仁司, 平衡プラズマにおける自由境界値問題の数値解法, *数理解析研究所講究録*, 553(1985), pp.134-144.
- [13] 今井 仁司, 対称断面をもつ容器中の非対称平衡プラズマについて, 研究集会「MHD 数値計算法の基礎研究」講演報告集, 1986, pp.21-27.
- [14] H. Imai and H. Kawarada, One-Component Asymmetric Plasmas in a Symmetric Vessel, *Japan J. Appl. Math.* **5**(2) (1988), pp.173-186.
- [15] H. Imai, A. Sasamoto and H. Kawarada, A Shape Design Problem of a Vessel in Which Plasma is Confined, 研究集会「MHD 数値計算とトラス閉じ込めの基礎研究」講演報告集, 1990, pp.5-14.
- [16] H. Imai and H. Kawarada, An Application of the Fuzzy Theory for an Ill-Posed Problem, *Inverse Problems in Engineering Mechanics*(Eds. M. Tanaka and H.D. Bui), Springer-Verlag, 1993, pp.31-38.
- [17] 今井 仁司, 周 偉東, 河原田 秀夫, 沢栗 利男, 名取 亮, 不適切な問題に対する適用可能な数値解法の検討, *数理解析研究所講究録*, 836(1993), pp.102-112.
- [18] H. Imai, Application of the Fuzzy Theory and Spectral Collocation Methods to an Ill-Posed Shape Design Problem with a Free Boundary, *Inverse Problems in Mechanics*(Eds. S. Saigal and L.G. Olson), The American Society of Mechanical Engineers, Vol. 186, 1994, pp.103-107.
- [19] H. Imai and T. Takeuchi, Application of the Infinite-Precision Numerical Simulation to an Inverse Problem, *NIFS-PROC*, **40**(1999), 38-47.
- [20] H. Imai, T. Takeuchi and M. Kushida, On Numerical Simulation of Partial Differential Equations in Infinite Precision, *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, **9**(2) (1999), pp. 1007-1016.
- [21] H. Imai, T. Takeuchi and H. Sakaguchi, Infinite Precision Numerical Simulation for PDE Systems and Its Applications, *数理解析研究所講究録*, 1147(2000), pp.42-50.

- [22] H. Imai and T. Takeuchi, Some Advanced Applications of the Spectral Collocation Method, GAKUTO Int. Ser. Math. Sci. Appl., **17**(2001), pp.323-335.
- [23] H. IMAI et al., On Super Numerical Simulation, 数理解析研究所講究録, 1265(2002), pp.9-17.
- [24] H. Imai and T. Takeuchi, Direct simulation of an integral equation of the first kind, "Proceedings of International Conference on Inverse Problems -Recent Developments in Theories & Numerics (Eds. Y.-C. Hon et al.), " World Scientific, Singapore, 2003, pp.247-254.
- [25] 今井 仁司, 極座標変換に伴う微分方程式の特異性の回避公式について, 数理解析研究所講究録, 1362(2004), pp.161-168.
- [26] 今井 仁司, 無限精度数値シミュレーションの拓く計算力学の新たな可能性, 日本計算数理工学会誌計算数理工学レビュー, No.2005-1(2005), pp.21-32.
- [27] 今井 仁司, 有界化法による微分方程式の数値計算, 数理解析研究所講究録, 1441(2005), pp.173-186.
- [28] H. Imai, Some methods for removing singularity and infinity in numerical simulation, GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications, **23**(2005), 103-118.
- [29] H. Imai and H. Sakaguchi, Numerical Computation on Continuation of the Solution for the One-Dimensional Heat Equation, Trans. JSIAM, (2007), submitted.
- [30] 今井 仁司, 坂口 秀雄, 熱伝導逆問題の初期値問題に関連する数値計算, 数理解析研究所講究録, to appear.
- [31] 石岡 圭一, 円盤領域の浅水方程式に対するスペクトル法 I. 原理, ながれ, **22**(2003), 345-358.
- [32] F. John, Partial Differential Equation 4th ed., Appl. Math. Sci., **1**, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [33] Y. Katano, T. Kawamura and H. Takami, Numerical Study of Drop Formation from a Capillary Jet Using a General Coordinate System, Theoretical and Applied Mech., **34**(1986), pp.3-14.
- [34] T. Kawamura and H. Takami, Numerical Study of Viscous Incompressible Flow past a Circular Cylinder at High Reynolds Numbers, Theoretical and Applied Mech., **32**(1984), pp.19-33.
- [35] 河原田 秀夫, 今井 仁司, Cahn-Hilliard 方程式の数値解法, 日本数学会応用数学分科会講演アブストラクト, (1991.4. 春), pp.122-125.
- [36] 河原田 秀夫, 今井 仁司, 2 次元平衡プラズマの解多様体の数値計算, 研究集会「MHD 数値計算とトラス閉じ込めの基礎研究」講演報告集, 1987, pp.17-25.
- [37] 河原田秀夫, 自由境界問題, 東京大学出版会, 1989.
- [38] D.E. Knuth, The Art of Computer Programming, Addison-Wesley, Reading, 1981.
- [39] T. Matsushima and P.S. Marcus, A Spectral Method for Polar Coordinates, J. Comput. Phys., **120**(1995), 365-374.
- [40] 溝畑 茂, 偏微分方程式論, 岩波書店, 1981.
- [41] 中橋和博, 藤井考蔵, 格子形成法とコンピュータグラフィックス (数値流体力学シリーズ 6), 東京大学出版会, 1995.
- [42] 中村 憲, 最近の計算機代数の理論と応用, 数学 **48**(1)(1996), pp.12-21.
- [43] 中尾 充宏, 山本 野人, 精度保証付き数値計算, 日本評論社, 1998.
- [44] 大石 進一, 精度保証付き数値計算, コロナ社, 2001.
- [45] W.H. Press et al., Numerical recipes in FORTRAN, Cambridge University Press, 1992.
- [46] イ・ゲ・ペトロフスキー, 偏微分方程式論, 東京図書, 1977.
- [47] H. Sakaguchi and H. Imai, A NUMERICAL METHOD FOR TRACKING THE LEVEL SET IN ONE-DIMENSIONAL PROBLEMS, GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications, Vol.20(2004), pp.277-288.
- [48] 坂口 秀雄, 渡部 善隆, 今井 仁司, 多倍長計算を適用した精度保証数値計算数理解析研究所講究録, 1441(2005), pp.165-172.
- [49] A. Sasamoto, H. Imai and H. Kawarada, A Practical Method for an Ill-Conditioned Optimal Shape Design of a Vessel in Which Plasma Is Confined, ICM-90 Satellite Conference Proc., Inverse Problems in Engineering Sciences(Eds. M. Yamaguti et al.), Springer-Verlag, 1991, pp.120-125.
- [50] S. S. Shanta et al., NUMERICAL COMPUTATION OF ATTRACTORS IN FREE BOUNDARY PROBLEMS, Advances in Mathematical Sciences and Applications, Vol.11, No.2(2001), pp.531-548.
- [51] D.M. Smith, A FORTRAN Package For Floating-Point Multiple-Precision Arithmetic, Transactions on Mathematical Software, **17** (1991), pp. 273-283.

- [52] T. Takeuchi and H. Imai, DIRECT NUMERICAL SIMULATIONS OF CAUCHY PROBLEMS FOR THE LAPLACE OPERATORS, *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, Vol.13, No.2(2003), pp.587-609.
- [53] T. Takeuchi, H. Imai and H. Sakaguchi, Global Simulation of a Backward Heat Conduction Problem with a Variable Transform on Time, *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, 54(2005), 319-326.
- [54] T. Takeuchi, H. Imai and Y. Zhu, Some Numerical Experiments on Global Simulation of the Backward Heat Conduction Problem, *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, 55(2006), 175-184.
- [55] Tarmizi et al., Numerical simulation of one-dimensional free boundary problems in infinite precision, *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, 10(2) (2000), pp. 661-672.
- [56] J. F. Thompson et al., Automatic numerical grid generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number arbitrary two-dimensional bodies, *J. Comp. Phys.*, 15(1974), pp. 299-319.
- [57] A.N. Tikhonov and V.Y. Arsenin, *Solution of Ill-Posed Problems*, John Wiley & Sons, 1977.
- [58] 時岡 達志, 山岬 正紀, 佐藤 信夫, 気象の数値シミュレーション, 東京大学出版会, 1994.
- [59] 登坂 宣好, 大西 和榮, 山本 昌宏, 逆問題の数値と解法, 東京大学出版, 1999.
- [60] W.T.M. Verkley, A Spectral Model for Two-Dimensional Incompressible Fluid Flow in a Circular Basin (I. Mathematical Formulation), *J. Comp. Phys.*, 136(1997), 100-114.
- [61] W.T.M. Verkley, A Spectral Model for Two-Dimensional Incompressible Fluid Flow in a Circular Basin (II. Numerical Examples), *J. Comp. Phys.*, 136(1997), 115-131.
- [62] 保原 充, 大宮司 久明 編, 数値流体力学, 東京大学出版会, 1992.
- [63] 和田 秀男, コンピュータと素因子分解, 遊星社, 1987.
- [64] 祝 穎蓮, 竹内 敏己, 今井 仁司, 有界化による熱伝導逆問題の大域的数値計算, *日本応用数理学会論文誌*, Vol.16, No.1(2006), pp.27-36.