

超函数論の代数的基礎付け

東大理学部 柏原 正樹

§1. 序論

超函数の理論に於いて, 色々な local cohomology, 相対 cohomology の消滅が土台になることが屢々ある。例えば, 超函数の定義は, $\mathbb{R}^n$ の $\mathbb{C}^n$ に於ける純余次元性 (即ち $H_G^n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ が $k \neq n$ のとき 0 になる) に基いている。実解析的 parameter をもつ超函数は, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ の $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^m$ に於ける純余次元性を振り所として定義される。そこで我々は次の問題を考えよう。

問題 A. G が $\mathbb{C}^n$ の局所閉集合とする時, $H_G^k(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) = 0$ となる為の条件は何か?

この問題を大局化すれば, 次の問題になる

問題 B. G が $\mathbb{C}^n$ の局所閉集合の時, $H_G^k(\mathbb{C}^n; \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) = 0$ となる為の条件は何か。

以下, G の形が特別な場合に, 問題 A, B を考えよう。

§2. " f -propre "

1

実解析的 parameter をもつ超関数を扱う際には、普通の複素解析多様体だけでなく、 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^m$ のような複素解析多様体と実解析多様体の積を考える必要がある。そこでいささか大袈裟であるが次の定義をしよう。

定義 $(X; \mathcal{O}_X)$ を $\mathbb{C}$ 上の付環空間とする。 X が開集合の族 $\cup_\lambda$ で被覆され、各 λ に対して解析空間 X_λ とその閉集合 A_λ があって $(\cup_\lambda; \mathcal{O}_X|_{\cup_\lambda})$ が $(A_\lambda; \mathcal{O}_{X_\lambda}|_{A_\lambda})$ に同型とする。その時、 $(X; \mathcal{O}_X)$ を準解析空間と呼ぶ。

2つの準解析空間 X, Y に対して、その積 $X \times Y$ が定義できる。実は、paracompact 準解析空間は、解析空間のその閉集合への制限と同型である。

X が準解析空間で、 Z がその局所閉集合である時、相対 ∞ -homology $H^i_{\infty}(X; \mathcal{O}_X)$ のかわりに $H^i[Z]$ と書く。 $\mathcal{H}^k[Z]$ を $\mathcal{H}^k_{\infty}(\mathcal{O}_X)$ のかわりにもちいる。更に Z' が Z の閉集合ならば次の exact sequence を得る。

$$\cdots \rightarrow H^k[Z'] \rightarrow H^k[Z] \rightarrow H^k[Z-Z'] \rightarrow H^{k+1}[Z'] \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow \mathcal{H}^k[Z'] \rightarrow \mathcal{H}^k[Z] \rightarrow \mathcal{H}^k[Z-Z'] \rightarrow \mathcal{H}^{k+1}[Z'] \rightarrow \cdots$$

定義 X を解析多様体、 Z をその局所閉集合とする。 $q \in \mathbb{Z}$ を整数とする。 $H^k[Z] = 0$ が $k \leq n - q$ ($n = \dim X$) に対して成立する時、 Z は q -propre であるという。 $\mathcal{H}^k[Z]_{\infty} = 0$ が $k \leq n - q$ について成りたてば Z が、真 ∞ において locally

q -propre であるという。任意の準解析空間 Y に対して $H^k[Z \times Y] = 0$ (resp. $\mathcal{H}^k[Z \times Y]|_{Z \times Y} = 0$) が $k \leq n - q$ に対して成立する時, Z は普遍的に q -propre (resp. 普遍的に Σ で locally q -propre) であるという。

次に Z が q -propre となる為の必要条件をだす為には2つの補題を揚げよう。

補題 Z, X, Σ, q を上の通りとする。 X' を X の閉部分多様体とする。

i) Z が Σ において (普遍的に) locally q -propre ならば, $Z \cap X'$ は X' の中で (普遍的に) locally q -propre である。

ii) Z が (普遍的に) q -propre で, X' が完全交叉ならば, $Z \cap X'$ は X' の中で (普遍的に) q -propre である。

補題 Z, X, Σ, q, n を上の通りとする。 Z が q -propre (resp. Σ で locally q -propre) ならば, $\Omega_X^\pm$ が trivial の時, $H_Z^k(X; \mathbb{C}) = 0$ (resp. $\mathcal{H}_Z^k(\mathbb{C}) = 0$) が $k \leq n - q$ に対して成立する。

上の2つの lemma をあわせれば

命題 2.1. $Z \subset \mathbb{C}^n$ が q -propre (resp. Σ において locally q -propre) ならば, $\mathbb{C}^n$ の任意の m 次元閉部分多様体 X (resp. Σ を含む $\mathbb{C}^n$ の m 次元部分多様体 X) に対して

$$H_{Z \cap X}^k(X; \mathbb{C}) = 0 \quad (\text{resp. } \mathcal{H}_{Z \cap X}^k(\mathbb{C}_X) = 0) \quad \text{が}$$

$k \leq m - q$ に対して成立する。

この命題は $Z \subset \mathbb{C}^n$ が q -propre 或は locally q -propre になる
~~其~~の必要条件を与えている。この条件は、十分条件であろうか。即ち

問題 C $Z \subset \mathbb{C}^n$ の局所閉集合, Σ をその実, q を 0 と
 n の間の整数とする。 Z が次の条件 (*) を満たすとする。

(*) 任意の Σ を含む m -次元部分多様体 E に対して, $H_{\Sigma \cap E}^k(\mathbb{C}_E)$
 $= 0$ が $k \leq m - q$ に対して成立する。

その時, Z は Σ において局所的に q -propre か?

問題 D $Z \subset \mathbb{C}^n$ を局所閉集合, $q \in 0$ と n の間の整数
 とする。 Z が次の条件 (**) を満たすとする。

(**) 任意の $\mathbb{C}^n$ の m -次元閉部分多様体 E に対して,
 $H_{\Sigma \cap E}^k(E; \mathbb{C}) = 0$ が $k \leq m - q$ に対して成立する。

その時, Z は q -propre か?

恐らくこれらの問題自体は産であろう。しかし, ほかの付
 加的な条件のもとでこれらの問題が肯定的に解ける場合があ
 る。その例をいくつか与えよう。

a) $q = n$ の時は, 問題 C, D は肯定的である。

b) $q = n - 1$ かつ, Z が $\mathbb{C}^n$ の閉集合で tube の時,
 (i.e. $Z = \mathbb{R}^n \times FG$ の形をしている)

問題 D は肯定的である。

(証明) $\mathbb{R}^n$ の任意の (線型) 超平面 E に対して $H_{\text{Eng}}^0(E; \mathbb{C}) = 0$ である。従って $G \not\subset E$ である。従って $\mathbb{R}^n - G$ の凸包は $\mathbb{R}^n$ である。又 $H_G^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) = 0$ だから, $\mathbb{R}^n - G$ は連結である。よって Bochner's 定理によって $H^1[G] = 0$

C) G が $\mathbb{C}^n$ の 閉凸集合の時, 問題 C, D は肯定的に解ける。

D) G が $\mathbb{C}^n$ の 2 つの閉凸集合の差になっている時, 問題 D は殆ど成立する。(“殆ど” をいれたのは, まだ証明できていない部分がある為)

以下の部分で, 上の C), d) の証明とそれに関係した話題を中心に話を進める。

尚, Z が X の解析集合のときは, その “locally q -propre” という性質は Z の次元に関する条件で完全に記述できる。(Scheja, Tautmann)

§3 Cohomology の射影的極限

ここでの目的は次の命題を証明することである。

命題 3.1. $Z_m \subset X$ を解析空間 X の局所閉集合の減少列とする。 $Z = \bigcap Z_m$ とおく。各 Z_m が (普遍的に) q -propre ならば, Z は (普遍的に) q -propre である。

その為^に 次の定義をする。

定義 (EGA 0_{III} §13.1, §13.2 ^{による} ~~を参照~~) $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を有向集合 Λ を添字集合とする射影系とする。 $\{A_\lambda\}$ が条件 (ML)

を満たすというのは、任意の $\lambda_0 \in \Lambda$ に対して $\lambda \geq \lambda_0$ が存在して、 $f_{\lambda_0 \lambda}(A_\lambda) = f_{\lambda_0 \lambda_1}(A_{\lambda_1})$ がすべての $\lambda \geq \lambda_1$ に対して成立することである。(MLは Mittag Leffler の略)

射影的極限は左完全であるが、一般に完全列を完全列に移すとは限らない。しかし、

補題3.2 Λ を、共通な可算部分集合をもつ有向集合とする。

$0 \rightarrow A_\lambda \rightarrow B_\lambda \rightarrow C_\lambda \rightarrow D_\lambda$ は、 Λ を添字集合とするアーベル群の射影系の完全列とする。もしも、 $\{A_\lambda\}$ が (ML) を満たせば、

$0 \rightarrow \varprojlim A_\lambda \rightarrow \varprojlim B_\lambda \rightarrow \varprojlim C_\lambda \rightarrow \varprojlim D_\lambda$
は完全列である。

補題3.3 $0 \rightarrow A_\lambda \rightarrow B_\lambda \rightarrow C_\lambda \rightarrow 0$ がアーベル群の射影系の完全列とする。その時

- (i) $\{B_\lambda\}$ が (ML) を満たせば、 $\{C_\lambda\}$ も (ML) を満たす。
- (ii) $\{A_\lambda\}$ と $\{C_\lambda\}$ が (ML) を満たせば、 $\{B_\lambda\}$ も (ML) を満たす。

補題3.4 Λ を補題3.2と同じ条件を満たす有向集合とする。
 $(K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ をアーベル群の複体の射影系とする。

$$h^n: H^n(\varprojlim K_\lambda) \rightarrow \varprojlim H^n(K_\lambda)$$

を canonical な準同形とする。その時

- (i) $(K_\lambda^{n-1})_{\lambda \in \Lambda}$ が (ML) を満たせば、 h^n は surjective である。
- (ii) $(K_\lambda^{n-2})_{\lambda \in \Lambda}, (K_\lambda^{n-1})_{\lambda \in \Lambda}, (H^{n+1}(K_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ が (ML) を満たせば、

h^n は bijective である。

以上の証明は EGA 0 III §13 参照

補題 3.5 $A_\lambda \rightarrow B_\lambda \rightarrow C_\lambda \rightarrow D_\lambda$ をアーベル群の射影系の完全列とする。 $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, (C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は (ML) を満たすとする。更に、任意の λ と $\mu \geq \lambda$ に対して、 $D_\mu \rightarrow D_\lambda$ が単射となるような $\gamma \geq \mu$ が存在すると仮定する。その時 $\{B_\lambda\}$ は (ML) を満たす。

以上の補題がわかれば、次の定理を証明できる。

定理 3.6, X を位相空間, Z をその閉集合 $\{\cup_n \cup_n, n=1, 2, \dots\}$ を X の閉集合の増大列で, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \cup_n$ を満たすとする。 $\mathcal{F}$ を X 上の (アーベル群の) 層とする。すると, $h^k: H^k_Z(X; \mathcal{F}) \rightarrow \varprojlim_n H^k_{Z \cap \cup_n}(\cup_n; \mathcal{F})$ という canonical homomorphism がある。

(i) h^k は全射である。

(ii) $\{H^k_{Z \cap \cup_n}(\cup_n; \mathcal{F})\}_n$ が (ML) を満たせば, h^k は全単射。

定理 3.7 X を位相空間, $\mathcal{F}$ をその上の (アーベル群の) 層, $\{Z_n\}$ を X の閉集合の減少列, Z をその共通集合とする。

$h^k: H^k_Z(X; \mathcal{F}) \rightarrow \varprojlim_n H^k_{Z_n}(X; \mathcal{F})$ を canonical homomorphism とする。

(i) $\{H^k_{Z_n}(X; \mathcal{F})\}_n$ が (ML) を満たせば, h^k は全射。

(ii) $\{H^k_{Z_n}(X; \mathcal{F})\}_n$ が (ML) を満たせば, h^k は単射である。

定理3.7の(1)だけ簡単に証明しよう。 $\{H_{\Sigma_n}^k(X; \mathcal{F})\}_n$ が(ML)を満たすから、補題3.5と相対cohomologyの完全系列を用いれば $\{H^{k-1}(X-Z_n; \mathcal{F})\}_n$ も(ML)を満たす。定理3.6と補題3.2から

$$\begin{array}{ccccccc} H^{k-1}(X-Z_n; \mathcal{F}) & \rightarrow & H_{\Sigma_n}^k(X; \mathcal{F}) & \rightarrow & H^k(X; \mathcal{F}) & \rightarrow & H^k(X-Z_n; \mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \varprojlim H^{k-1}(X-Z_n; \mathcal{F}) & \rightarrow & \varprojlim H_{\Sigma_n}^k(X; \mathcal{F}) & \rightarrow & H^k(X; \mathcal{F}) & \rightarrow & \varprojlim H^k(X-Z_n; \mathcal{F}) \end{array}$$

という完全系列の交換図式を得る。五補題から(i)が得る。

定理3.1は上の定理3.7の系である。

§4 q -propre の例とそのつくりか

この§では、具体的に、 $\mathbb{C}^n$ の与えられた局所閉集合が q -propreであることを計算する手段を述べよう。その鍵は次の一般的な定理にある。

定理4.1 X_0, X_1 を解析空間, Z_0, Z_1 を夫々の閉集合とする。

更に a) $Z_1 \neq X_1$, X_1 は compact; $\underbrace{H^0(X_1; \mathcal{O}_{X_1}) = \mathbb{C}}_{\text{コンパクト性}}; \text{ b) } H^k[Z_0 \times Y] = 0$ が $k < \gamma$ なる任意の k と 任意の解析空間 (resp. 準解析空間) Y に対してなりたつ; を仮定する。その時、

$H^k[Z_0 \times Z_1 \times Y] = 0$ が 任意の $k < \gamma + 1$ と 任意の解析空間 (resp. 準解析空間) Y に対して成立する。

[証明]

$$H^k[Z_0 \times (X_1 - Z_1) \times Y] \rightarrow H^k[Z_0 \times Z_1 \times Y] \rightarrow H^k[Z_0 \times X_1 \times Y] \rightarrow H^k[Z_0 \times (X_1 - Z_1) \times Y]$$

という exact sequence を考えよう。仮定(b)によつて、 γ -項と $\gamma+3$ 項は $k \leq \gamma-1$ のとき消える。従つて $H^k[Z_0 \times Z_1 \times Y] = 0$

が $k < r$ のときに成立つ。又、 $k = r$ のとき、

$$0 \rightarrow H^r[Z_0 \times Z_1 \times Y] \rightarrow H^r[Z_0 \times X_1 \times Y] \xrightarrow{\beta} H^r[Z_0 \times (X_1 - Z_1) \times Y]$$

という完全系列を得る。従って、 β が単射であることを言えば十分である。 $f: X_0 \times X_1 \times Y \rightarrow X_0 \times Y$ を射影としよう。

Grauert の定理 (coherent sheaf の direct image に関する) を用いれば、 $R^k f_* (\mathcal{O}_{X_0 \times X_1 \times Y}) = H^k(X_1; \mathcal{O}_{X_1}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X_0 \times Y}$ である。(直接証明する事も困難でない。) そこで次の Spectral Sequence を考えよう。

$$E_2^{pq} = H_{Z_0 \times Y}^p(X_0 \times Y; R^q f_* (\mathcal{O}_{X_0 \times X_1 \times Y})) \Rightarrow H_{Z_0 \times X_1 \times Y}^{p+q}(X_0 \times X_1 \times Y; \mathcal{O})$$

$$E_2^{pq} = H_{Z_0 \times Y}^p(X_0 \times Y; \mathcal{O}) \otimes_{\mathbb{C}} H^q(X_1; \mathcal{O}_{X_1}) = H^p[Z_0 \times Y] \otimes_{\mathbb{C}} H^q(X_1; \mathcal{O}_{X_1})$$

である。一方 E_1^{pq} term は $H^q[Z_0 \times X_1 \times Y]$ となる。仮定 b) によって、 $E_2^{pq} = 0$ for $p \leq r-1$ である。従って

$$\mathcal{O}: H^r[Z_0 \times X_1 \times Y] \xrightarrow{\sim} E_2^{r,0} = H^r[Z_0 \times Y] \otimes_{\mathbb{C}} H^0(X_1; \mathcal{O}_{X_1}) = H^r[Z_0 \times Y]$$

今 $p \in X_1 - Z_1$ とする。属の homomorphism $\mathcal{O}_{X_0 \times X_1 \times Y} \rightarrow \mathcal{O}_{X_0 \times p \times Y} \cong \mathcal{O}_{X_0 \times Y}$ から、homomorphism

$$\gamma: H^r[Z_0 \times (X_1 - Z_1) \times Y] \rightarrow H^r[Z_0 \times Y]$$

を得る。 $\gamma \circ \beta: H^r[Z_0 \times X_1 \times Y] \rightarrow H^r[Z_0 \times Y]$ は $\mathcal{O}$ に同じ。

従って同型である。故に β は単射となる。 QED.

定理 4.1 を繰り返し用いれば、 $H^k[Z] = 0$ for $k \leq r$ となるような Z がたくさんつくれる。その出発点 $H^0[Z \times Y] = 0$ をたずぬるに次の補題に注意しよう。

補題4.2. Z を解析空間 X の閉集合とする。 $H^0[Z] = 0$ ならば、任意の準解析集合 Y に対して $H^0[Z \times Y] = 0$ が成立する。

系 Z_0 が $\mathbb{C}$ の閉集合で $Z_0 \neq \mathbb{C}$ とする。 Z_j ($j=1, \dots, n$) は $\mathbb{C}$ の有界閉集合とする。その時、 $H^k[Z_0 \times Z_1 \times \dots \times Z_n] = 0$ for $k \leq n$; i.e. $Z_0 \times \dots \times Z_n$ は普遍的に 1-propre

定理4.1 から得られる Z_1 は compact でなければならない。従って、non-compact な区をつくるのには使えない。そこで次の命題が必要になる。

命題4.3. $Z_1 \subseteq \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ を closed set, Z_i ($i=2, \dots, n$) を $\mathbb{C}$ の真の閉部分集合とする。その時、 $Z_1 \times \dots \times Z_n$ は普遍的に 1-propre である。

[証明] 1 次変換で Z_j を移してやると、 $Z_1 \subset \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$
 $Z_j \subset \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| \leq 1\}$ としてよい。 $f_l: \mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ を $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_0, \dots, z_n)$ $z_0 = z_1 z_2 \dots z_n$ とする。 $P_l = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}; z_j \in \bar{Z}_j, |z_0| < 1\}$ とする。系によって P_l は普遍的に 1-propre, 従って $D_l = f_l^{-1}(P_l)$ も普遍的に 1-propre である。他方、 D_l は増大列で $Z = Z_1 \times \dots \times Z_n = \bigcup D_l$, D_l は Z で open である。従って定理3.6 により Z も普遍的に 1-propre である。 Q.E.D.

系 $Z = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; \operatorname{Im} z_j \leq 0 \text{ for } j=1, \dots, n\}$, $\{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; -1 < \operatorname{Im} z_j \leq 0, \operatorname{Im} z_j \leq 0\}$ は普遍的に 1-propre.

§5 GLOBAL COHOMOLOGY の消滅

§2 に掲げた ~~命題~~ の解答として次の定理が成立つ。

定理 5.1 G を $\mathbb{C}^n$ の凸閉集合とする。その時、次の 2 条件は同値である。 (q は整数)

(i) 任意の q 次元 (complex) linear variety L は、 G に含まれない。

(ii) G は、普遍的に q -propre である。

(証明)

ii) $\Rightarrow$ i) 命題 2.1 により $H_{G \cap L}^q(L; \mathbb{C}) = 0$ 。従って $G \not\supset L$ 。

i) $\Rightarrow$ ii) G° を G の polar $\{l \in (\mathbb{C}^n)^* ; \operatorname{Im} l(z) \leq 1 \text{ for } \forall z \in G\}$ とする。 ($G \ni 0$ と仮定する)。 G が q 次元 linear subspace を含まないから、 G° は $(n-q)$ 次元 linear subspace に含まれない。従って $(n-q+1)$ の 1 次独立な linear forms $l_1, \dots, l_{n-q+1}$ が G° にある。即ち $G \subset \{z ; \operatorname{Im} l_j \leq 1 \text{ for } j=1, \dots, n-q+1\}$ 。 $l_j = z_{j+q-1}$ と仮定してよい。よって $G \subset \{z ; \operatorname{Im} z_j \leq 1 \text{ for } j=q, \dots, n\}$ 。 G は凸閉だから、

$G = \bigcap_{m=0}^{\infty} G^{(m)}$, $G^{(0)} = \{z ; \operatorname{Im} z_j \leq 1 \text{ for } j=q, \dots, n\}$,

$G^{(m)} = G^{(m-1)} \cap \{z \in \mathbb{C}^n ; \operatorname{Im} l_{j_m}(z) \leq 1\}$, $l_m \in G^\circ$ とできる。

$f_m : \mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+m}$ を $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, \dots, z_n, l_1, \dots, l_m)$ とおく。

$P_m = \{(z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_m) \in \mathbb{C}^{n+m} ; z \in G^{(0)}, \operatorname{Im} w_j \leq 1\}$ とおけば P_m は普遍的に q -propre である。従って $G^{(m)} = f_m^{-1}(P_m)$ は普遍的に q -propre となる。命題 3.1 によって、 G は q -propre である。 QED.

定理5.1 と全く同じ方向で次の定理を得る。

定理5.2. G を $\mathbb{R}^n$ の閉凸集合, $q \geq 1$ を整数とする。その時次の2条件は同値である。

- (i) G は q 次元 (real) linear variety を含まない。
- (ii) $T(G) = \mathbb{R}^n \times \sqrt{q} G$ は 普遍的に q -proper である。

次に §2 の d) の解答にあたる次の定理を掲げよう。

定理5.3. $G \subset \mathbb{C}^n$ を 閉凸集合 G_1, G_2 の差 $G_1 - G_2$ であるとする。 $q \geq 1$ は整数である。その時、次の2条件は同値である。

- (i) 任意の q 次元 linear subvariety L に対して $H_{L \cap G}^0(L; \mathbb{C}) = 0$.
(これは次のように述べることもできる; L の空でない開集合で, $L \cap G$ で閉となるものが存在しない)
- (ii) G は普遍的に q -proper である。

定理5.4. $G \subset \mathbb{R}^n$ を 2つの閉凸集合の差とする。その時、次の2条件は同値

- (i) 任意の q 次元 (real) linear variety L に対して $H_{L \cap G}^0(L; \mathbb{C}) = 0$.
(これは上と同様な言い換えができる)
- (ii) $T(G) = \mathbb{R}^n \times \sqrt{q} G$ は普遍的に q -proper である。

詳しい証明は略するか、定理5.3の証明は完全ではない。
次の予想が成立すれば、定理5.3が成立することかわかっている。

予想 $\{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; \operatorname{Im} z_j \leq 0 \text{ for } j=1, \dots, n, \\ \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Re} z_3 > 0\}$ は普遍的に 1 -proper である。

§6 Local Cohomology の消滅

次に, local q -proper に関する諸定理を述べよう。その
 息に次の補題を用意する。

補題 6.1. $B_p = \{z \in \mathbb{C}^p; \operatorname{Im} z_j \leq 0 \text{ for } j=1, \dots, p\}$ とする。そ
 の時, B_p における 0 の近傍 U_p があって, $U_p \times B_{n-p}$ が普遍
 的に 1 -proper である。(U_p は p にだけ依存して n によら
 ない)

この補題を用いれば, 定理 5.1 を局所化したものにあたる
 次の定理が証明できる。

定理 6.1 G を $\mathbb{C}^n$ の閉凸集合, $z \in G$, $q \geq 1$ を整数とす
 る。その時, 次の 2 条件は同値である。

- (i) 任意の q 次 (complex) linear subvariety $L \ni z$ に対し
 て, $G \cap L$ は L に於ける z の近傍でない。(i.e. $\mathcal{H}_{G \cap L}^q(\mathbb{C}_L) = 0$)
- (ii) G は z において 普遍的に locally q -proper である。

証明は次のようにしておこなわれる。 z の十分小さい近傍
 U と $G^{(0)} \supset G^{(1)} \supset \dots \supset G^{(m)} \supset \dots$ という減少列で $G = \bigcap G^{(m)}$ となる
 閉凸集合の列で $U \cap G^{(0)}$ が普遍的 q -proper となるものを旨く
 みつけだす。すると $U \cap G$ は普遍的に q proper だから,

$H^k[(U \cap G) \times Y] = 0$ for $k \leq n - q$. ここで U を十分小さくとれたから, $\mathcal{H}^k[G \times Y]|_{Z \times Y} = 0$ を得る。

定理 6.2. G を $\mathbb{R}^n$ の閉凸集合, $z \in G$, $q \geq 1$ とする。この時、次の 2 条件は同値。

- (i) 任意の z を通る q 次元 (real) linear subvariety に対して, $G \cap L$ は z の近傍でない。 (i.e. $\mathcal{H}_{G \cap L}^0(\mathbb{Q}_L) = 0$)
- (ii) $T(G) = \mathbb{R}^n \times_{\mathbb{R}} G$ は, Real parat が z となる各点に於て普遍的に locally q -propre。

$\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ の場合は, 定理 2 から, $\mathbb{R}^n$ が普遍的に locally q -propre なることがわかる。従って, $\mathcal{H}^k[\mathbb{R}^n \times Y] = 0$ for $k \leq n-1$ となる。この local cohomology が $k \geq n+1$ で消えることは, $\mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$ が $n+1$ の stein open set で被覆されることから直ちに得られる。従って, $\mathbb{R}^n \times Y$ は $\mathbb{Q}_{\mathbb{C}^n \times Y}$ に関して純 n -余次元である。

付記 §5 の末尾におげた予想は, 肯定的に証明された。従い, 定理 5.3 は, 完全に証明されたことを注意しておく。