

有限量子系の超双曲型構造と変形ベッセル関数について

by

横浜市立大学・数理科学科 藤井一幸 (FUJII Kazuyuki)
Department of Mathematical Sciences, Yokohama City University

はじめに

横浜市立大学の量子コンピュータ・グループでは原子の energy levels を用いた量子計算を研究してきた [1], [2]。量子計算では、通常 two energy levels を用いて取り扱う (qubit theory) [3]。しかし原子は一般に many energy levels をもち、これを利用する量子計算を qudit theory と言う、例えば [4], [5]。

原子の有限個の energy levels system を有限量子系と呼ぼう。このシステムにある種の双曲型構造が入り、それを超双曲型構造 (super hyperbolic structure) と呼ぶことにする。これが変形ベッセル関数の母関数と関係し、面白い (関数) 関係を得ることが出来る [6]。この構造が qudit theory の問題 (難問) を解決できるか否かは今後の研究課題である。

有限量子系でうまく極限をとると、それが大貫と北門による円周上の量子力学になる [7]。そのとき変形ベッセル関数の母関数の “正体” が明らかになる。

数学的準備

まず 2 準位系の復習をしよう。 $\{\sigma_1, \sigma_3\}$ をパウリ (Pauli) 行列で、 $\mathbf{1}_2$ を単位行列とする。

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

σ_1 and σ_3 の良く知られた性質をリストすると

$$\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = \mathbf{1}_2, \quad \sigma_1^\dagger = \sigma_1, \quad \sigma_3^\dagger = \sigma_3, \quad \sigma_3 \sigma_1 = -\sigma_1 \sigma_3 = e^{\pi i} \sigma_1 \sigma_3. \quad (2)$$

更に $\sigma_1 = W \sigma_3 W^{-1}$ の関係がある。ここに W は Walsh-Hadamard matrix で、

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = W^{-1} \quad (3)$$

で与えられる。これは非常に重要な行列で Discrete Fourier Transform の特別な場合である [3]。

hyperbolic functions $\{\cosh x, \sinh x\}$ は

$$\cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sinh x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (4)$$

で定義され、以下の性質をもつ。

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad (5)$$

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y),$$

$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y). \quad (6)$$

簡単のため以下では $c_0(x) \equiv \cosh(x)$, $c_1(x) \equiv \sinh(x)$ とおく。そのとき $e^{x\sigma_1}$ を考えると

$$e^{x\sigma_1} = c_0(x)\mathbf{1}_2 + c_1(x)\sigma_1 = \begin{pmatrix} c_0(x) & c_1(x) \\ c_1(x) & c_0(x) \end{pmatrix} \quad (7)$$

で、(5) と (6) は簡単に

$$\det(e^{x\sigma_1}) = 1, \quad e^{(x+y)\sigma_1} = e^{x\sigma_1}e^{y\sigma_1} \quad (8)$$

と表される。

The modified Bessel functions of integer order $\{I_k(x) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ は、母関数 (generating function)

$$e^{\frac{x}{2}(w+\frac{1}{w})} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} I_k(x) w^k. \quad (9)$$

によって与えられ、例えば

$$\begin{aligned} 1 &= I_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k I_{2k}(x), \\ \cosh(x) &= I_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_{2k}(x), \quad \sinh(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_{2k-1}(x) \end{aligned} \quad (10)$$

などの重要な性質をもつ [8]。(9) の母関数に代入 $w \rightarrow w\sigma_1$ をおこなうと

$$e^{\frac{x}{2}(w\sigma_1+\frac{1}{w}\sigma_1^{-1})} = e^{\frac{x}{2}(w+\frac{1}{w})\sigma_1} = \cosh\left(\frac{x}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)\right)\mathbf{1}_2 + \sinh\left(\frac{x}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)\right)\sigma_1 \quad (11)$$

を得る。これより (10) は簡単にわかる。

有限量子系と超双曲型構造

パウリ行列 $\{\sigma_1, \sigma_3\}$ の一般化は、generalized Pauli matrices $\{\Sigma_1, \Sigma_3\}$

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \sigma & & & & \\ & & \sigma^2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \sigma^{n-2} & \\ & & & & & \sigma^{n-1} \end{pmatrix} \quad (12)$$

で与えられる。ここに σ は $\sigma = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ である。 $\{\Sigma_1, \Sigma_3\}$ の間には (2) の一般化で

$$\Sigma_1^n = \Sigma_3^n = \mathbf{1}_n, \quad \Sigma_1^\dagger = \Sigma_1^{n-1}, \quad \Sigma_3^\dagger = \Sigma_3^{n-1}, \quad \Sigma_3 \Sigma_1 = \sigma \Sigma_1 \Sigma_3. \quad (13)$$

の関係がある。更に $\Sigma_1 = W \Sigma_3 W^{-1}$ が成り立つ。ここに W は generalized Walsh-Hadamard matrix で

$$W = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \sigma^{n-1} & \sigma^{2(n-1)} & \cdots & \sigma^{(n-2)(n-1)} & \sigma^{(n-1)^2} \\ 1 & \sigma^{n-2} & \sigma^{2(n-2)} & \cdots & \sigma^{(n-2)^2} & \sigma^{(n-1)(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \sigma^2 & \sigma^4 & \cdots & \sigma^{2(n-2)} & \sigma^{2(n-1)} \\ 1 & \sigma & \sigma^2 & \cdots & \sigma^{n-2} & \sigma^{n-1} \end{pmatrix} \quad (14)$$

で与えられる (確かに $n=2$ のときは (3) になる)。 W はまさに Discrete Fourier Transform そのものである。[9] にこれの面白い応用 (計算) がある。

(7) の $e^{x\Sigma_1}$ の拡張として $e^{x\Sigma_1}$ を考えよう。

$$\begin{aligned} e^{x\Sigma_1} &= c_0(x)\mathbf{1}_n + c_1(x)\Sigma_1 + c_2(x)\Sigma_1^2 + \cdots + c_{n-2}(x)\Sigma_1^{n-2} + c_{n-1}(x)\Sigma_1^{n-1} \\ &= \begin{pmatrix} c_0(x) & c_{n-1}(x) & & \cdots & c_2(x) & c_1(x) \\ c_1(x) & c_0(x) & c_{n-1}(x) & \cdots & & c_2(x) \\ & c_1(x) & c_0(x) & c_{n-1}(x) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{n-2}(x) & & \cdots & c_1(x) & c_0(x) & c_{n-1}(x) \\ c_{n-1}(x) & c_{n-2}(x) & \cdots & c_2(x) & c_1(x) & c_0(x) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (15)$$

ここに $c_j(x)$ は

$$c_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{kn+j}}{(kn+j)!} \implies e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{j=0}^{n-1} c_j(x) \quad (16)$$

となる。(8) に対応するものとして

$$\det(e^{x\Sigma_1}) = 1, \quad e^{(x+y)\Sigma_1} = e^{x\Sigma_1} e^{y\Sigma_1} \quad (17)$$

があり、これらから基本関係式 (5) 及び 加法公式 (6) の拡張が出てくる。論文 [6] でこのシステム

$$\{c_0(x), c_1(x), \dots, c_{n-1}(x)\} \quad (18)$$

を 超双曲型構造 (super hyperbolic structure) と呼んだ (評判はすこぶる悪い)。

(11) の一般化として

$$e^{\frac{x}{2}(w\Sigma_1 + \frac{1}{w}\Sigma_1^\dagger)} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} I_k(x) w^k \Sigma_1^k \quad (19)$$

を取るのは自然であり、これより多くの面白い結果を得る。例えば、

$$\frac{1}{n} \text{tr} \left\{ e^{\frac{\pi}{2} (w \Sigma_1 + \frac{1}{w} \Sigma_1^\dagger)} \Sigma_1^j \right\} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} I_{nk-j}(x) w^{nk-j} \quad \text{for } 0 \leq j \leq n-1 \quad (20)$$

を得る ($j=0$ の場合は知られている [10])。

円周上の量子力学への移行

(12) のままで $n \rightarrow \infty$ をとるのは不可能である。そこで少し工夫をする。 $n = 2N + 1$ として

$$\tilde{\Sigma}_1 = \Sigma_1, \quad \tilde{\Sigma}_3 = \begin{pmatrix} \sigma^{-N} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma^{-1} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \sigma \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \sigma^N \end{pmatrix} \quad (21)$$

とおく。更に $\tilde{\Sigma}_3$ を

$$\tilde{\Sigma}_3 = \exp \left(\frac{2\pi i}{2N+1} \tilde{G} \right) \quad \text{where} \quad \tilde{G} = \begin{pmatrix} -N & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & N \end{pmatrix} \quad (22)$$

と書き直す。このとき (finite dimensional) Hilbert space を

$$\mathbb{C}^{2N+1} = \text{Vect}_{\mathbb{C}} \{ |-N\rangle, \dots, |-1\rangle, |0\rangle, |1\rangle, \dots, |N\rangle \}$$

と書いておくほうがベターである。何故なら $\tilde{G}|n\rangle = n|n\rangle$ となるからである。

以上のもとで基本的作用素が $\{\tilde{\Sigma}_3, \tilde{\Sigma}_1\}$ から $\{\tilde{G}, \tilde{\Sigma}_1\}$ へと変わり、これらの交換関係は

$$[\tilde{G}, \tilde{\Sigma}_1] = \tilde{\Sigma}_1 \pmod{2N+1} \quad (23)$$

となる。この段階で躊躇なく $N \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) を取ることが出来る。即ち、大貫・北門の基本関係式

$$\tilde{G} \rightarrow G, \quad \tilde{\Sigma}_1 \rightarrow W; \quad [G, W] = W \quad (24)$$

を得る¹。ここに

$$G = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & -2 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 2 \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (25)$$

で、 G 及び W は (infinite dimensional) Hilbert space

$$\mathcal{L}^2(\mathbf{Z}) = \left\{ \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n |n\rangle \mid \sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n|^2 < \infty \right\}; \quad W|n\rangle = |n+1\rangle, \quad G|n\rangle = n|n\rangle \quad (26)$$

上の hermitian operator 及び unitary operator である。

(24) から円周上の量子力学が構築される [7]。これからいろいろな問題が提起される。例えば、(19) の更なる一般化である **generating operator**

$$e^{\frac{x}{2}(wW + \frac{1}{w}W^\dagger)} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} I_k(x) w^k W^k \quad (27)$$

を考えることが出来る。後は読者にまかせよう。

参考文献

- [1] K. Fujii, K. Higashida, R. Kato and Y. Wada : Cavity QED and Quantum Computation in the Weak Coupling Regime, J. Opt. B: Quantum and Semiclass. Opt, 6 (2004) 502, quant-ph/0407014.
- [2] K. Fujii, K. Higashida, R. Kato and Y. Wada : Cavity QED and Quantum Computation in the Weak Coupling Regime II : Complete Construction of the Controlled-Controlled NOT Gate, Trends in Quantum Computing Research, Susan Shannon (Ed.), **Chapter 8**, Nova Science Publishers, 2006 and Computer Science and Quantum Computing, James E. Stones (Ed.), **Chapter 1**, Nova Science Publishers, 2007, quant-ph/0501046.
- [3] 細谷 暁夫 : 量子コンピュータの基礎, SGC ライブラリ 4, サイエンス社, 1999.

¹この記号は大貫・北門 [7] にあわせており、(14) の W とは異なることに注意せよ

- [4] K. Fujii, K. Funahashi and T. Kobayashi : Jarlskog's Parametrization of Unitary Matrices and Qudit Theory, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **3** (2006), 269, quant-ph/0508006.
- [5] K. Funahashi : Explicit construction of controlled-U gates and unitary operators in two-qudit, *Yokohama Mathematical Journal*, **52** (2005), 11, quant-ph/0304078.
- [6] K. Fujii : A New Algebraic Structure of Finite Quantum Systems and the Modified Bessel Functions, to appear in *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, (vol.4, no.7), 2007, arXiv : 0704.1844 (quant-ph).
- [7] Y. Ohnuki and S. Kitakado : Fundamental Algebra for Quantum Mechanics on S^D and Gauge Potentials, *J. Math. Phys.* **34**(1993), 2827.
- [8] E. T. Whittaker and G. N. Watson : *A Course of MODERN ANALYSIS*, Cambridge University Press, 1990.
- [9] K. Fujii and T. Suzuki : Flow Representation of the Bose-Hubbard Hamiltonian : General Case, arXiv : 0707.0902 (quant-ph).
- [10] S. Cojocaru : Green's function of a finite chain and the discrete Fourier transform, *Int. J. Mod. Phys.* **20**(2006), 593, arXiv : 0704.2898 (math-ph).