

Brown 運動理論の検証

平 田 文 夫

微粒子の示す Brown 運動の理論に関しては、粒子が Brown 運動の結果一定時間内に起す變位 (Displacement) に就て、Einstein, v Smoluchowski, Langevin が夫々全く異つた理論的誘導により同一の理論式に到達して居る。變位とは顯微鏡下に粒子を観察する際粒子が Brown 運動の結果或る一定時間内に位置の移動を起すのを認める。此の移動を云ふのであるが普通此の移動は空間三次元的であるが顯微鏡の視野では二次的に觀測して居ることになつて居る。一般に x, y, z の座標軸に沿つた方向に分けて示される。例へば x 軸の方向の變位と云ふ風に。

粒子をば球形と考へそれが液體或は瓦斯體内に散亂して居て其の媒體中を移動する時 Stokes の法則に従ふものと考へて Einstein は粒子の Brown 運動に因る變位について次の理論式を得た。¹⁾

$$\bar{x}^2 = \frac{RT}{N} \cdot \frac{t}{3\pi\mu r}$$

式中 x は t 時間に球形粒子の示す x 軸の方向への變位、 $\bar{x}^2$ は其の變位の多數の測定値の二乗の平均値、 R は瓦斯恒數、 T は絶対温度で示した其の時の温度、 N は Avogadro の恒數、 π は圓周率、 μ は媒體の粘度、 r は粒子の半径を示す。

Langevin は簡單な誘導で此の Einstein の式を得て居る。²⁾

又全く違つた理論的誘導によつて v Smoluchowski は $\bar{x}^2 = \frac{32}{27} \cdot \frac{RT}{N} \cdot \frac{t}{3\pi\mu r}$ なる式を得て居る。³⁾

次に此等の理論式の驗證に就ては Perrin 及其の門下⁶⁾並に Svedberg 及び其の門下⁵⁾によつて主として行はれた。

又一方此の變位とは別に Brown 運動の結果として起る他の現象がある。微粒子が媒體中に散亂して存在して居る際其の散亂系中に一容積を區切つて考へ其の容積中に存在する粒子の数を数へて見ると其の値が Brown 運動の結果絶えず時間的に變動 (Fluctuation) があることがわかる。いつもその粒子の数が一定の数を示さない。此の Brown 運動に起因する粒子数の時間的な變動に關する理論に就ては v. Smoluchowski は次の式を誘導して、⁴⁾

$$W(n) = \frac{e^{-v} \cdot v^n}{n!}$$

式中 $W(n)$ は v 容積中に n 個の粒子が現はれる確率、 v は粒子が全容積に全く均一に分配されたとした場合に v 容積中に存在する筈の粒子数即ち平均した粒子数を示す。

此の理論式の驗證は Svedberg が金の膠質溶液によつて行つた。⁷⁾

以上此等の諸理論式に對する前記の人々の確證的實驗は皆媒體を液體とした散亂系に就いて行はれて居るのであるが瓦斯體を媒體とした散亂系に於ても全く同一の理論式は成り立つ事は勿論確證的實驗として此種の散亂系を用ひることが出来る筈である。實際 Ehrenhaft, De Broglie, Millikan, Fletcher, 其他の人々によつて實行された。

此處には Brown 運動理論の驗證として瓦斯體を媒體とした散亂系に就ての重要な實驗に就て述べ度いと思ふのであるが何故に瓦斯體を媒體とした散亂系の場合に就て述べ様とするかに就て少しく其の理由を述べる必要がある。

元來理論式の驗證と云ふ問題を考へて見ると或る現象が知られその

(244)

(平田文夫) Brown 運動理論の検証

理論が立てられたとすると其の理論の正否を實驗によつて確證されなければならぬが其の際考慮すべき重要な事項は次の諸項であらふ。先づ第一に驗證に用ひんとする理論式中には出来る限り假定が少ない事又次に之れを實驗に訴へる際に實驗の狀件は出来る限り簡單であること又簡單になし得る事尚又能ふ限り正確度の大きな實驗結果を得らるべき事即ち測定上の誤差は能ふ限り僅少に測定値は能ふ限り精密に得らるべきである。

Brown 運動理論の驗證の場合を考察して見る。元來 Brown 運動理論の基礎は媒體分子の活動説(Kinetic Theory)にある。然るに媒體を瓦斯體とした散亂系に於ては媒體分子即ち瓦斯分子の活動説は完成されて居ると云つてよいが液體の分子活動説は未完成の狀態である。従つて Brown 運動理論の驗證に當つては媒體を瓦斯體とした散亂系に就いて行ふ方が意味があると云ひ得る。且つ測定の立場から云つても媒體が瓦斯體の散亂系の方が媒體が液體の散亂系よりも大變好都合である。何となれば粒子の示す變位 (Displacement) は後者よりも前者の場合が遙かに大きいからである。例へば媒體が水の場合と空氣の場合とは同一の狀態で同一の粒子の示す Brown 運動の變位は 1 と 8 の關係になる。即ち空氣中の方が 8 倍の變位を示す。若し水素を媒體とすれば 15 倍を示し若し又其の壓を減じて稀薄にするならば 50 乃至 200 倍の變位を起さし得る。此點から考へても確かに瓦斯體を媒體とした散亂系によつて Brown 運動の理論を驗證する方がより勝れた方法であると云ひ得る。

瓦斯體中に散亂せる粒子の Brown 運動に就ての定量的研究

1909 年まで此の方面の定量的な研究は無いと云つてよい。1906 年 Smoluchowski が空氣中で 10^{-4} cm の半徑の粒子は如何程の變位がある

かについて述べたに對して 1907 年に Ehrenhaft が或る種の微粒子に就て空氣中で其の程度の變位の起ることを測定はして居るが未だ正確に定量的な仕事とは言ひ得る程度でない。⁸⁾ 1908 年巴里の De Broglie が此方面に新しい仕事をした。⁹⁾ 電氣の火花で出来る金屬の蒸氣を凝集させて造つた金屬微粒子を硝子製の容器に導入し之れに水平方向から光を當て垂直方向より顯微鏡で見えて見た。つまり限外顯微鏡的に觀察した。

此際二枚の金屬板を垂直に粒子の兩側に裝置して置いて此二枚の間に電壓を與へ即ち硝子製容器中に蓄電器を裝置して其蓄電器の板の間に粒子を導き入れた状態で觀察した。此際粒子が若し電氣を帶びて居れば電氣泳動 (Cataphoresis) を起してどちらかへ動かされる筈である。實際其際或る粒子は正極へ或る粒子では負極に向つて動くことを見出した。又或る粒子では全々動かない。彼は此等粒子の持つ電荷に就ての研究を約束したが其の翌年の五月其の約束の發表をして居るが此の仕事が先づ此の方面の定量的な研究の最初のもつと云つてよい。¹⁰⁾ 此の研究によると De Broglie は煙草の煙に凝集させた微細な水滴を使用して觀測して居るのである。

今此の粒子が電場の力 F の下に其粒子の持つ電荷 e の爲に速度 v で動くとすれば此の際の運動の式は次の形で與へられる。

$$F \cdot e = K \cdot v \dots\dots\dots(1)$$

式中 K は粒子が運動する際媒體によりて生ずる抵抗を示す項で其値は媒體の粘度粒子の形大きさ等に関係する項である。即ち粒子の運動を起す外力の大きさと其の外力によつて起る粒子の速度との比に相當する量である。若し此の際粒子が球形だとし従つて Stokes の法則が當筋まるとすれば K は $6\pi\mu r$ で示される。

(246)

(平田丈夫) Brown 運動理論の検証

又一方 Brown 運動に起因して自然に t 秒間に x と云ふ變位を起すとすれば Einstein の式が與へられる。即ち

$$\bar{x^2} = \frac{2RT}{N \cdot K} t \dots\dots\dots(2)$$

始めに述べた Einstein の式では $K=6\pi\eta r$ として Stokes の法則を適用した場合を示したが、(2) の式は一般の形で K と云ふ項で示した譯である。此の際(1)の式中の K と(2)の式中の K とは全々同一の値である筈である。同一粒子を観察して居る譯であるから。従つて此の(1)(2)の式から K を消去することが出来る。即ち

$$\bar{x^2} = \frac{2RT}{N} \cdot \frac{v}{F \cdot e} \cdot t \dots\dots\dots(3)$$

$$e = \frac{2RT}{N} \cdot \frac{v \cdot t}{F} \cdot \frac{1}{\bar{x^2}} \dots\dots\dots(3')$$

(3)を用ひれば e を知れば x を知る事が出来る。De Broglie は逆に(3')の式を用ひて、Brown 運動による變位を測り粒子の持つ電荷の決定を行つて居るのである。(3')の式には尙 N の値を知る必要があるが De Broglie は Perrin が得た N の値¹¹⁾を用ひた。而して $e=4.5 \times 10^{-10}$ e.s.u. を得て居る。又大きい粒子で此の値の數倍の値を得て居るがこれは e の何倍かの電荷を持つて居る爲だと説明して居る。此の De Broglie の方法を改良したものが Millikan の油滴法 (oil drop method) で電子の單原電荷の決定に使用された方法であり、¹²⁾同時に Brown 運動の驗證中最も正確なものと考へられ得る Fletcher の實驗¹³⁾に使用された方法なのである。Millikan 並に Fletcher は De Broglie の方法を改良した。第一に De Broglie の用ひた水平方向の電場を垂直方向に改めた。即ち蓄電器を水平の位置に使用した。斯くすることに依り電場の方向が重力の方向と平行させ得ることになり、觀測中の粒子が重力により落

下して遂に視野外に脱出する様な場合にも重力に反対の方向に電場を與へることにより粒子の落下を防ぎ常に同一の粒子を長時間視野中に保つ事が出来る。従つて同一粒子に就き長時間に亘り多くの測定を行ふことが出来る。此の點は確かに此の油滴法の著しい長所だと云はねばならない。同一粒子に就き測定を繰り返して行ふことが出来れば其の際の抵抗に關係する項 K は常に一定だと考へてよいが、多數異つた粒子について測定した場合 K は粒子の形、大きさ等が各異なる筈であるから K の値を皆等しいとすることは出来ない。又假ひ粒子を等大にしたものを使用したとしても事實上 K の値は一定だと断定することは出来得ない。計算の際、 K は一定だとの假定を置いてすゝむより外はない。此の理由からも同一粒子のみで測定し得ることはより勝れた方法である。

第二の改良點とは観測する粒子が電荷を帶びて居なかつたり偶然測定中に電荷を失つたりした様な場合に γ 線或は X 線を用ひて媒體の空氣をイオン化させ粒子に電荷を與へ得る様にした工夫である。

又粒子として水滴を採らず油滴粒子を使用した。

此様な工夫の下に行はれた Fletcher の Brown 運動測定の研究は他の Brown 運動測定の研究に比べていろいろの點で特徴がある筈である。繰り返して其の特徴を列記して見ると、(1) 氣體を媒體とした散亂系を用ひた點。(2) 減壓の下に行つた點。(3) 油粒子を使用した點。即ち液狀の微粒子を用ひた點。(4) 外力として重力以外に電場を使用した點。(5) 電場を重力の場に平行させることにより同一粒子にのみ繰り返して觀察を向け得従つて多數別々の粒子について測定して皆同一の狀況に有りとする様な假定を除き得た點。(6) 理論的に考へて不確定な媒體中の抵抗に關した項 K を消去したこと。(7) 變位を測定する普通の

方法の代りに一定距離を移動するに要する時間の方の測定を行つた點。此れは測定の正確さから云つて勝れた方法だと云ひ得るのである。以下 Fletcher の驗證に就て紹介する。

理論式の誘導

I 媒體分子の衝突以外には外力の作用のない状態で一定時間中に起す變位の値と起る回數との分配關係。

元來散亂系内に於て一粒子に對し周圍の媒體分子が衝突する場合該分子が粒子に與へる運動量 (Momentum) は方向によつても異り又時間によつても異なる従つて一定時間内に粒子の示す變位 (Displacement) は時間的に絶へず其の方向並に其の大きさが變つて行く。今 t 時間内に起る變位が x と $x+dx$ との間の値を示す様な機會 (Chance) を計算して見る。

今一般に考へて變位が x, y, z と $(x+dx), (y+dy), (z+dz)$ の間に在る機會を與へる函數は $f(xyz) \cdot dx dy dz$ で示されるとして置く。變位に際しての方向に就いては機會は全くどの方向に於ても等しい筈であるから上記の函數は當然其の座標軸を如何に入れ換へても同一の形で示される様な函數でなければならぬ。即ち此の函數は座標軸の轉換に對し不變でなければならない。不變函數の理論から直ちに此の狀件を満足する唯一の函數は動徑 (Radius Vector) の函數丈であることを知る。即ち $f(x^2+y^2+z^2)$ でなければならぬ。今 $F(x)dx$ を變位の x 軸の方向の分變位が x と $x+dx$ との間の値をとる機會を示すとすれば當然 y の方向の分變位が y と $y+dy$ の間になる機會は $F(y)dy$ であり又 z の方向の分變位が z と $z+dz$ との間に来る機會は $F(z)dz$ で示される筈である。而して夫々一方向の分變位が他の方向の分變位には無關係で起ると云ふ假定の下に確率論 (Theory of Probaleility) から變位が x, y, z

と $(x+dx)$, $(y+dy)$, $(z+dz)$ との間にある機會は明かに此等の積で與へられる譯である。即ち以上述べた説明により

$$f(xyz)dx dy dz = f(x^2+y^2+z^2)dx dy dz \dots\dots\dots(1)$$

$$f(x^2+y^2+z^2)dx dy dz = F(x)F(y)F(z)dx dy dz \dots\dots\dots(2)$$

$F(0)=A$ とすれば (2) より次の式が得られる。

$$f(x^2) = A^2 F(x),$$

$$f(y^2) = A^2 F(y),$$

$$f(z^2) = A^2 F(z),$$

従つて (2) により,

$$f(x^2+y^2+z^2) = \frac{1}{A^6} f(x^2) f(y^2) f(z^2)$$

今 $H(x^2) = \log \left\{ \frac{1}{A^3} f(x^2) \right\}$ と置いて見ると

$$H(x^2+y^2) = H(x^2) + H(y^2)$$

故に

$$H(x^2) = -\alpha x^2$$

又

$$H(y^2) = -\alpha y^2$$

故に求むる函数は次の形だと云ふ事が分る。

$$f(xyz) = A^3 e^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)} \dots\dots\dots(3)$$

従つて又

$$\left. \begin{aligned} F(x)dx &= A e^{-\alpha x^2} \cdot dy \\ F(y)dy &= A e^{-\alpha y^2} \cdot dy \\ F(z)dz &= A e^{-\alpha z^2} \cdot dy \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

(4) によつて變位が x と $x+dx$ との間に来る確率が與へられたから今同一の粒子を用ひ n 回の變位を觀測して見た際に其の n 回中で變位が x_1 と x_2 との間の値を示すものが n 回あるとすれば其の回数 n は次の式で與へる事が出来る。^{*}

* 以下簡單の爲に x 方向丈に就て述べて行く。

(250)

(平田丈夫) Brown 運動理論の検証

$$n = \eta \cdot \int_{x_1}^{x_2} \Lambda e^{-\alpha x^2} \cdot dx \dots\dots\dots (5)$$

η は全回数で $\int_{x_1}^{x_2} \Lambda e^{-\alpha x^2} \cdot dx$ は變位が x_1 から x_2 の間にある確率であるから従つて n は此の兩者の積で得らるる。

此の(5)式中で Λ と α は x には無關係の函数で次の様な計算をやれば其の値を出すことが出来る。つまり變位について $-\infty$ の値から $+\infty$ の値までを集めると考へれば全體の回数に當ることになる故此の際は n でなくて η を與へることになる。即ち次の關係が成立する。

$$\begin{aligned} \eta &= \eta \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda e^{-\alpha x^2} \cdot dx \\ &= \eta \cdot \Lambda \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cdot dx \\ &= \eta \cdot \Lambda \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \end{aligned}$$

又他方に次の關係がある。

$$\begin{aligned} \bar{x^2} &= \frac{1}{\eta} \cdot \left(\eta \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \Lambda e^{-\alpha x^2} \cdot dx \right) \\ &= \Lambda \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} \cdot dx = \Lambda \cdot \frac{1}{2} \alpha^{-\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

但 $\bar{x^2}$ の一印は平均を意味する。

此等の式より次の關係を得る。

$$\Lambda = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \dots\dots\dots (6)$$

$$\alpha = \frac{1}{2x^2} \dots\dots\dots (7)$$

上式中の η は η 個の同様の粒子があつて同じ t 秒間に各變位を起すと考へても同様の式が誘導され得る。

—(紹介)—

II 球形粒子が媒體中を等速度で動かされる時に呈する抵抗に就て。

瓦斯體内で粒子が運動する時の法則は、流體力學の基本的な式から出發した近似的なものであるが有名な Stokes の式を適用することが出来るが Stokes の式には次の假定が含まれて居る。(1) 媒體が連続的な媒質なること。(2) 又それが壓縮されない性質のものなること。(3) 密度の均一なること。(4) 媒體に外部より壓を加へる様な外力のなきこと。(5) 數式誘導の際行ひたる近似の爲の無視。(6) 粒子の表面に於ては迂りは起らざること。

以上の假定の下に、 v なる定速度で動いて居る半径 a の球形粒子に於て其の速度を起させて居る外力を F とすれば Stokes の式は

$$F = 6\pi\mu a v$$

である。但 μ は媒體の粘度を表はす。

若し粒子の表面で媒體との間に¹⁴⁾迂りがあるとすれば流體力學の方から次の形の式が與へられる。

$$F = 6\pi\mu a k' v \dots\dots\dots(8)$$

$$\text{式中 } k' = \frac{1 + \frac{2\mu}{\beta a}}{1 + \frac{3\mu}{\beta a}} \dots\dots\dots(9)$$

β は外面の磨擦係数を示す若し、迂りの係數 (Coefficient of Slip) ρ を $\rho = \frac{\mu}{\beta}$ で示すとなれば

$$k' = \frac{1 + \frac{2\rho}{a}}{1 + \frac{3\rho}{a}}$$

若し又 $\left(\frac{\rho}{a}\right)^2$ を $\frac{\rho}{a}$ に對し無視出来れば

—(紹介)—

(252)

(平田文夫) Brown 運動理論の検証

$$k = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{a}} \dots\dots\dots(10)$$

別に瓦斯分子の状態を考察して Stotes の式を補正した Cunningham の式がある。Cunningham は媒體の瓦斯分子が粒子に衝突する確率を考察に入れて確率論を適用して次の式を得た。¹⁵⁾

$$F = 6\pi\mu akv \dots\dots\dots(11)$$

式中

$$k = \left(1 + \frac{\frac{3l}{2a}}{f - 2(f-1)}\right) \dots\dots\dots(12)$$

但、 l は瓦斯分子の平均自由徑路 (Mean free Path), f は衝突總數中彈性的衝突の分の總數に對する割合を示す分數。其の時の粒子と瓦斯の種類によりて値は變るものである。Millikan は電子の單原電荷決定の實驗に必要上空氣中での油の微粒子の運動の際に就いて實驗的に調べたが此の場合 f は零としてよりと云ふ事を知るを得た。従つて式は

$$k = \frac{1}{1 + \frac{3}{4} \frac{l}{a}} \dots\dots\dots(13)$$

(10) と (13) を比較するに

$$\rho = \frac{3}{4} l$$

と置けば (10) と (13) は同一となる。

瓦斯分子の活動説から Meyer は¹⁶⁾ 迂りの係數を與へて居る。

即ち
$$\rho = \frac{4}{B} \cdot 0.3097 \cdot l$$

式中 B は分子が粒子の表面に附着する爲に生ずる分子の速度の減少に關係する數で 0 と 2 との間の値を示すものである。

—(紹介)—

又 Maxwell は非弾性的な場合には $\rho = \frac{2}{3}l$ になると云ふことを示して居る。^{v)} 其様な譯で $\frac{l}{a}$ の値さへ 1 に比して充分小さな値になつて居れば(10)でも(13)でもいい譯である。1 より $\frac{l}{a}$ が大きくなれば兩者は大變違ふことになる。

兎も角粒子の質量が m で半径が a の時若し重力で落下して居る場合は $F=mg$ であるから

$$mg = 6\pi\mu akv$$

$$\therefore v = \frac{mg}{6\pi\mu ak} \dots\dots\dots (14)$$

III 媒體分子の衝突による粒子の變位の平均二乗値。

今粒子に衝突する分子等の不平均から、其の結果として粒子に對してあらはれることになる力の x 軸の分力を X で示し粒子の質量を m とし $-F$ を實際にあらはれる抵抗とすれば粒子の x 軸に沿つた運動の式は次の形になる。 t は時間を示す。

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -F + X$$

Cunningham 等の式を採り、 $v = \frac{dx}{dt}$ で示せば

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -6\pi\mu ak \cdot \frac{dx}{dt} + X \dots\dots\dots (15)$$

x を兩邊に乘じ $\frac{d(x^2)}{dt} = 2x \cdot \frac{dx}{dt}$ 並に $v = \frac{dx}{dt}$ と置くと(15)は次の形になる。

$$\frac{m}{2} \cdot \frac{d^2x^2}{dt^2} + 3\pi\mu ak \cdot \frac{dx^2}{dt} = m v^2 + X \cdot x \dots\dots\dots (16)$$

此の形の式を η 式書く。即ち η 個の同様の粒子に就て各 t 時間の運動を考へるとすれば各の粒子に對して此式と同形の式が與へられ全體として μ 個の式を書き得る譯である。そしてそれらを集めて平均

(254)

(平田文夫) Brown 運動理論の検証

したと考へると次の式で示すことが出来る。

$$\frac{m}{2} \frac{d\bar{z}}{dt} + 3\pi\mu ak\bar{z} = \frac{m}{\eta} \sum_1^n v_n^2 + \frac{1}{\eta} \sum X_n \cdot x_n \quad \dots\dots\dots(17)$$

若し η の値を充分に多くとれば右邊最後の項 $\sum X_n x_n$ の値は零に等しくなる。と云ふ譯は粒子は正の方向に動くも負の方向に動くも同じ確率を持って居る。故に同じ X で $X \cdot x$ の正の値を持つ回数にはほとんど同じ丈の負の値の $X \cdot x$ が必ず起つて居る筈であるから互に打消し合ふ筈であり従つて $\sum X_n x_n$ は η が充分に大きい値になれば零に等しいとしてよい。即ち無視してよいことになる。又 η 個の粒子について同じ t 秒間に起る變位を考へて平均しても只1個の粒子を採り t 秒間宛の變位を η 回引續けて行ひ其の平均をとる場合も式は全く同様に上記の形で示し得る。

又單一の粒子に就て多時間に亘つて考へた運動エネルギーの平均値は多數同様の粒子について或る一短時間内に就て考へた運動エネルギーの平均値に等しいと考へてよい。から $\frac{1}{2} \frac{m}{\eta} \sum_1^n v_n^2$ の値は一粒子が一方向のみに長時間直線移動をやる時の運動エネルギーに等しいとしてよろしい。

又 ε を瓦斯分子の平均運動エネルギーとすればエネルギー等分律によつて x 方向には $\frac{1}{3}\varepsilon$ であるから

$$\frac{1}{2} \frac{m}{\eta} \sum_1^n v_n^2 = \frac{1}{3}\varepsilon \quad \dots\dots\dots(18)$$

斯くして(16)の式は次の形となる。

$$\frac{m}{2} \frac{d\bar{z}}{dt} + 3\pi\mu ak\bar{z} = \frac{2}{3}\varepsilon \quad \dots\dots\dots(19)$$

此の微分方程式を解いて、

$$\bar{z} = \frac{2}{3}\varepsilon \frac{1}{3\pi\mu ak} + Ae^{-\frac{6\pi\mu ak t}{m}} \quad \dots\dots\dots(20)$$

—(紹介)—

右邊の第二項は無視してよい。何となれば今 $6\pi\mu ak=K$ と置いて見る。そして又 $k=1$ と見て $K=6\pi\mu a$ と考へて置く。Brown 運動の測定に用ひられる粒子の半径はざつと 10^{-4} 以下である。今假りに粒子の密度を 1 として見ると

$$\frac{m}{K} = \frac{\frac{4}{3}\pi(10^{-4})^3}{6\pi \times 0.018 \cdot 10^{-4}} = 10^{-5}$$

従つて $t > 10$ 秒であれば $e^{-\frac{K}{m}t}$ の値は零に近い値になる譯である。

大體此の計算で見てもほとんども見當がつく様に前記(20)式の第二項を無視しても差支へない。

斯くして

$$\overline{x^2} = \frac{2\epsilon t}{9\pi\mu ak} \dots\dots\dots(21)$$

今 $\frac{\epsilon t}{9\pi\mu ak} = K^2$ と置けば

$$\overline{x^2} = 2K^2 \dots\dots\dots(23)$$

此の $\overline{x^2}$ の値を I で最後に得た式に代入すればいろいろの関係式が得られる。

III 一定の外力の下に動かされて居る球形の微粒子に及ぶ Brown 運動の影響。

粒子が示す變位は此の場合は二ツに分けて考へられ得る即ち外力を今重力だとすれば一ツは重力に原因する變位、他は Brown 運動に原因する變位とすることが出来る。

重力の方は簡單である。即ち此の方の變位は Vt で示される。V は速度 t は時間である。或は V は恒數なる故、重力に起因する變位は時間に比例すると云つてもよい。然るに Brown 運動による方の變位は時間 t の平方根に比例する。(21)式を見て明なる如く)

(256)

(平田文夫) Brown 運動理論の検証

故に

$$x = u \cdot \sqrt{t} \dots\dots\dots (22)$$

と置いてよい。

u は比例恒数である。即ち 1 秒間に起る Brown 運動による變位であつて t には無關係の値である。従つて測定毎に變つた値を示し其の變り方の分配關係は(5)式に従ふ所であることは勿論である。

(3)式中に(22)の式(7)の α の値及び(21)式を代入すれば次の結果が得られる。

$$u = \eta \sqrt{\frac{h}{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-\frac{h}{2} u^2} \cdot du \dots\dots\dots (23)$$

但し

$$h = \frac{9\pi\mu ak}{4\varepsilon} \dots\dots\dots (24)$$

 u の平均値は

$$\bar{u} = 2 \sqrt{\frac{h}{\pi}} \int_1^2 u e^{-\frac{h}{2} u^2} \cdot du = \sqrt{\frac{1}{\pi h}} \dots\dots\dots (25)$$

或は

$$\bar{u} = 3 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi\mu ak}} \dots\dots\dots (26)$$

故に今外力並に Brown 運動に起因する總變位の値を b で示すとすれば次の式が與へられる。

$$b = Vt + u\sqrt{t} \dots\dots\dots (27)$$

今一定時間に於ける總變位の値の分配關係の式を求める爲に(27)の V と t を恒數と見て其の式を用ひて(23)中の u を b に入れ變へる。斯くすれば η 個の變位の内で b_1 と b_2 の間に有るものの數 n が得られる譯である。即ち

$$n = \eta \sqrt{\frac{h}{\pi t}} \int_{b_1}^{b_2} e^{-\frac{h}{2t}(b - Vt)^2} db \dots\dots\dots (28)$$

従つて總變位の平均の値 $\bar{b}$ は(29)で與へられる。

— (紹 介) —

$$\bar{b} = \sqrt{\frac{h}{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} b \cdot e^{-\frac{h}{t}(b-Vt)^2} \cdot db = Vt \dots\dots\dots(29)$$

此の結果は(27)から直接に得らるる筈である。と云ふ譯は t が一定で u の平均値は零になる筈であるから。

同様にして粒子が定距離の間を落下するに要する時間の値も測定毎に違つた値を與へることは Brown 運動が關係して居る以上必然に起る事實であるが其の落下時間の分配關係を示す式も得らるる。今度は V と b を一定として u なる變數を t と變へれば t_1 と t_2 との間の値を持つものの數 n は次の式で示される。

$$n = -\eta V \sqrt{\frac{h}{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} \frac{b t^{-\frac{3}{2}} + V t^{-\frac{1}{2}}}{2} e^{-\frac{h}{t}(b-Vt)^2} \cdot dt \dots\dots\dots(30)$$

今 $t_0 = \frac{b}{V}$ と置いて見ると

$$n = \frac{\eta V}{2} \sqrt{\frac{h}{\pi}} \int_{t_0}^{t_2} (t_0 t^{-\frac{3}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}) e^{-\frac{h}{t}(b-Vt)^2} dt \dots\dots\dots(31)$$

(27)を $\sqrt{t}$ につぎ解けば

$$\sqrt{t} = \frac{-u + \sqrt{u^2 + 4bV}}{2V}$$

此の式によつて極限值を決定することが出来る。即ち $u_1 = -\infty$ ならば其時の t_1 は ∞ となる。 $u_2 = +\infty$ とせば之れに相當する t_2 は零となる。故に(31)式は次の形になる。即ち 0 から ∞ までをとれば $n = \eta$ に當る故(31)は

$$\eta = \frac{\eta V}{2} \sqrt{\frac{h}{\pi}} \int_0^{\infty} (t_0 t^{-\frac{3}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}) e^{-\frac{h}{t}(b-Vt)^2} dt \dots\dots\dots(32)$$

即ち
$$1 = \frac{1}{2} V \sqrt{\frac{h}{\pi}} \int_0^{\infty} (t_0 t^{-\frac{3}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}) e^{-\frac{h}{t}(b-Vt)^2} dt$$

又 t の平均値を $\bar{t}$ で示せば

(258)

(平田文夫) Brown 運動理論の検証

$$\bar{t} = \frac{1}{2} V \sqrt{\frac{h}{\pi}} \int_0^{\infty} t \left(t_0 t^{-\frac{3}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} \right) e^{-\frac{h}{4} (b-V)^2 t^2} dt$$

$$\bar{t} = \sqrt{\frac{h}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-h u^2} du$$

$$\bar{t} = \sqrt{\frac{h}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2u^2 + 4bV - 2u\sqrt{u^2 + 4bV}}{4V^2} e^{-h u^2} du$$

これより

$$\bar{t} = \frac{1}{4bV^2} + \frac{b}{V} \dots \dots \dots (33)$$

此の式を V に就て解けば

$$V = \frac{b}{\bar{t}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{\bar{t}}{hb^2}} \right) \therefore \bar{V} \left(1 + \frac{\bar{t}}{4hb^2} \right) \dots \dots \dots (34)$$

従つて

$$t_0 = \bar{t} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{\bar{t}}{hb^2}} \right)^{-1} = \bar{t} \left(1 + \frac{\bar{t}}{4hb^2} \right) \dots \dots \dots (35)$$

此等の式は次の事實を述べて呉れる。一定時間に就ての粒子の落下距離は測定毎に種々一定せない値を示すが其の場合充分多くの測定値の平均をとれば其の平均値は重力のみによる落下距離の値に等しくなる。又一方一定距離の落下に要する時間は又測定毎にいろんな値を示すが充分に多くの測定を行つて其の平均をとつて見た場合今度は前の場合とは異つて重力丈による落下時間には等しくなつて来ぬ。而して其の場合其の差は大體に言つてそれが小さい値の間は其の落下する距離の二乗に逆比例すると云つてよい。

(31)の積分値は圖表による方法でやるか或は誤差函數表によるかしてやれば得ることが出来る。誤差函數として表より見出す場合(31)は $\eta \sqrt{\frac{h}{\pi}} \int_{t_0}^{\frac{1}{2}V} \frac{1}{2} \left(t_0 t^{-\frac{3}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} \right) e^{-\frac{h}{4} (b-Vt)^2} dt = \eta \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{s_2}^{s_1} e^{-s^2} ds$ と見て $s = \sqrt{h} \frac{b-Vt}{\sqrt{\pi}}$ と考へればよろしい。

以上此章で説明したどの式も皆粒子に一定の外力が作用して居る場合に成立する譯である。尙必ずしも其外力は重力に限られた譯でない。従つて例へば粒子が電荷を持つて居て電場内にあるとすれば粒子は電氣的引力によつて動される此の様な場合にも勿論適用され得る。

最後に落下時間の分配の様子或は變位値の分配の様子が如何なるかに就いて前述の諸式を用ひて算出し様とする際如何しても式中の h の値を知る必要がある。如何して h の値を決定するかと云ふと次の様にする。

今油粒子の質量を m とし電荷は電子の電荷 e を持つとする。此の粒子が重力の作用で落下する時の速度を V とし、一方 E なる強さの電場の下で落下する時の速度を V' とし速度は作用して居る力に比例するものと云ふ假定をすれば次の關係式を書き得る。

$$\frac{E \cdot e + mg}{mg} = \frac{V'}{V}$$

次に又落下の際に受ける抵抗に就ては次の式で示される。

$$6\pi\mu akV = mg$$

此の兩式より m を消去すれば

$$ak = \frac{E \cdot e}{(V + V') \cdot 6\pi\mu}$$

然るに

$$h = \frac{9\pi\mu ak}{4\epsilon}$$

而して

$$\epsilon = \frac{3}{2} \frac{RT}{N}$$

であるから次式が得られる。

—(紹介)—

(260)

(平田文夫) Brown 運動理論の検証

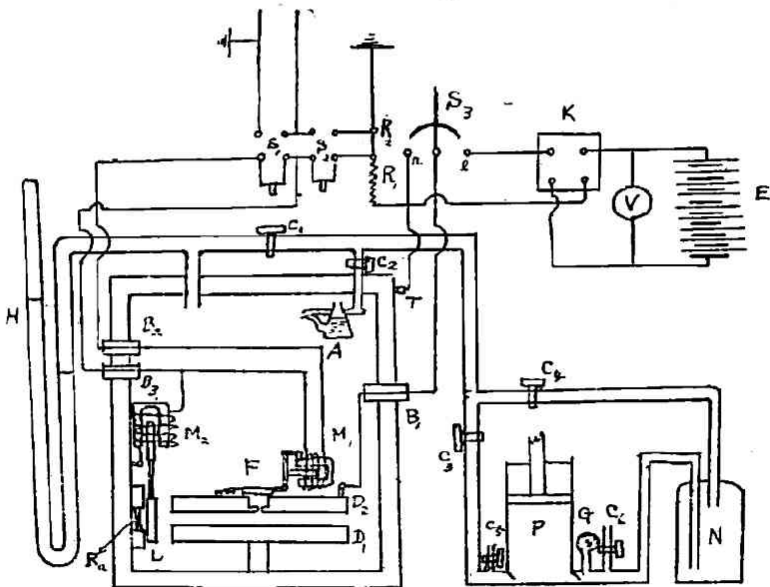
$$h = \frac{1}{4} \frac{Ne}{RT} \frac{E}{(V+V')}$$

$$\bar{u} = 2 \sqrt{\frac{RT}{\pi Ne}} \sqrt{\frac{V+V'}{r}}$$

此式を見ると次の事がわかる。即ち此式には h を含んで居らないから媒體中を粒子が運動する際の法則には関係ない形である。即ち之の式は粒子の Brown 運動による變位を粒子の密度や媒體瓦斯の粘度等には関係なしに與へ得る式である。ただ此場合一つの假定が含まれて居る。其の假定とは既に述べたが粒子が媒體中を運動する時の速度が作用する外力に比例すると云ふ假定である。しかも此の假定の正しい事は完全に證明されて居ることである。

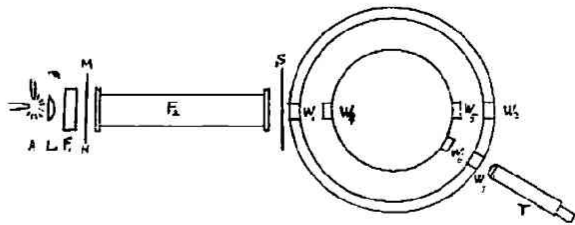
斯くの如く $\bar{u}$ と h の値は電場の強さ E , 速度 V 及び V' , $\frac{Ne}{RT}$ が知れ

第一圖



—(紹介)—

れば計算出来る譯になつた。然るに $\frac{Ne}{RT}$ は他の方面から充分正確に知り得る値である。従つて $\bar{u}$ 及び $\bar{h}$ は E, V, V' を測定することにより決定し得らるる譯になる。



第二圖

以上で驗證に用ひる諸式の誘導に就て述べ終つたから次に實驗裝置並に結果に就て述べる。

實驗裝置 Brown 運動の驗證として Fletcher が使用した測定裝置は Millikan と彼が減壓氣體内に於ける粒子の運動の理論式を驗證する目的で使用したものである。

次のは其の裝置を示す。第一圖は垂直切斷圖第二圖は水平切斷圖である。

主要部は第一圖に四角に示されて居る大型の眞鍮製圓筒形の容器中に密閉されて居る。而して其の容器は全體油液恒温槽中に入れて溫度を一定に保てる様にしてある。此の圓筒中にある D_1, D_2 は水平の位置に設置された二枚の金屬製圓板から出來て居る蓄電器であつて其の内上位にある圓板 D_2 の中央に小穴が穿たれてある。 M_1, M_2 は共に電磁石であつて M_1 の方は D_2 の小穴の蓋 F を開閉する爲め、又 M_2 の方は必要に應じて鉛製の遮斷板 L を引き上げるに用ひられる。 L は常に閉ぢられて居るが引き上げられると豫め裝置して置いた臭化ラヂウム Ra が露出する爲に其れから見る放射線の爲に D_1, D_2 間の空氣がイオン化され其結果觀測中の油粒子に電荷を帶びさすことが

(262)

(平田文夫) Brown 運動理論の検証

出来る様になる。次に観測する油粒子は如何して作るかと云ふと A なる吹霧器 (Atomizer) で壓搾空氣により油を霧狀に吹き出させる様になつて居る。F を開いて置いて落下する其の霧の様な油粒子のものの内で適當な微粒子一個が D_1, D_2 間にはいつた時 F を閉ぢて終ふのである。次に B_1, B_2, B_3 は眞鍮製圓筒形器中に針金を導入する爲の埋管である。P は圓筒形器中の空氣を任意に壓縮或は排氣する爲のポンプである。G は高度壓力計 II は普通の低壓用の液柱壓力計である。圓筒器中に入れる空氣は皆一度硝子綿に濃硫酸を浸したものを容れた N 中を通過させ濕氣や塵埃を除かれる。

$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ は活栓 R_1, R_2 は夫々 20 オーム、450 オームの抵抗 S_3 はスイッチで r の方に接続すれば D_1 と D_2 が連絡され共に接地される様になり D_1, D_2 間の電場は消える様になる。l の方に接続すると D_1, D_2 間に電場を生じ而して電場の強さはボルトメーター、V で測定される。勿論電壓は電池 E により與へられる。 S_1, S_2 は夫々電磁石 M_1, M_2 を支配する爲のスイッチであり、K はコンミューターである。

第二圖水平斷面圖は観測する爲の裝置を示す。A は光源のアーケで、レンズ l , 熱線吸収用の四十吋の水槽 F, 細隙 S を通過した光は硝子小窓 W_1, W_2 を通つて前記 D_1, D_2 間の中央に浮遊せる油粒子を照することになる。 W_1, W_2, W_3 は油液恒温槽の方に設けられた観測用の小窓であり W_4, W_5, W_6 は眞鍮圓筒の方に設けられた硝子の小窓である。照し出された油粒子は望遠鏡 T で其の落下速度を観測されるのである。M, N は観測の場合の外は光を遮斷する爲のスクリーンである。

さて観測を行ふ場合には先づ活栓 C_1, C_2 及び C_3 を開き圓筒器中の空氣を壓力計 II が必要の壓力を示すまでポンプで排氣す而して活栓

を閉じる。次に C_1, C_2 を開き空気を N 中に壓縮する。次にスキャッチ S_1 を入れ蓋 F を開き又 C_2 を開き霧吹器 A により油の霧を圓筒内に造る。出来た細い油の粒子は D_2 の上に落下して来る。而して都合よく行けば適當な細さの一油粒子は D_2 中心に窄つた小孔を通つて蓄電板 D_1, D_2 間の照光の進路に顯れて明瞭に望遠鏡 T で觀察出来る様になる。適當なものが得られたら F を閉ぢ他の油粒子の進入を遮斷する。又若し油粒子が電荷を帶びて居なかつたり觀測中電荷を失つた様な時には前述の通りに S_2 を入れて粒子に電荷を持たせる様にする必要がある。

電壓を適當に加減すれば粒子を D_1, D_2 間で思つた速度で移動させる事が出来るし又重力による落下の方向に對し反對方向に引上げる様な方向に電場の方向をとり電壓を加減する事により粒子に作用する二つの力の平衡を保たせれば望遠鏡の視野中に望む丈の時間粒子を停止させて置くことが出来る。斯様にして長時間に亘り同一粒子に就て觀測を繰り返して行ふ事が前来る。實際 Fletcher は 5 時間に亘り同一の粒子に就て 411 回の變位を測定して居るのである。

此點は確かに此の油滴法 (oil drop method) が De Broglie の法などに比して勝れた點である。

測定値と計算値との比較

I. 一定時間に起す變位。

Brown 運動のみに因る變位を測定する爲には電場を重力の方向と反對に作用させ其の強さも適當に加減して兩力を平衡させて置き油粒子が上方にも下方にも動かない状態に保つて置いて毎 10 秒毎に望遠鏡の視野中の一基準線に對する垂直上下の變位を測定することになればよろしい。第一表乃至第三表は此方法での實驗の結果を示し

(264)

(平田文夫) Brown 運動理論の検証

たものである。但し第一表は V 及 V' を決定する爲の測定値を示し又其の値より得た h の値を示す。各表には使用した油粒子の番號を示してあるが Fletcher の研究では油粒子は全體で 9 つ使用して居るので各に夫々番號を附して示されて居る。

第 一 表

Drop. No. 1, 測定温度 23°C, 壓力 2.12 cm.		
t for 0.522 cm	t' for 0.522 cm	
40.6	14.1	
40.5	13.9	
40.3	13.6	$V = 0.01311$
39.0	14.0	$V' = 0.03725$
39.2	14.4	volts = 334.5
39.4	13.9	
38.6	14.2	$h = 4.05 \times 10^{-4}$
41.0	13.9	
39.0	14.0	
40.7	14.2	

第二表には 10 秒間に起る變位を其の測定の際によらないで測定値の大きさの順に列記してある。

第 二 表

$x \times 0.00746$ cm, for 10 sec. intervals. Drop. No. 1.									
+2.39	+1.72	+1.50	+1.27	+0.97	+0.90	+0.75	+0.52	+0.37	+0.08
+2.09	+1.65	+1.50	+1.27	+0.90	+0.82	+0.75	+0.52	+0.37	+0.08
+2.02	+1.65	+1.50	+1.20	+0.90	+0.82	+0.75	+0.52	+0.30	+0.08
+1.87	+1.65	+1.40	+1.20	+0.90	+0.75	+0.67	+0.52	+0.15	± 0.00
+1.80	+1.65	+1.35	+1.20	+0.90	+0.75	+0.67	+0.52	+0.15	± 0.00
+1.74	+1.50	+1.27	+1.05	+0.90	+0.75	+0.60	+0.37	+0.15	± 0.00

—(紹介)—

±0.00	-0.15	-0.30	-0.37	-0.67	-0.82	-0.97	-1.27	-1.80	-2.32
±0.00	-0.22	-0.30	-0.37	-0.67	-0.82	-1.12	-1.35	-1.80	-2.46
±0.00	-0.22	-0.30	-0.45	-0.75	-0.82	-1.20	-1.42	-1.87	
±0.00	-0.22	-0.30	-0.45	-0.75	-0.97	-1.20	-1.57	-1.87	
-0.08	-0.22	-0.30	-0.52	-0.75	-0.97	-1.20	-1.57	-1.87	
-0.15	-0.30	-0.37	-0.60	-0.75	-0.97	-1.22	-1.67	-1.94	
-0.15	-0.30	-0.37	-0.60	-0.82	-0.97	-1.27	-1.72	-2.09	

$$\bar{x}(\text{obs}) = 8.95 \times 10^{-3} \text{cm}, \quad \bar{x}(\text{calc}) = 8.76 \times 10^{-3} \text{cm}.$$

又變位 x の平均値 $\bar{x}$ に就て測定値 (obs) と計算値 (calc) との比較を示してある。

第三表では變位 x の値が x_1 と x_2 との間にあるものの數 n を第二表によつて計算し測定値から得らるる數と (5) 式によつて計算した計算値とを比較したものである。

第 三 表

$x_1 \times 0.00746$	$x_2 \times 0.00746$	$n(\text{calc})$	$n(\text{obs})$
+2.5	+1.5	9.6	13
+1.5	+0.5	29.7	31
+0.5	-0.5	47.4	38
-0.5	-1.5	29.6	27
-0.5	-2.5	9.6	13

II. 粒子が外力の作用して居る状態で一定時間に起す變位

此の場合は重力に反する方向に徐々に移動する程度に電場をはたらかして置き其の状態で10秒毎に示す變位を測定したのである。

第四表内至第六表に其の結果を計算値と比較して示した。第四表は第一表に相當したもの第五表は第二表に第六表は第三表に對應したものである。即ち第四表は h の値の算出の爲の移動速度の測定値

(266)

(平田文夫) Brown 運動理論の検証

を示し第五表は變位の値第六表は變位の分配状態を示す。第四表中 V'' とあるは粒子が單原電荷 e の二個を帶びた場合に呈する速度の値である。

第 四 表

Drop No. 2, Temp=21°C. Pressure=2.08cm.		
t for 0.0522cm	t'' for 0.522cm	
28.8	17.0	volts=107.5
27.1	19.4	$V=0.01933$
26.0	16.2	$V''=0.00303$
27.5	17.5	$V+V'=0.01118$
26.0	17.1	$h=5.91 \times 10^4$
26.3	16.1	
27.0		
27.6		

第 五 表

Drop No. 2

$b \div 0.00746$, for 10 seconds intervals.									
1.4	2.5	3.0	3.4	3.8	4.2	4.5	5.0	5.2	5.7
1.5	2.5	3.1	3.4	3.8	4.2	4.5	5.0	5.2	5.9
1.5	2.5	3.1	3.4	4.0	4.2	4.5	5.0	5.3	5.9
1.7	2.6	3.1	3.5	4.0	4.3	4.6	5.0	5.3	6.1
1.8	2.7	3.1	3.5	4.0	4.3	4.6	5.0	5.3	6.2
1.9	2.8	3.2	3.6	4.0	4.3	4.6	5.0	5.4	6.2
1.9	2.8	3.2	3.6	4.0	4.3	4.6	5.1	5.4	6.2
2.0	2.8	3.2	3.6	4.0	4.4	4.7	5.1	5.4	6.3
2.1	2.9	3.2	3.7	4.1	4.4	4.7	5.2	5.4	6.4
2.1	3.0	3.2	3.7	4.2	4.5	4.7	5.2	5.5	
2.1	3.0	3.2	3.7	4.2	4.5	4.8	5.2	5.5	
2.2	3.0	3.3	3.7	4.2	4.5	4.9	5.2	5.5	
2.3	3.0	3.3	3.8	4.2	4.5	4.9	5.2	5.5	
2.5	3.0	3.3	3.8	4.2	4.5	5.0	5.2	5.5	

$$\bar{u}(\text{obs}) = 2.365 \times 10^{-3} \quad \bar{u}(\text{calc}) = 2.32 \times 10^{-3}$$

—(紹介)—

第 六 表

Drop No. 2.

$b_1 \div 0.00746$	$b_2 \div 0.00746$	$n(\text{calc})$	$n(\text{obs})$
$-\infty$	0	0.00	0.0
0	1	0.88	0.0
1	2	5.56	7.5
2	3	20.04	18.5
3	4	38.80	35.0
4	5	39.40	39.5
5	6	22.40	27.5
6	7	6.65	8.0
7	$+\infty$	1.32	0.0

第六表中 $n(\text{calc})$ は (28) 式により、又第五表 $u(\text{calc})$ は (27) 式により計算せる値である。

III. 一定の距離を粒子が落下するに要する時間

I 及び II に於ては油粒子が一定時間内に起す變位を測定したのであるが反對に一定距離を粒子が落下するに要する時間を測定して見ると既に理論式の誘導の際に述べた様に此の時間の値も Brown 運動に原因して其測定毎に異つた値を與へる。此の時間を測定する方が變位を測定するよりも實際測定上正確に行ひ得るのである。故に Fletcher は主として此の方法で測定して居る。

第七表は第五表と同様の表であるが表中 t' とあるは粒子の電荷は單原電荷一個を帶びて居る時の落下時間で t'' もとあるのは電荷が $2e$ を帶びた時の時間を示す。其時の速度は V'' で示されることは前に述べた。又電荷が $3e, 4e$ となる時は速度は V''' , V'''' で示されるが實際此等の速度のお互ひの關係は理論上

(268)

(平田文夫) Brown 運動理論の検証

$$V+V'=\frac{1}{2}(V+V'')=\frac{1}{3}(V+V''')=\frac{1}{4}(V+V''')$$

で示し得る故 $V+V'$ を求めるのには $\frac{1}{2}(V+V'')$, $\frac{1}{3}(V+V''')$, $\frac{1}{4}(V+V''')$ を用ひて計算される。

第八表は油粒子が 0.0373cm 間を降下するに要する時間を測定値の大きさの順に列べたものである。又第九表は其の時の t 及び u の分配の関係につき実験値と計算値とを比較したものである。

第 七 表

Drop No. 3, temp = 20.0°C, pressure = 23.1cm.			
$b = 0.522\text{cm.}$			
t'	t''	t'''	t''''
58.0	26.0	16.3	11.6
59.0	25.5	16.4	
58.2	25.7	17.0	
59.5	26.3	16.5	
58.4	26.0		
	26.4		
	25.9		
	26.3		

volts = 637

$V = 0.000213$
 $V' = 0.00881$
 $V'' = 0.0205$
 $V''' = 0.0437$

Mean $V + V' = 0.0111$
 $h = 35.6 \times 10^4$

第 八 表

Drop No. 3.

 $b = 0.0373\text{cm.}$ value of t

12.2	12.5	13.2	13.6	13.8	13.8	14.0	14.0	14.0	14.0
12.4	13.0	13.4	13.7	13.8	13.9	14.0	14.0	14.0	14.0

—(紹 介)—

14.0	15.2	16.0	16.6	17.1	17.8	18.5	19.2	20.2	21.5
14.1	15.2	16.0	16.7	17.1	17.8	18.5	19.2	20.2	21.6
14.2	15.3	16.0	16.7	17.1	17.8	18.5	19.4	20.2	21.7
14.2	15.3	16.0	16.7	17.2	17.8	18.5	19.4	20.3	21.7
14.3	15.3	16.1	16.7	17.2	17.8	18.5	19.4	20.3	21.8
14.3	15.4	16.2	16.7	17.2	17.8	18.6	19.4	20.4	22.0
14.4	15.4	16.2	16.7	17.2	17.8	18.6	19.4	20.4	22.2
14.4	15.4	16.2	16.7	17.2	18.0	18.6	19.4	20.4	22.2
14.5	15.5	16.2	16.7	17.2	18.0	18.6	19.4	20.4	22.5
14.5	15.5	16.2	16.7	17.3	18.0	18.6	19.5	20.4	22.5
14.6	15.5	16.2	16.8	17.3	18.0	18.6	19.5	20.4	22.6
14.6	15.5	16.3	16.8	17.4	18.0	18.6	19.5	20.4	23.2
14.6	15.6	16.3	16.8	17.4	18.0	18.7	19.5	20.4	23.3
14.6	15.6	16.3	16.8	17.4	18.0	18.7	19.5	20.4	23.3
14.7	15.6	16.3	16.8	17.4	18.0	18.7	19.6	20.4	23.3
14.8	15.6	16.3	16.9	17.4	18.1	18.8	19.6	20.4	23.3
14.8	15.7	16.3	16.9	17.4	18.1	18.8	19.6	20.6	23.3
14.8	15.7	16.3	17.0	17.5	18.1	18.8	19.7	20.6	24.3
14.8	15.7	16.4	17.0	17.5	18.1	18.8	19.8	20.6	25.4
14.8	15.7	16.4	17.0	17.5	18.2	18.8	19.8	20.6	26.3
14.8	15.7	16.4	17.0	17.5	18.2	18.8	19.9	20.7	20.9
14.9	15.7	16.4	17.0	17.6	18.3	18.8	19.9	20.7	21.0
14.9	15.8	16.4	17.0	17.6	18.3	18.8	19.9	20.7	21.0
14.9	15.8	16.4	17.0	17.6	18.3	19.0	20.0	20.7	21.1
15.0	15.8	16.5	17.0	17.6	18.4	19.0	20.0	20.8	21.3
15.0	15.8	16.5	17.0	17.7	18.4	19.0	20.0	20.8	21.3
15.0	15.8	16.5	17.0	17.7	18.4	19.0	20.0	20.8	
15.0	16.0	16.6	17.0	17.7	18.4	19.0	20.0	21.4	
15.1	16.0	16.6	17.1	17.7	18.4	19.1	20.1	21.5	
15.1	16.0	16.6	17.1	18.8	18.4	19.2	20.1	21.4	

(270)

(平田文夫) Brown 運動理論の検証

第 九 表

Drop No. 3.

Distribution of t				Distribution of u			
t_1	t_2	$n(\text{obs})$	$n(\text{calc})$	u_1	u_2	$u(\text{obs})$	$u(\text{calc})$
0	12	0.0	0.69	$+\infty$	+3.5	0	0.5
12	13	3.5	3.3	+3.5	+2.5	5	5.3
13	14	13.0	10.9	+2.5	+1.5	31	27.1
14	15	31.0	24.2	+1.5	+0.5	74	75.3
15	16	35.0	40.8	+0.5	-0.5	98	105.0
16	17	53.0	52.4	-0.5	-1.5	78	75.3
17	18	48.5	54.7	-1.5	-2.5	27	27.1
18	19	48.0	47.7	-2.5	-3.5	7	5.3
19	20	39.5	35.6	-3.5	$-\infty$	1	0.5
20	21	33.5	23.5				
21	22	12.5	13.7				
22	23	5.5	7.3				
23	24	5.0	3.6				
24	25	1.0	1.6				
25	26	1.0	0.69				
26	∞	1.0	0.47				

$$\bar{t} = 17.65$$

$$\bar{u}(\text{obs}) = 0.990 \times 10^{-3}$$

$$\bar{V} = 0.00211$$

$$\bar{u}(\text{calc}) = 0.945 \times 10^{-3}$$

$$V = 0.00213$$

$$\eta = 321.$$

以上三つの油粒子以外に Fletchen は猶 6 個の油粒子に就て實測し夫々の數値を同様の表で詳しく示して居るが此處には略することにして此等 9 個の油粒子について一目容易に又明瞭に其の驗證の結果を知り得る表丈を次に示す(第十表)。

—(紹介)—

第 十 表

Drop No.	$\bar{u} \times 10^{-3}$	T	V + V'	volts.	$\sqrt{Ne} \times 10^{-7}$	η
1	2.83	294	0.05036	334.5	1.68	125
2	2.365	294	0.01118	107.5	1.67	136
3	0.990	293	0.1110	637.	1.645	321
4	1.061	294	0.01041	483.5	1.695	292
5	1.162	293	0.00863	318.	1.73	171
6	1.256	293	0.0237	828.	1.65	200
7	1.287	293	0.0291	668.	1.66	84
8	1.959	293	0.133	162.7	1.785	411
9	2.43	293	0.0380	353.	1.65	85

Weighted mean $\sqrt{Ne} = 1.687 \times 10^7$, or $Ne = 2.88 \times 10^{14}$

表中 N は Avogadro 恒数 e は電子の電荷 η は測定回数である。此の測定に於て各測定値の輕重が測定回数 η に比例するものとして輕重を考へに入れた平均 (Weighted mean) を求めて見ると表中に示した様に $Ne = 2.88 \times 10^{14} \text{ e.s.u.}$ と云つた値を與へる。此の Ne は又全く別の方法で正確に決定することが出来る。其の全く別の方法とは電解質の水溶液の電解を指すので銀鹽の溶液の電解によつて決定された最も正確な Ne の値は $2.896 \times 10^{14} \text{ e.s.u.}$ 與へられて居る。即ち兩者の數値は充分な一致を示して居る。此の一致は明に Brown 運動による變位の理論が正しい事を證據立てるものである。猶同時に瓦斯中での瓦斯イオンの持つ電荷と水溶液中のイオンの持つ電荷は全く同じ値であることをも證據立てて居る。

Fletcher は猶其後改良した實驗裝置で再び測定を行ひ、又 Millikan が¹⁸⁾油微粒子の運動に於ける Stokes の式を補正して與へた K の値¹⁹⁾を用ひ N の値を算出して $N = 60.3 \times 10^{23} \pm 1.2$ を得て居る。此の値は Millikan の

(272)

(平田文夫) Brown 運動理論の検証

K の値を使用したのであるから勿論獨立的なものでは無いが此の値が現在最も信用されて居る Millikan の得た N の値 60.62×10^{22} とよく一致して居ることはつまり Brown 運動に關する Einstein の理論式並に Millikan の與へた Stokes の式の補正が測定に使用された範圍の粒子 ($2.79 \times 10^{-5} \text{cm} \sim 4.1 \times 10^{-5} \text{cm}$ の直徑のもの) に於ては正しく成り立つことの實證を與へて呉れた譯である。

最後に若し N が決れば e は直ちに計算出来る。此の Fletcher の實驗値がどの程度まで正しいものかを示す爲に Fletcher の得た e の値と他の種々な方法により決定された e の値とを比較したものを掲げる。(第十一表)

第 十 一 表²⁰⁾Values of The Molecular Constants N , n , and e .

No.	Name	Method	$N \times 10^{-22}$	$n \times 10^{-19}$	$e \times 10^{10}$
1	Maxwell	Method Meanfree Path and Density of Liquid (Hg)	45	2.008	6.431
2	Maxwell	Kinetic Theory of Gases	42.7	1.905	6.777
3	Clausius-Mosotti	Dielectric Constant of a Gas	200	8.822	1.447
4	Van der Waals	Value of "b"—Oxygen and Nitrogen	45	2.008	6.431
5	Van der Waals	Value of "b"—Argon	62	2.766	4.667
6	Meyer	General Results of Kinetic Theory	138	6.153	2.097
7	Einstein-Perrin	Diffusion Coefficient	40~90	1.784~4.015	7.235~3.125
8	Rayleigh-Kelvin	Blue Colour of the Sky	54.9	2.449	5.271
9	Rayleigh-Langevin	Blue Colour of the Sky	90	4.015	3.215
10	Planck	Distribution of Energy in the Spectrum of Hot Bodies	61.7	2.752	4.690
11	Lorentz	Electron Theory of Radiation, Long Waves	77	3.435	3.758

(平田文夫) Brown 運動理論の證驗

(273)

No.	Name	Maxwell	$N \times 10^{-22}$	$n \times 10^{-19}$	$e \times 10^{10}$
12	Lorentz-Fery	Electron Theory of Radiation-Fery's Numbers.	66	2.044	4.384
13	Pellat	Electrolytic Ion.	60~150	2.676~6.692	4.823~19.27
14	Townsend	Cloud Experiment	96.46	4.304	3.0
15	J. J. Thomson	Cloud Experiment	85.11	3.797	3.4
16	H. A. Wilson	Cloud Experiment	93.35	4.164	3.1
17	Millikan	Cloud Experiment	62.23	2.776	4.65
18	Begeman	Cloud Experiment	61.98	2.765	4.67
19	Dewar -Rutherford	No. of Rays in 1 c.c. of He.	57.3	2.556	5.050
20	Boltwood -Rutherford	No. of Atoms the Weight of Ra disintegrated per Year and the Atomic Weight of Ra.	68.8	3.069	4.206
21	Rutherford -Geiger	Direct Determination of the Charge on a Particle	62.23	2.776	4.65
22	Ragener	Same as above	60.40	2.695	4.79
23	Moreau	Charge on Ions in Flame	67.30	3.002	4.3
24	Perrin	Brownian Movement of Rotation	65	2.899	4.452
25	Perrin -Dubrowski	Brownian Movement in Liquids	71.5	3.189	4.047
26	Perrin	Distribution of Colloidal Particles.	68.2	3.042	4.243
27	Chaudesaigues	Brownian Movement in Liquids	64	2.855	4.381
28	Ehrenhaft	Brownian Movement in Gases	62.91	2.806	4.6
29	De Broglie	Brownian Movement in Gases	64.31	2.869	4.5
30	Westgren ⁽²¹⁾	Brownian Movement in Liquids	60.5	2.699	4.783
31	Svedberg ⁽²²⁾	Brownian Movement in Liquids	62	2.766	4.667
32	Nordlund ⁽²³⁾	Brownian Movement in Liquids	59.1	2.636	4.896
33	Mattausch ⁽²⁴⁾	Brownian Movement in Gases	103.3	4.608	2.80
34	Ehrenhaft ⁽²⁵⁾ & Wasser ⁽¹⁷⁾	Brownian Movement in Gases	77.17	3.443	3.75
35	Fletcher ⁽¹⁸⁾	Brownian Movement in Gases	60.3	2.690	4.799
36	Millikan ⁽¹⁹⁾	Oil Drop Method	60.62	2.704	4.774
37	Wadlund ⁽²⁶⁾	Absolute Xrays Wave Length Determination	60.61	2.704	4.774
38	Grottrian ⁽²⁷⁾	Same as above	60.35	2.692	4.793

(274)

(平田文夫) Brown 運動理論の検証

N. B. 表中太い活字で示した數字は測定値より直接得らるるもの。

其他は次の關係により算出せるものである。

$$N \cdot e = 289.4 \times 10^{13}; N = n \cdot 22414$$

此の表には e の値と同時に N 及び n を示してある。但し N は Avogadro 恒數 n は標準狀況に於ける瓦斯體 i.e. 中の分子數 e は單原電荷 (Elementary charge) の値を示す。

此等諸數値中最も正確な値として信用されて居る e の値は No. 35 の Millikan の oil drop method に依つて得た値である。

Ehrenhaft の e の測定値は非常に小さい。彼は其の結果を説明せん爲に亞電子 (Sub-electron) なるものの存在を提稱して居るが Millikan は之れを反駁し否定して居る。

尙最近に X 線の絶對波長の決定が發表されたが^{26) 27)} 其の方から與へられる e の値は第十一表中にも示した通り Millikan の値に一致して居る處を見ると矢張り Millikan の値に信を置くべきである。Fletcher の得た e の値が此の Millikan の値によく一致する事實を見る時、明かに此處に紹介した Fletcher の研究が Brown 運動理論の驗證に於て如何に重要な位置を占むるものであるかが考へ得らるることと思はれる。

文 獻

- 1) Einstein, A.: Ann. d. Physik, (4), 17, 549, (1905).
Einstein, A.: Ann. d. Physik, (4), 19, 371, (1906).
Einstein, A.: Ann. d. Physik, (4), 22, 563, (1907).
- 2) Langevin: Comptes rendus, 145, 530 (1908).
- 3) v Smoluchowski: Ann. d. Physik, (4), 21, 756, (1906).

〔(1) (2) (3) の詳細なる邦文紹介は岩波書店刊行“物理學文獻抄”〕

第二輯 136 頁にあり]

- 4) Perrin: *Comptes rendus*, 146, 967, (1908).
 Perrin: *Comptes rendus*, 147, 475, 530, 594 (1908).
 Chaudesaigues: *Comptes rendus*, 147, 1044, (1908).
 Perrin and Dabrowski: *Comptes rendus*, 149, 477, (1909).
- 5) Svedberg, The: *Kolloidzeitschr.* 7, 1, (1910).
 Svedberg, The and Katsuji, Inouye: *Arkiv f. Kemi etc. utg. af. K. Svenska Vetensk-Akad., Stockholm B.* 4, n.: 0 19, (1911).
 Nordlund: *Zeitschr. f. Physik. Chem.* 87, 40, (1914).
- 6) v Smoluchowski: *Boltzmann-Festschrift* (1904) p. 626.
 v Smoluchowski: *Bull. Acad. Cracov*, 1058, (1907).
 v Smoluchowski: *Ann. d. Physik* (4), 25, 205, (1908).
- 7) Svedberg, The and Inouye, Katsuji: *Zeitschr. f. Physik. Chem.* 77, 145, (1911).
 Westgren: *Zeitschr. f. Physik. Chem.* 83, 151, (1913).
- 8) Ehrenhaft: *Wiener Berichte*, 116, II, 1175, (1907).
- 9) De Broglie: *Comptes rendus*, 146, 624, 1011, (1908).
- 10) De Broglie: *Comptes rendus*, 148, 1316, (1909).
- 11) Perrin: *Comptes rendus* 147, 475, (1908).
- 12) Millikan: *Phys. Rev.* 2, 143, (1913).
- 13) Fletcher: *Phys. Rev.* 33, 81, (1911).
- 14) Bussett: "Hydrodynamics."
- 15) Cunningham: *Proc. Royal Soc. A*, 83, 357, (1910).
- 16) Meyer: "Die Kinetische Theorie der Gase." p. 211.
- 17) Maxwell, C.: *Scientific Papers Vol II.* 709.

(276)

(平田文夫) Brown 運動理論の検証

- 18) Fletcher: Physical Review, [2] 4, 449, (1914).
- 19) Millikan: Physical Review, 1, 218, (1913).
- 20) Burton: "The Physical Properties of Colloidal Solutions" 92 頁・第十三
を筆者が改算増補せるもの。
- 21) Westgren: Inaugural dissertation. (1915).
- 22) Svedberg and Inouye: Kolloidzeit Schrift, 7, 1, (1910).
- 23) Nordlund: Zeitschr. f. Phys. Chemie, 87, 40, (1914).
- 24) Mattausch: Zeitschr. f. Phys., 39, 607, (1925).
- 25) Ehrenhaft and Wasser: Zeitschr. f. Phys., 32, 820, (1926).
- 26) Wadlund: Phys. Rev. 32, (2), 841, (1928).
- 27) Grotrian: Grotrian: Die Naturwissenschaften, 67, 201, (1929).