

長方形セル流の安定性

阪府大 工 後藤金英 (Kanefusa Gotoh)

1. はじめに

非圧縮・粘性流体の空間周期流の安定性の問題は、乱流の大規模構造形成の1つの素過程としてとりあげられて来たが、
コルモゴロフ流を代表とする2次元平行流^{1~8)}にはいまって、
最近では正方形⁹⁾、菱形¹⁰⁾、三角形¹¹⁾などのセル構造をもった
流れがとり扱われるようになった。問題はレイノルズ数に加えて2つのフロケ指数をパラメーターとして含む固有値問題に帰着されるが、これまでの結果を見ると、安定性の臨界はどの場合もフロケ指数の値が0（従って、主流と同じ周期構造）の擾乱によっている。ただし、例外は三角形セル流の場合で、臨界擾乱が有限フロケ指数をもつ場合がある。

平行周期流の場合、擾乱方程式は、フロケ指数0の極限でtrivialではあるが一意的な解をもつ、その擾動展開が臨界レイノルズ数の普遍評価式を与える。これに対し、セル構造をもつ周期流の場合は、いつでも存在するtrivialな解の他

に nontrivial な解も存在し得る。この場合、前者の擾乱は特定の大规模構造をもつか、後者の擾乱は特定の構造をもたない。この報告では長方形セル流を問題にし、安定性に関する結果を述べ、これらの点を明らかにする。

2. 定式化

非圧縮・粘性流体の二次元定常流に加えられた二次元擾乱を考える。主流の流れ関数を $\Psi(x, y)$ 、擾乱の流れ関数を $\psi(x, y; t)$ 、 R をレイノルズ数とすると、線形化擾乱方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \frac{\partial(\Delta \Psi, \psi)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(\Delta \psi, \Psi)}{\partial(x, y)} - \frac{1}{R} \Delta^2 \psi = 0 \quad (2.1)$$

となる。ここには $\partial(f, g)/\partial(x, y)$ は Jacobi 行列式、 $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ である。擾乱 ψ に対する境界条件は、

$$\psi(\pm\infty, y; t), \quad \psi(x, \pm\infty; t) < \infty \quad (2.2)$$

である。

主流として縦 2π 横 $2\pi/k$ の長方形単位セルをもつ周期流を考えることにすると、周期方向に x - y 軸をとって、主流は

$$\Psi(x + \frac{2\pi}{k}, y) = \Psi(x, y + 2\pi) = \Psi(x, y) \quad (2.3)$$

の周期性をもつ。このとき擾乱はフロケの定理により

$$\psi(x, y; t) = e^{(\sigma t + i\alpha k x + i\beta y)} F(kx, y) \quad (2.4)$$

形をとる。ここに、 σ はあとで固有値の決まる複素増幅率、 α と β はフロケ指数、 F は主流と同じ周期性

$$F(kx+2\pi, y) = F(x, y+2\pi) = F(x, y) \quad (2.5)$$

をもつ周期関数である。境界条件 (2.2) により、フロケ指数 α, β は実数でなければならぬ。 $F(x, y)$ を支配する方程式は (2.4) を (2.1) に代入して得られる。形式的には、(2.1) の $\partial/\partial t$ を σ 、 ψ に作用する $\partial/\partial x$ と $\partial/\partial y$ をそれぞれ $i\alpha k + \partial/\partial x$, $i\beta + \partial/\partial y$, ψ を F に置きかえることにより得られる。

3. 固有値問題

(2.3) の $\Psi(x, y)$ と (2.5) の $F(kx, y)$ をフーリエ級数の形

$$\left. \begin{aligned} \Psi(x, y) &= \sum_{m,n} B_{m,n} e^{i(mkx+ny)}, \\ F(kx, y) &= \sum_{m,n} a_{m,n} e^{i(mkx+ny)}, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

に書き、これを F を支配する式に代入すると

$$\begin{aligned} \sigma a_{m,n} &= -\frac{1}{R} \Delta_{m+\alpha, n+\beta} a_{m,n} \\ &\quad + \frac{1}{\Delta_{m+\alpha, n+\beta}} \sum_{r,s} k \{ s(m+\alpha) - r(n+\beta) \} \cdot \\ &\quad \cdot (\Delta_{m+\alpha-r, n+\beta-s} - \Delta_{r,s}) B_{r,s} a_{m-r, n-s} \end{aligned} \quad (3.2)$$

となる。ここに、 $\Delta_{p,q} = k^2 p^2 + q^2$ 。 (3.2) を形式的に

$$\sigma a = D a \quad (3.3)$$

と書くことにする。

この報告で問題にする長方形セル流

$$\Psi(x, y) = \cos kx \cdot \cos y \quad (3.4)$$

に対する (3.1) の表式は

$$\left. \begin{aligned} B_{1,1} &= B_{1,-1} = B_{-1,1} = B_{-1,-1} = \frac{1}{4}, \\ \text{他の } B_{m,n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

となり, このとき (3.2) は

$$\begin{aligned} \sigma a_{m,n} &= -\frac{1}{R} \Delta_{m+\alpha, n+\beta} a_{m,n} \\ &+ \frac{k}{4 \Delta_{m+\alpha, n+\beta}} \left\{ (m+\alpha-n-\beta)(\Delta_{m+\alpha-1, n+\beta-1} - \Delta_{1,1}) a_{m-1, n-1} \right. \\ &\quad - (m+\alpha+n+\beta)(\Delta_{m+\alpha-1, n+\beta+1} - \Delta_{1,-1}) a_{m-1, n+1} \\ &\quad + (m+\alpha+n+\beta)(\Delta_{m+\alpha+1, n+\beta-1} - \Delta_{-1,1}) a_{m+1, n-1} \\ &\quad \left. - (m+\alpha-n-\beta)(\Delta_{m+\alpha+1, n+\beta+1} - \Delta_{-1,-1}) a_{m+1, n+1} \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる。

フロッグ指数 α と β は一般性を失うことなく

$$0 \leq \alpha, \beta \leq \frac{1}{2} \quad (3.7)$$

にとることにできる。何故なら, $|\alpha|, |\beta| > \frac{1}{2}$ の場合は, (2.4), (2.5) に従う F とより直すことはよって $|\alpha|, |\beta| \leq \frac{1}{2}$ の場合に, $-\frac{1}{2} \leq \alpha, \beta < 0$ の場合は

$$\left\{ \begin{aligned} a_{m,n}(-\alpha, \beta; R) &= (-1)^m a_{-m,n}(\alpha, \beta; R), \\ \sigma(-\alpha, \beta; R) &= \sigma(\alpha, \beta; R), \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} a_{m,n}(\alpha, -\beta; R) = (-1)^n a_{m,-n}(\alpha, \beta; R) \\ \sigma(\alpha, -\beta; R) = \sigma(\alpha, \beta; R) \end{cases}$$

によって, (3.7) の問題に帰着できるからである。

問題は結局 (3.7) の範囲の α と β に対し, R を与えて (3.6) から σ の固有値を求め, それが純虚数 (増幅率 $\sigma_r = 0$) となるような R の値を決定することである。

4. 固有値問題の数値解

この節では (3.6) の右辺 D を有限行列 D_N に置きかえて求めた固有値と, 臨界レイノルズ数について述べる。ここには D_N は, $-N \leq m, n, j, k \leq N$ の $D_{m,n,j,k}$ を要素とする行列である。数値計算は2段階QR法^(12,13)を用い, 倍精度で行った。 $k=1$ の場合の厳密解 $R_c = \sqrt{8}$ への収束を $N=3$ で再現できるが, 今回の計算は $N=4 \sim 6$ で行い, 更に大まかな N で spot-check した。

図1に $k=0.5$, $R=3.55$ の場合の固有値の実部 σ_r の分布を示す。最大増幅率は $\alpha = \beta = 0$ に現れる。この値が0となるレイノルズ数が臨界レイノルズ数 R_c で, $k=0.5$ の場合, $R_c = 3.54$ である。この形の σ_r 分布は, $0 < k < 0.639$ の k の範囲にわたって見出される。 R_c の k による変化はあとで図3に示す。

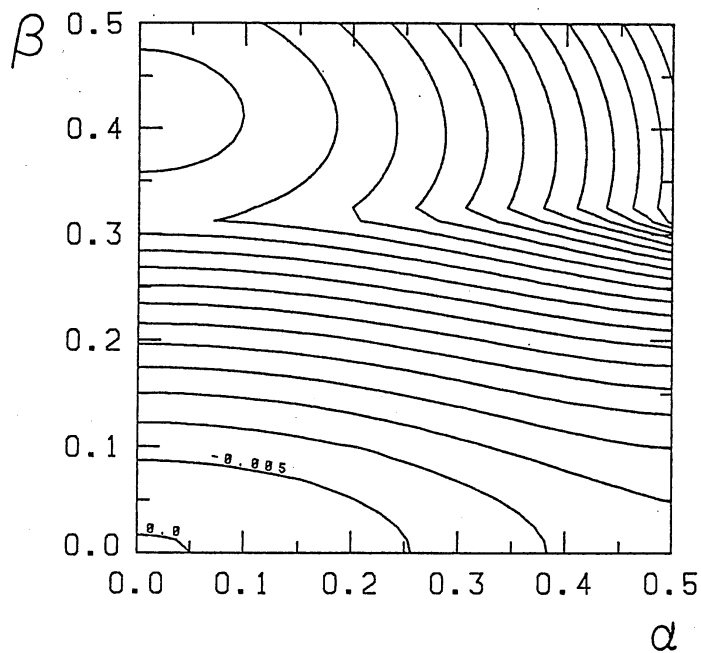


図 1. 等増幅率曲線
 $k = 0.5$, $R = 3.55$
 隣接する曲線上の σ_r の
 値の差は 0.005 である。

次に図 2 に $k = 0.75$, $R = 3.42$ の場合の σ_r の分布を示す。
 この場合、最大増幅率は $\beta/\alpha = 3/4$ の線の上に現れる。 R の
 値を減少させると最大増幅率を与える (α, β) は $\beta/\alpha = 3/4$ に
 近づいて $\alpha = \beta = 0$ に近づく。 $k = 0.75$ のときの R_c は 3.41
 である。 R_c の k による変化は図 3 に示す。

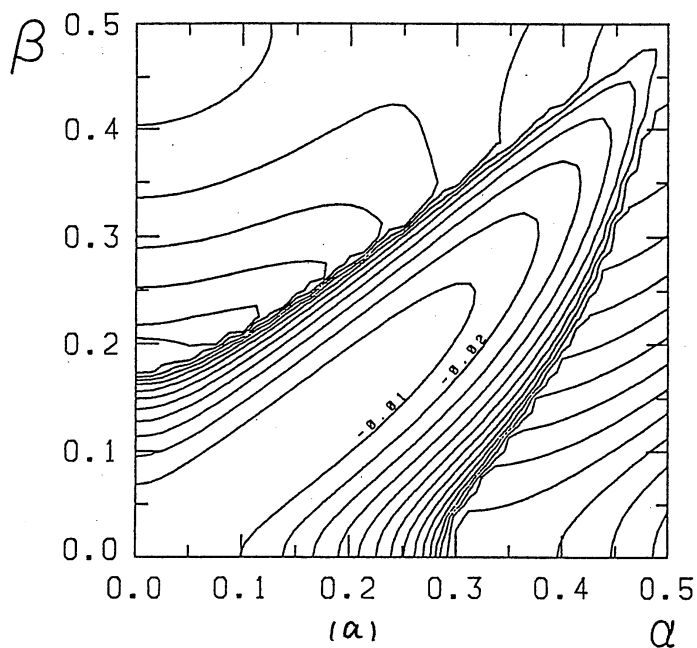
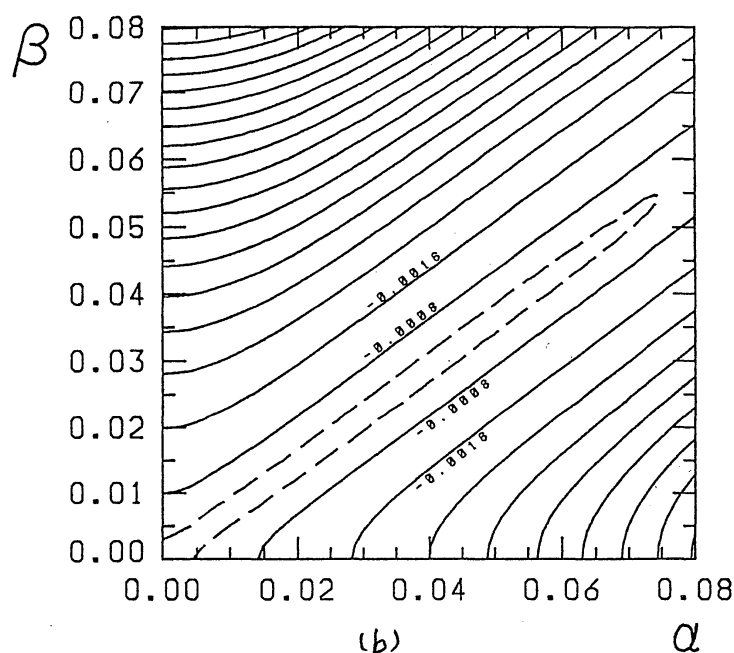


図 2. 等増幅率曲線
 $k = 0.75$, $R = 3.42$
 a) 隣接する曲線上の σ_r の
 値の差は 0.01 。
 b) 隣接する曲線上の σ_r の
 値の差は 0.0008 。破線
 は $\sigma_r = -0.0002$ 。



パラメター k による R_c の変化も図 3 に示す。曲線は 2 つの部分から成るが、 $k=0$ から 0.639 までの部分を I、 $k=0.639$ から 1.0 までの部分を II とする。I、II とともに R_c を与える擾乱モードのフロケ

指数は $\alpha = \beta = 0$ であるが、I については α/β に特定の値を見出せない (図 1) のに対し、II の上では β/α が特定の値をとっていて、 k に等しいと推定される (図 2)。この点については次節で再び述べる。

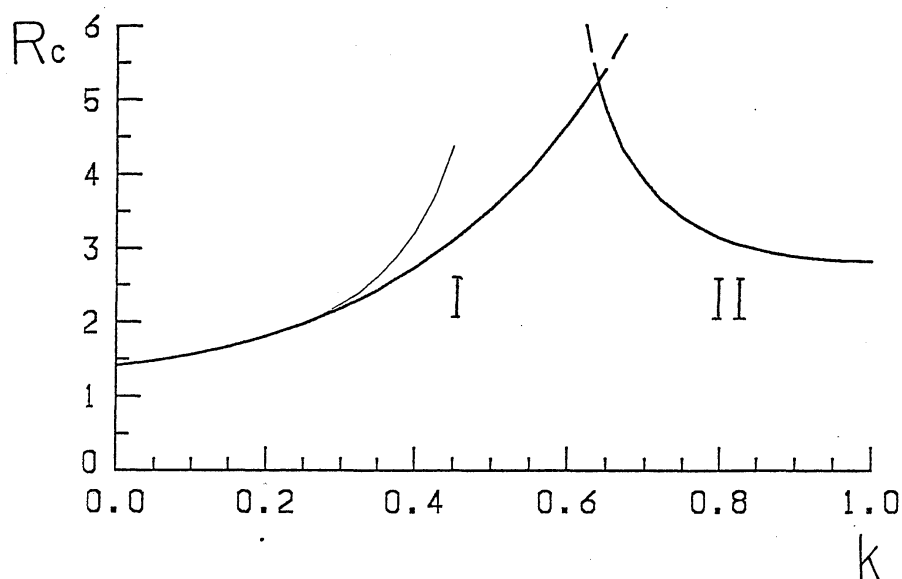


図 3. k による R_c の変化。細い曲線については 5 節参照。

5. 漸近解

前節に述べた数値計算の結果は、臨界レイノルズ数 R_c が
いづれの場合もフロケ指数 $\alpha = \beta = 0$ の擾乱によるにも拘
らず、 R_c の k による変化に2つの変り方があることをホレ
ている。その間の事情を明らかにする目的で、この節では固
有値問題の $\alpha, \beta \rightarrow 0$ の漸近解を解析的に求めてみる。

F, R, σ の α によるべき級数展開

$$(F, R, \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} (F_n, R_n, \sigma_n) (i\alpha)^n \quad (5.1)$$

を F を支配する方程式に代入し、 α のべきについて整理す
ると、 $F_n (n=0, 1, 2, \dots)$ を支配する方程式系が

$$\begin{aligned} & \{L_0^2 - \sigma_0 R_0 L_0 - k R_0 (\sin x \cos y \partial_y - \cos x \sin y \partial_x) (L_0 + 1 + k^2)\} F_n \\ &= -4 L_0 L_1 F_{n-1} - 2(L_0 L_2 + 2L_1^2) F_{n-2} - 4 L_1 L_2 F_{n-3} - L_2^2 F_{n-4} \\ &+ \sum_{\substack{k+j+m=n \\ m \neq n}} \sigma_k R_j L_0 F_m + 2 \sum_{k+j+m=n-1} \sigma_k R_j L_1 F_m + \sum_{k+j+m=n-2} \sigma_k R_j L_2 F_m \\ &+ k \sum_{\substack{j+m=n \\ m \neq n}} R_j (\sin x \cos y \partial_y - \cos x \sin y \partial_x) (L_0 + 1 + k^2) F_m \\ &+ k \sum_{j+m=n-1} R_j \{2(\sin x \cos y \partial_y - \cos x \sin y \partial_x) L_1 \\ &\quad - (\cos x \sin y - \delta \sin x \cos y) (L_0 + 1 + k^2)\} F_m \\ &+ k \sum_{j+m=n-2} R_j \{(\sin x \cos y \partial_y - \cos x \sin y \partial_x) L_2 \\ &\quad - 2(\cos x \sin y - \delta \sin x \cos y) L_1\} F_m \\ &- k \sum_{j+m=n-3} R_j (\cos x \sin y - \delta \sin x \cos y) L_2 F_m, \quad (5.2) \end{aligned}$$

のように得られる。ここに, $X = kx$, $Y = \beta/\alpha$, $\partial_x = \partial/\partial X$, $\partial_y = \partial/\partial Y$, $L_0 = k^2 \partial_x^2 + \partial_y^2$, $L_1 = k^2 \partial_x + Y \partial_y$, $L_2 = k^2 + Y^2$ である。特に F_0 を支配する方程式は

$$\{L_0^2 - \sigma_0 R_0 L_0 - k R_0 (\sin X \cos Y \partial_y - \cos X \sin Y \partial_x)(L_0 + 1 + k^2)\} F_0 = 0$$

となる。

(5.3)

レイノルズ数が実数であることと, 臨界条件を与える σ が純虚数であることから, R_{2n} と σ_{2n+1} は実数, R_{2n+1} と σ_{2n} は純虚数でなければならぬ。

(5.3) はパラメータ Y を含まないので, (5.3) から R_0 が決まるとすれば R_0 と k の関係は Y に依存しない図 1 の曲線 I を与える筈である。これとは別に (5.3) は $F_0 = \text{const.}$ を解とする。この場合, R_0 は (5.3) よりでは決らず高次近似を必要とし, これが Y に依存するのでこの場合の R_0 と k の関係は曲線 II を与えるであろう。周期条件 (2.5) を満足する (5.2) の解 F_m が存在するためには (5.2) の非同次項は可解条件を満足しなければならぬ。この条件は, (5.3) の随伴方程式の解を $\tilde{F}_0$ とすると $\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{(5.2) \text{ の右辺} \} \tilde{F}_0 dx dy = 0$ となる。特に $\tilde{F}_0 = 1$ のとき,

$$4\pi^2 L_2^2 \delta_{n,4} - 4\pi^2 \sum_{k+j=n-2} \sigma_k R_j L_2^2 + 2k \sum_{j+m=n-2} R_j \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos X \sin Y - Y \sin X \cos Y) L_1 F_m dx dy$$

$$+ k \sum_{j+m=n-3} L_2 R_j \iint_{-\pi-\pi}^{\pi-\pi} (\cos X \sin y - \gamma \sin X \cos y) F_m dX dy, \quad (5.4)$$

$F_0 = 1$ である。近似的に (5.2) と (5.4) の解は

$$\sigma_0 = 0,$$

$$F_1 = -\frac{k R_0}{1+k^2} (\cos X \sin y - \gamma \sin X \cos y),$$

$$\sigma_1 = 0,$$

$$F_2 = \frac{k^2 R_0 (\gamma^2 - k^2)}{1+k^2} (g-h) + G,$$

$$T=T_0 \text{ として, } G_2 = \frac{4kR_0}{(1+k^2)^2} \{ (k^2 - \gamma^2) \sin X \sin y + (k^2 - 1) \gamma \cos X \cos y \} \\ - \frac{kR_1}{1+k^2} (\cos X \sin y - \gamma \sin X \cos y),$$

$g(X, y)$ と $h(X, y)$ は

$$\{ L_0^2 - k R_0 (\sin X \cos y \partial_y - \cos X \sin y \partial_X) (L_0 + 1 + k^2) \} \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2X \\ \cos 2y \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

の周期解, ところで $n=4$ のとき (5.4) は

$$\sigma_2 = 0,$$

$$4\pi^2 L_2^2 - \frac{\pi^2 k^2 R_0^2 (1+\gamma^2) L_2}{1+k^2} \\ + \frac{8\pi^2 k^2 R_0^2}{(1+k^2)^2} \{ (1-k^2)^2 \gamma^2 + (k^2 - \gamma^2)^2 \} \\ - \frac{2k^3 R_0^3 (\gamma^2 - k^2)^2}{1+k^2} I_S = 0, \quad (5.6)$$

$$I_S = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin X \sin y (g-h) dX dy \quad (5.7)$$

と表わす。 k と R_0 を与えて (5.5) から g と h を求め、(5.7)

の I_5 を計算し, (5.6) から γ^2 が定まるので, γ^2 が正值となる範囲で R_0 の最小値を求めることによって R_c が得られる。

この手順で R_c を定める前に (5.6) で $\gamma^2 = k^2$ とおくと, R_0 について容易に解くことができる。

$$R_0^2 = \frac{8(1+k^2)^2}{(3-k^2)(3k^2-1)} \quad (5.8)$$

が得られるが, この結果は図3の曲線IIと完全に一致する。従って, 曲線IIは $\gamma = \pm k$, α と $\beta \rightarrow 0$ の解, すなわち正方形大規模構造をもったモードであることを確認された。

(5.8) は $1/3 < k^2 < 3$ の R_c しか与えないので, k の小さな値に対して先に述べた手順に従って R_c を求めると, 結果は図3に細い曲線で示したように, $k=0$ 近傍では曲線Iと一致するが, k が増加するに従って曲線Iよりも大きな値をとる。このとき $\gamma = 0$ 。この細曲線上の (k, R) について4節の方法で σ の固有値を求めると, σ_r の大きな値から順に順序をつけたとき, この節で得られた $\sigma_r = 0$ は第2固有値になっていることが確認できる(第1固有値は勿論正定部)。曲線Iを与えるモードは比 β/α の任意の値に対して存在し(図1)特定の空間構造をもたないと考えられる。

6. 結 論

この論文では、流れ関数 $\psi = \cos kx \cos y$ で表される長方形セル流の安定性を研究し、次の結果を得た。

1) 臨界レイノルズ数 R_c の k による変化は図3に示す通りである。

2) 図3の曲線 I の R_c を与える臨界擾乱は、フロケ指数 0 のモードであるが、特定の空間構造を伴わない。

3) 図3の曲線 II の R_c を与える臨界擾乱は、フロケ指数 $\rightarrow 0$ のモードであって、正方形大規模構造をもつ。

これらのモードが擾乱の非線形成長にどのような意味をもつかは今後の研究課題である。

追 記 本研究の数値計算は 万井敏寛君が担当した。
ここに記して謝意を表します。

引 用 文 献

- 1) L.D.Meshalkin and Ia.G.Sinai, PMM 25 (1961) 1140 (J. Appl. Math. Mech., 25 (1961) 1700).
- 2) T.J.Eisler, Rep. Proj. Michigan 2900-327-T Univ. Michigan (1962).
- 3) I.S.A.Green, J. Fluid Mech., 52 (1974) 273.
- 4) N.F.Bondarenko, M.Z.Gak and F.V.Dolzhanysky, Atmospheric and Oceanic Physics 15 (1979) 771.

- 5) D.N.Beaumont, J. Fluid Mech., 108 (1981) 461.
- 6) K.Gotoh, M.Yamada and J.Mizushima, J. Fluid Mech., 127 (1983) 45.
- 7) G.I.Sivashinsky, Physica 17D (1985) 243.
- 8) K.Gotoh and M.Yamada, Encyclopedia of Fluid Mech. N.D. Cheremisinoff ed. Gulf Publishing (1985) 589.
- 9) K.Gotoh and M.Yamada, J. Phys. Soc. Japan 53 (1984) 3395.
- 10) K.Gotoh and M.Yamada, Fluid Dynamic Res., 1 (1986) 165.
- 11) M.Takaoka, J. Phys. Soc. Japan 58 (1989) 2223.
- 12) J.H.Wilkinson, The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press Oxford (1965)
- 13) J.H.Wilkinson and C.Reinsch, Linear Algebra, Handbook for Automatic Computation, 2, Springer-Verlag pp.359-371.