

$L_p(1, \chi)$ の 下からの評価について

森田康夫 (東北大学 理学部)
(Yasuo Morita)

p を素数とし, χ を Dirichlet character, $L_p(s, \chi)$ を p 進 L 関数とする. このとき $L_p(1, \chi)$ を 下から評価すること を考える. $L_p(1, \chi)$ が 0 でないことは, 円分体における Leopoldt 予想と同値であり, Brumer により p 進体上の超越数の理論を使って証明されている. 他方では, $L_p(1, \chi)$ の値を 円単数を使って explicit に表現することが, Leopoldt により成されている. そこでここでは $L_p(1, \chi)$ の Leopoldt による表現に対して, Baker, Brumer, Kaufman らの方法を使うことにより, $L_p(1, \chi)$ の値を 下から具体的に評価することを目指す.

§1. $L_p(1, \chi)$ の explicit formula

p を素数とし, $\mathbb{Q}_p$ を p 進体, $\mathbb{C}_p$ を $\mathbb{Q}_p$ の代数的閉包の完備化とする. 有理数体 $\mathbb{Q}$ の代数的閉包の複素数体 $\mathbb{C}$ と p 進体 $\mathbb{C}_p$ への埋め込みを固定し, 代数的数を $\mathbb{C}$ の元とも $\mathbb{C}_p$ の元とも思う.

f を整数とし, χ を modulo f で定義された 原始 Dirichlet 指標, $L(s, \chi)$ を χ に対する Dirichlet の L 関数とする. この時 $L(s, \chi)$ の非負整数での値は 代数的数となり, それを interpolate することにより p 進 L 関数 $L_p(s, \chi)$ が構成できる. さらに, このようにして構成された p

進 L 関数の $s = 1$ での値 $L_p(1, \chi)$ も Dirichlet の L 関数の $s = 1$ での値 $L(1, \chi)$ と同様の表示を持つことが Leopoldt により示されている。以下このことを詳しく説明する。

$\chi(-1) = -1$ なら $L_p(s, \chi)$ は 恒等的に 0 となるから、 $\chi(-1) = 1$ と仮定する。 ζ を $\exp(2\pi i/f)$ (に対する C または C_p の元) とし、

$$\tau(\chi) = \sum \chi(a) \zeta^a \quad (0 < a < f)$$

を χ に対する Gauss の和 とする。 C_p の中での収束べき級数

$$\log_p(z) = \sum (-1)^{n-1} z^n / n \quad (0 < n < \infty)$$

を p 進対数関数 と呼ぶ。この関数は 単位単数群 $\{z; |z-1|_p < 1\}$ 上で定義されているが、これを $\log_p(p) = 0$ と置き、関数等式

$$\log_p(z^n) = n \log_p(z)$$

を使って、 C_p の乗法群 $\{z; z \neq 0\}$ 上に 拡張しておく。従って、 η が 1 のべき根なら $\log_p \eta = 0$ となる。この時、 p 進 L 関数 $L_p(s, \chi)$ の $s = 1$ での値 $L_p(1, \chi)$ は 次のようにして与えられる：

$$L_p(1, \chi) = - (1 - \chi(p) p^{-1}) \tau(\chi) f^{-1} \sum_{a=1}^f \chi(a) \log_p \left\{ \zeta^{(a-1)/2} (1 - \zeta^{-a}) / (1 - \zeta^{-1}) \right\}$$

ここで、上式に出てきた数 $E(a) = \zeta^{(a-1)/2} (1 - \zeta^{-a}) / (1 - \zeta^{-1})$ は、円単数 と呼ばれる円分体 $Q(\zeta)$ の 実の単数で、 $1 < a < f/2$, $(a, f) = 1$ なる条件の下で動かす時、乗法的に独立となる。なお Dirichlet の L 関数の $s = 1$ での値 $L(1, \chi)$ に対しても、上式の右辺の第一因子を除いた形での 類似の等式が成り立つことが知られている。

§2. 代数的数の対数の linear form の下からの評価. I

m を自然数とし, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ を代数的数とする.

このとき, Gel'fond, Baker, Fel'dman らは, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ が乗法的に独立で, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ の少なくとも一つが 0 でないなら, $\log \alpha_i$ についての linear form

$$\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_m \log \alpha_m$$

は 0 とはならないことを示した. さらに彼らは, この linear form がどの程度小さくなり得るかについて, この linear form の下からの評価を得ている.

これに対し, Gel'fond, Sprindzhuk, Kaufman らは これらの結果の p 進体上での類似を考え, 次のような結果を得ている.

定理. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ を乗法的に独立な代数的数とし, その height は h を越さぬものとする. また $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ は すべては 0 でない代数的数で, その height は H 以下 ($H > 1$) であるとする. $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_0, \dots, \beta_m$ が 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上生成する体を K とし, K の $\mathbb{Q}$ 上での次数を n とする. K の p 進体 C_p への埋め込みを固定し, これにより α_i や β_j を p 進体 C_p の元と思う. さらに この時 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ は 単位単数となり, $\log_p \alpha_1, \dots, \log_p \alpha_m$ が 定義されるものとする. この時 n, h, m, p のみによる 計算可能な定数 c があり,

$$|\beta_0 + \beta_1 \log_p \alpha_1 + \dots + \beta_m \log_p \alpha_m|_p > |p|_p^{c \log H}$$

なる形の評価が成り立つ.

(注) これは Kaufman による定理だが、彼は $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ が p 進単位単数であるとし仮定していないが、彼の証明をみると、

$$|\alpha_i - 1|_p < |p|_p^{1/(p-1)}$$

であると仮定することが必要であると思う。

(注) 定理の中で、 p 進体での式の評価に 複素数体の中で定義された height が出てくるのは、 p 進体での下からの評価を、積公式 (product formula) を使う事により、複素数体での上からの評価に帰着するからである。

§3. 代数的数の対数の linear form の下からの評価, II

$\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_0, \dots, \beta_m$ を §2 の定理の通りとし、linear form

$$L(\alpha, \beta) = \beta_0 + \beta_1 \log_p \alpha_1 + \dots + \beta_m \log_p \alpha_m$$

を、 C_p の中で 下から評価することを考える。

簡単のため、 $\beta_0 = 0$ とし、我々は Kaufman の方法を多少簡易化したもの を使う。もちろん主な仕事は、彼が 単に ” c は計算可能な定数である ” としか言っていないのを、具体的に はっきり分かる形に 計算してみせることである。

$\alpha_1, \dots, \alpha_m$ が $|\alpha_i - 1|_p < |p|_p^{1/(p-1)}$ を満たすものとし、

$$\exp_p(z) = \sum z^m / m! \quad (C_p \text{ の中での収束べき級数})$$

$$\alpha_i^z = \exp_p\{\log_p(\alpha_i)z\} \quad (1 \leq i \leq m)$$

とおく. $\exp(z)$ は $|z|_p < p^{1/(p-1)}|_p$ なる範囲で収束し, α_i は
前頁の条件を満たすから

$$|\log_p(\alpha_i)|_p = |\alpha_i - 1|_p < p^{1/(p-1)}|_p$$

を満たし, 従って関数 α_i^z は $|z|_p \leq 1$ なる範囲で定義される.

特に この関数は z が 整数 のときに 定義される.

$\beta_m = 0$ の時は m の代わりに $m-1$ を取れば良いから, β_m は 0 で
ないものとし, $L(\alpha, \beta)$ を $-\beta_m$ で割り, $\beta_i / -\beta_m$ を改めて β_i と置く.

この時

$$L(\alpha, \beta) = \beta_1 \log_p \alpha_1 + \dots + \beta_{m-1} \log_p \alpha_{m-1} - \log_p \alpha_m$$

となる. 従って $L(\alpha, \beta)$ が小さければ

$$\log_p \alpha_m \sim \beta_1 \log_p \alpha_1 + \dots + \beta_{m-1} \log_p \alpha_{m-1}$$

と近似できる.

そこで次のような関数を考える.

$$F(z_1, \dots, z_{m-1})$$

$$= \sum c(l_1, \dots, l_m) \alpha_1^{(l_1 + \beta_1 l_m)z_1} \dots \alpha_{m-1}^{(l_{m-1} + \beta_{m-1} l_m)z_{m-1}} \quad (1 \leq l_i \leq L)$$

ここで $c(l_1, \dots, l_m)$ と L は整数であるものとし, 後で適当に定めるものとする. さて 関数 $F(z_1, \dots, z_{m-1})$ を $z_1, \dots, z_{m-1}$ で $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$ 回
微分し, $z_1 = \dots = z_{m-1} = z$ と置き, 更に 共通の因子である

$$(\log_p \alpha_1)^{\sigma_1} \cdots (\log_p \alpha_{m-1})^{\sigma_{m-1}}$$

で割ると,

$$\begin{aligned} f(z) &= f_{\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}}(z) \\ &= \sum c(l_1, \dots, l_m) (l_1 + \beta_1 l_m)^{\sigma_1} \cdots (l_{m-1} + \beta_{m-1} l_m)^{\sigma_{m-1}} \\ &\quad \times \alpha_1^{(l_1 + \beta_1 l_m)z} \cdots \alpha_{m-1}^{(l_{m-1} + \beta_{m-1} l_m)z} \end{aligned}$$

となる. そこで $L(\alpha, \beta)$ が十分小さいとすると, (関数として) $f(z)$ と

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_{\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}}(z) \\ &= \sum c(l_1, \dots, l_m) (l_1 + \beta_1 l_m)^{\sigma_1} \cdots (l_{m-1} + \beta_{m-1} l_m)^{\sigma_{m-1}} \\ &\quad \times \alpha_1^{l_1 z} \cdots \alpha_{m-1}^{l_{m-1} z} \alpha_m^{l_m z} \end{aligned}$$

は近くなる. 特に, z に整数値を代入した時 $f(z)$ と $\Phi(z)$ とは近くなる. この二つはよく似ているが, $\Phi(z)$ の方が α_m^z なる関数を含むのに対し, $f(z)$ の方は含まない点が, 本質的に異なる. なお, $\Phi(z)$ の分母は $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ の分母より簡単に計算できる事に注意しておく.

L と整数 S, T を十分大きく取り, Dirichlet の部屋割り論法 (Siegel の補題) を使って,

$$0 \leq \sigma_1 + \dots + \sigma_{m-1} \leq S-1, \quad 0 \leq z \leq T-1$$

に対して, 整数の組 $c(l_1, \dots, l_m)$ ($0 \leq l_i \leq L$) を

(a) $c(l_1, \dots, l_m)$ は複素数体 C の中では 余り大きくなく, かつ

(b) $\Phi_{\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}}(z)$ は p 進体 C_p の中で十分小さい

ように取る. この時 $\Phi_{\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}}(z)$ は 代数的数だから, その絶対値と

分母に比べて, C_p の中で大きさが十分小さければ 0 となる. したがって

上の仮定のもとでは

(b') $\Phi_{\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}}(z) = 0$

となる. ところが, 前に注意した様に, $L(\alpha, \beta)$ が 十分小さいという仮定のもとでは, 関数として $f(z)$ と $\Phi(z)$ は 近いから, その値も近く, 結局

(b'') $f_{\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}}(z)$ は C_p の中で十分小さい

ことが解る.

さて前に注意したように, $\Phi_{\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}}(z)$ に比べて $f_{\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}}(z)$

(z) は関数 α_m^z を含まぬ. 従って, $\Phi_{\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}}(z)$ を微分したものは

この形の関数の一次結合には書けぬのに対し, $f_{\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}}(z)$ の方は,

この関数を微分したのも 同じ形の関数の一次結合となる. このため 仮定

(b'') のもとでは, S を少し小さくすることにより, T を大きくしても

$$0 \leq \sigma_1 + \dots + \sigma_{m-1} \leq S - 1, \quad 0 \leq z \leq T - 1$$

なる範囲において,

(b'') $f_{\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}}(z)$ は C_p の中で十分小さい

が成り立つ. このため $f(z)$ と $\Phi(z)$ が 近いことを 再び使うと

$$(b') \quad \Phi_{\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}}(z) = 0$$

が同じ範囲で成り立つ。この事は、 $\Phi(z)$ が本来持ち得るより沢山の零点を持つことを意味し、矛盾となる。従って、 $L(\alpha, \beta)$ が十分小さいという仮定は矛盾を導く。

大体以上のような議論をする事により、次のような事が証明できる。

定理. $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}$ は代数的数とし、 α_i らは乗法的に独立であるものとする。 α_i, β_j らが有理数体 $\mathbb{Q}$ 上で生成する体を K とする。

K の複素数体 $\mathbb{C}$ と p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の代数的閉包の完備化 $\mathbb{C}_p$ への埋め込みを固定しておく。 K の $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数を n とし、 p の K への $\mathbb{C}_p$ に対する延長の相対次数と分岐指数をそれぞれ κ と μ で表す。また $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ は

$$|\alpha_i - 1|_p < |p|_p^{1/(p-1)}$$

を満たすものと仮定する。 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ の分母の最小公倍数を d_α とし $\beta_1, \dots, \beta_{m-1}$ の分母の最小公倍数を d_β で表す。また、3 以上の実数 h_α と実数 h_β は、複素数体において不等式

$$\max_{i, \tau} |\alpha_i^\tau| \leq h_\alpha, \quad \max_{j, \tau} |\beta_j^\tau| \leq h_\beta$$

を満たすものとする。ここで i は 1 から m まで、 j は 1 から $m-1$ まで動き、 τ はすべての K の $\mathbb{C}$ の中への埋め込を動くものとする。このとき、定数

$$\lambda = \max \left\{ (d_\beta h_\beta)^{1/2}, (2\kappa\mu)^m, (9/2)^{\frac{6m^2-3m+1}{mn p \log h_\alpha / \log p}} \right\}^{3m/2}$$

に対して、評価

$$|\beta_1 \log_p \alpha_1 + \dots + \beta_{m-1} \log_p \alpha_{m-1} - \log_p \alpha|_p \geq |p|_p^{\lambda(2m+3)}$$

が成り立つ.

§4. 円単数の評価と結果

§3 で得た結果を 我々の場合に使うため, 円単数の評価が必要となる.
そこで χ を 原始 Dirichlet 指標とし, f をその導手とする. ζ を $\exp(2\pi i/f)$ とし, $1 < a < f$, $(a, f) = 1$ なる整数 f に対し,

$$E(a) = \zeta^{(a-1)/2} (1 - \zeta^{-a}) / (1 - \zeta^{-1})$$

なる数を考える. この数は 円体 $Q(\zeta)$ の単数となる事が解っている.

τ を 円体 $Q(\zeta)$ の 複素数体 C への 任意の埋め込みとすると,

$$E(a)^\tau = \eta^{(a-1)/2} (1 - \eta^{-a}) / (1 - \eta^{-1}) \quad (\eta = \zeta^\tau)$$

となる. ところが, η は 1 の原始 f 乗根だから 単位円周上にあり,

$$|1 - \eta^{-a}| \leq 2, \quad |1 - \eta^{-1}| \geq \sin(\pi/f) \geq 2/f \quad (f \geq 2)$$

なる不等式を満たすことが解る. よって問題の $E(a)^\tau$ は

$$E(a)^\tau \leq 2 \{ \sin(\pi/f) \}^{-1} \leq f$$

なる評価を持つ.

さて $E(a)^\tau$ の大きさは解ったが, §3 の定理を使うためには,

$$|\alpha_i - 1|_p < |p|^{1/(p-1)}_p$$

なる条件を満たす必要がある. まず Fermat の小定理より, ν で $Q(\zeta)$ における p の相対次数とすると, $Q(\zeta)$ の任意の単数 ε は $(p^\nu - 1)$ 乗すると, (p に関して) 単位単数となる.

f を素因数分解して, $f = f_0 p^e$, $(f_0, p) = 1$ と置く. この時, $Q(\zeta)$ に

おける分岐指数は p^e となる。よって、

$$| \varepsilon^{(p^v-1)} - 1 |_p \leq | p^{1/p^e} |_p$$

を満たすから、 $p \neq 2$ なら、

$$| \varepsilon^{(p^v-1)p^e} - 1 |_p \leq | p |_p < | p^{1/(p-1)} |_p$$

となる。また $p = 2$ の時は、 e の代わりに $e + 1$ を取れば 同様になる。

さて、 $E(a)$ ($1 \leq a \leq f, (a, f) = 1$) は乗法的に独立であるから、それらを $(p^v - 1)p^e$ 乗した物も 乗法的に独立である。従って、 $E(a)$ の $(p^v - 1)p^e$ 乗に対して定理が使える。そこでこれらを $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ と置く。

$E(a)$ は単数であるから $d_\alpha = 1$ である。また以上に述べたことより、

$$h_\alpha = f^{(p^v-1)p^e}$$

と置ける。 χ が自明な Dirichlet 指標でないとすると、 $f \geq 3$ となる。よって、 $h_\alpha > 3$ と成り、 h_α についての 定理の仮定も満たされる。他方

$$\beta_j = \chi(j)^{-1} / \chi(m)$$

と置くと、これは 1 のべき根であるから、

$$d_\beta = h_\beta = 1$$

に対して 定理の仮定が満たされる。

良くしられている様に、ガウスの和 $\tau(\chi)$ は代数的整数で $|\tau(\chi)| = f^{1/2}$ を満たす。また $\chi(p)$ は 1 のべき根であるか、0 である。さらに円単数 $E(a)^{\tau}$ が実数であることに注意すると、

$$2m \leq f, 2n \leq f^2, 2\kappa\mu \leq 2n \leq f^2, 2\nu \leq f, p^e \leq f$$

なる評価が得られる。これを使うと、 p 進 L 関数の $s = 1$ での値を表す公式の Σ 以下の $\log_p$ の一次式に対しては、§3 の定理における λ は、 $p \neq 2$ なら、

$$\begin{aligned} \lambda &\leq \text{Max} \left\{ f, 2^{\frac{9f^3}{8}} f^{\frac{9f}{4}} (\log h_{\alpha})^{\frac{3f}{4}} (p/\log p)^{\frac{3f}{4}} \right\} \\ &\leq \left\{ 2^{\frac{9f^3}{8}} f^{\frac{24f}{4}} (\log f)^{\frac{6f}{4}} p^{\frac{3f^2+6f}{4}} \right\} \end{aligned}$$

として求められる。これより次の定理が得られる。

定理. p を奇素数とし、 χ を自明でない原始 Dirichlet 指標で、 $\chi(-1) = 1$ なるものとする。 f を χ の導手とする。この時、 χ に対する p 進 L 関数 $L_p(s, \chi)$ の $s = 1$ での値 $L_p(1, \chi)$ について、次の評価が成り立つ。

$$\begin{aligned} |L_p(1, \chi)|_p &\geq p^{-\left\{ 2^{\frac{9f^3}{8}} p^{\frac{3f^2+6f}{4}} f^{\frac{24f}{4}} (\log f)^{\frac{6f}{4}} \right\}} \end{aligned}$$

これは 大体 p^{-f^4} の order である。 $p = 2$ でも 大体同様である。

参考文献

1. A. Baker, Transcendental number theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1975.
2. A. Brumer, On the units of algebraic number fields, *Mathematika*, 14(1967), 121-124.
3. N. Fel'dman, An improvement of the estimate of a linear form in the logarithms of algebraic numbers, *Math. sb.*, 77(119), 425-436.
4. A. O. Gel'fond, Transcendental & algebraic numbers, Dover Publ. Inc., New York, 1960 (English translation).
5. K. Iwasawa, Lectures on p-adic L-functions, *Ann. Math. Studies*, 74(1972).
6. Kaufman, An estimate of linear forms in the logarithms of algebraic numbers in the P-adic metric, *Vestnik Moskov. Univ., Matem.*, 26(1971), 57-63 (English translation).
7. T. Kubota, H. W. Leopoldt, Eine p-adische Theorie der Zetawerte, I, *J. Reine Angew. Math.*, 214/215(1964), 328-339.
8. H. W. Leopoldt, Eine p-adische Theorie der Zetawerte, II, *J. Reine Angew. Math.*, 274/275(1975), 224-239.
9. V. G. Sprindzhuk, Estimates of linear forms with p-adic logarithms of algebraic numbers, *Izv. Akad. Nauk BSSR, ser. Fiz.-Matem.*, 4(1968), 5-14. (筆者は, この論文を見ていない.)

(追記) . シンポジウムの時, Waldschmidt 氏より次のような事を聞いた.

(1) . この論文で問題にしているような $\log$ を含む linear form の p 進体での評価を A. J. van der Porten が

A. J. van der Porten, Linear forms in Logarithms in the p -adic case ,

In : Transcendental theory : Advances and applications ,

edited by A. Baker and D. W. Masser, 29-57, Academic press,

London-New York San Francisco, 1977.

において調べている. 但し, van der Porten は β が有理数の場合を扱っており, 一般の場合は結果のみを書いている. また彼の論文には, 本質的ではないが多少の誤りを含んでおり, 彼の結果は 多少の修正を必要とするらしい. 従って ここで述べたような事をするには 彼の結果を引用してすませるわけにはいかない.

(2) . 上に述べた van der Porten の結果や, 複素数体上での対応する結果を参考にすると, このような Baker の方法での評価の限界は, 大体

$$O(p^{-f^f})$$

位であると思われる.

(3) . V. G. Spindzhuk は 超越数についての教科書 (ロシア語) を書いており, その中で $\log$ を含む linear form の p 進体上での評価についてふれているらしい (筆者はまだ見ていない) .