

次元空間における Teichmüller のモジュール
定理の変形と歪曲問題への応用

山形大 教養 居駒和雄

単位円板からそれ自身へのある平面 quasiconformal mappings (qc map と略記) に対する Hölder 型 ($|w(z_1) - w(z_2)| \leq \lambda |z_1 - z_2|^t$) の歪曲定理は, 最初 M.A. Lavrentieff, L. Ahlfors によって考察されたが, 最良の評価式 (定理 B) は, A. Mori [5] が彼のモジュール定理を用いて確立した。その後 Lehto-Virtanen [4] は Mori のモジュール定理を導く Teichmüller のモジュール定理の一変形 (定理 A) を与え, これを用いて定理 B を別証明した。

定理 A. もし ring R が z_1, z_2 を $0, \infty$ から分離すれば

$$\text{mod } R \leq \log \Phi_2(\sqrt{2(|z_1| + |z_2|)}) / |\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}|,$$

ここに $\log \Phi_2(a)$ は平面 Grötzsch ring $R_G(a)$ のモジュールを表わし, $\sqrt{z_1}, \sqrt{z_2}$ は R の二価平方根の同じ分枝に属するものがある。

定理 B. w は単位円板からそれ自身上への $w(0) = 0$ によ

を正規化された k -gc map とする。然るときは $|z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1$ なるすべての点対 z_1, z_2 に対して

$$|w(z_1) - w(z_2)| \leq 16 |z_1 - z_2|^{\frac{1}{k}}.$$

ここで数 16 は不等式がすべての k に対してなりたつべきとするならば、より小さい如何なる境界によってもおきかえることはできない。

§1. 定理 A, B に対して, n (≥ 3) 次元の場合 Hölder 型でどのような評価がなりたつかを [2] で考察した。定理 A の証明では, ring R の double を作るために解析的な分枝 $w = \sqrt{\alpha}$ および $w = -\sqrt{\alpha}$ が用いられる。 n 次元の場合にはこのような分枝に対処する 1-gc map の分枝はないので, $-\pi \leq \theta < \pi$ および $\pi \leq \theta < 3\pi$ に対する写像 $y_1 = r \cos \frac{\theta}{2}, y_2 = r \sin \frac{\theta}{2}, y_j = x_j$ ($3 \leq j \leq n$) の 2 つの分枝 $y = y_+(x)$ および $y = y_-(x)$ を用いる。これらはいわゆる folding と呼ばれる 2-gc map であることから, 定理 A の対応形定理 A' では評価式の右辺に最初の因子 2 が現われる。定理 A' を用いてえられる定理 B の対応形定理 B' では指数が $\frac{1}{2k}$ とまり n の評価よりは n 難い。

定理 A'. n 次元 ring R が点対 α, β を原点と無限遠点から分離するならば

$$\text{mod } R \leq 2 \log \Phi_n(\sqrt{2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} / |\alpha - \beta|),$$

ここで $\log \Phi_n(x)$ は n 次元 Grötsch ring の $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ である。

定理 B'. y は n 次元空間の単位球体からそれ自身上への $y(0)=0$ で正規化された K -g.c map とする。すると $|\alpha| \leq 1, |\beta| \leq 1$ なるすべての点対 α, β に対して

$$|y(\alpha) - y(\beta)| \leq 2 \lambda_n |\alpha - \beta|^{\frac{1}{2k}},$$

である。ここへ λ_n は $\Phi_n(a) \leq \lambda_n a$ なる一階界である。

§ 2. ここでは n 次元 $\mathbb{R}$ -ring の非有界な補集合成分に関する歪曲問題への応用に差支えない付加条件の下で, Teichmüller のモテュール定理の別変形を定理 1 として確立する。これを用いて Hölder 型の指数を最大にした歪曲評価式が定理 2 としてえられることを示したい。

定理 1. n 次元空間の ring R が点対 α, β を原点と無限遠点から分離するを仮定し, R の非有界な補集合成分がある一定半径 r_0 の球体 $\{x \mid |x| \leq r_0\}$ を含むと仮定する。然るときは

$$\text{mod } R \leq \log \Phi_n(\sqrt{2\{|\alpha|^2(1+\frac{1}{r_0})^2 + |\beta|^2(1+\frac{1}{r_0})^2\}} / r_0 |\alpha - \beta|).$$

定理 2. y は n 次元空間における単位球体からそれ自身上への $y(0)=0$ で正規化された K -g.c map とする。すると $|\alpha| \leq 1, |\beta| \leq 1$ なるすべての点対 α, β に対して

$$|y(\alpha) - y(\beta)| \leq c |\alpha - \beta|^{\frac{1}{k}},$$

ここで $c = 2^{\frac{1}{k}} (1 + \frac{1}{p_0}) \lambda_n$, $p_0 = 4 / [\Phi_n^{-1} \{R \Phi_n(4)\}^k]$, ここで Φ_n^{-1} は Φ_n の逆関数である。

注意 1. 定理 2 における指数 $\frac{1}{k}$ はより大きな数ではおもしろいことが知られている。何故ならば、 k -gc map $y = y_0(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$:

$$\begin{cases} y_1 = r^{\frac{1}{k}} \cos \theta_1, \dots, y_j = r^{\frac{1}{k}} \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{j-1} \cos \theta_j \quad (j=2, 3, \dots, n-1), \\ y_n = r^{\frac{1}{k}} \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1} \end{cases}$$

を考へれば、 k が $\frac{1}{k}$ より大きい限り、各々の定数 c に対して

$$|y_0(x) - y_0(0)| > c|x|^t, \quad |x| < 1$$

をよさす点 x が存在するからである。

§ 3. n 次元における ring のモデュール $\mathcal{M}$ の定義および $\mathcal{M}$ の基本性質をなわすモデュール $\mathcal{M}$ の優加法性, Grötsch および Teichmüller のモデュール定理, また k -gc map の定義および $\mathcal{M}$ の基本性質トウは Mostow [6] を参照されたい。なおここでは、 n 次元 k -gc map は Gehring [4] および Mostow [6] の意味であり、Väisälä [7] の意味の k^{n-1} -gc map に相当するものがあることを注意しておく。

§ 4. 定理 1 の証明の概略.

ring R を球面 $S^{n-1}(0, r_0)$ に属する反転 τ により球面 $S^{n-1}(-r_0, 2r_0)$ に属する反転 最後は適当な一つの平行移動を組合わせた写像 $\zeta = \zeta(x)$ によって、半空間 $\{\zeta \mid \zeta_1 \geq 2r_0\}$ 内の ring R' に変換する。 R' の超平面 $\{\zeta \mid \zeta_1 = 0\}$ に属する対称な ring を R'' とすると、
 $\text{mod } R = \text{mod } R' = \text{mod } R''$ となる。

R', R'' の補集合の有限成分をそれぞれ C_0', C_0'' とし、これら

を補集合成分としてその ring を R_0 とすると

$$\text{mod } R' + \text{mod } R'' \leq \text{mod } R_0.$$

$$\therefore \text{mod } R \leq \frac{1}{2} \text{mod } R_0.$$

点 x の上記写像 $\zeta = \zeta(x)$ による像を α_+ とし, 超平面 $\{\zeta | \zeta_1 = 0\}$ に属する α_+ の対称点を α_- と表わす。 α_+ , α_- をそれぞれ原点, 無限遠点 として, 補助の Möbius 変換により R_0 の像を $\tilde{R}_0$ とすると, $\text{mod } R_0 = \text{mod } \tilde{R}_0$.

$\tilde{R}_0$ に対して n 次元における Teichmüller のモテ-IV 定理が適用でき $\text{mod } \tilde{R}_0$ が上から評価されて, 定理 1 における評価がえられる。

§ 5. 次に定理 2 の証明のために, 定理 1 とともに必要となる lemmas を証明をこに挙げる。

Lemma 1. ([2]) $\Phi_n(a) \leq \lambda_n a^{2n}$, $4 \leq \lambda_n$.

(λ_n に対する上の限界は直接保われないので省略)

注意 2. $\Phi_n(a)$ は $a > 1$ として a の増加, 連続関数であることが知られている。(例えば, Mostow [6] の § 6~7 参照)

Lemma 2. (Schwarz の lemma の空間類似版) y は n 次元球体 S^n から k 次元球 S^k への k -f.c. map とすると, 任意の $0 < |x| < 1$ なる x に対して

$$\Phi_n\left(\frac{1}{|y|}\right) \leq \left\{ \Phi_n\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}^k.$$

これは n 次元における spherical symmetrization (Mostow

[6] の §8 参照) を用いて導かれ、 n 次元 Grötzsch のモジュラー定理を用いると、2 次元の場合と同様と示される。

注意 3. Lemma 2 から $|x|=r_0$ ($0 < r_0 < 1$) 上:

$$|y(x)| \geq 1/\Phi^{-1}[\{\Phi_n(\frac{1}{r_0})\}^k]$$

がなりたし、 $1/\Phi_n^{-1}[\{\Phi_n(\frac{1}{|x|})\}^k]$ は $|x|$ の増加、連続関数であるから、Lemma 2 と注意 2 により、 $y=y(x)$ による球体 $\{x \mid |x| \leq r_0\}$ の像は球体 $\{y \mid |y| \leq 1/\Phi_n^{-1}[\{\Phi_n(\frac{1}{r_0})\}^k]\}$ を含む。

§ 6. 定理 2 の証明の概略。

$|\alpha - \beta| \geq \frac{1}{\lambda_n}$ の場合と、 $0 < |\alpha - \beta| < \frac{1}{\lambda_n}$ ($\leq \frac{1}{4}$, Lemma 1 により) かつ $|\alpha + \beta| \leq 1$ の場合には、平面的場合の Lehto-Virtanen [4] の証明とほぼ同様に進められるので省略する。残り $0 < |\alpha - \beta| < \frac{1}{\lambda_n}$ ($\leq \frac{1}{4}$) かつ $|\alpha + \beta| > 1$ の場合は、球環

$$B = \{x \mid \frac{|\alpha - \beta|}{2} < |x - \frac{\alpha + \beta}{2}| < \frac{1}{4}\}$$

を考えよ。これは単位球体外 $|x| > 1$ に含まれる点とありうる点と、 $y(x)$ を $|x| > 1$ まで延長した K -f.c.map $y^*(x) = y(x)$ ($|x| \leq 1$), $= y(\frac{x}{|x|^2}) / |y(\frac{x}{|x|^2})|^2$ ($|x| > 1$) を定義しておく。 B の補集合の非有界成分 $C_1(B)$ は球体 $\{x \mid |x| \leq \frac{1}{4}\}$ を含むから、Lemma 2 および注意 3 により、ring $y^*(B)$ の非有界な補集合成分 $C_1(y^*(B))$ は一球体 $\{y \mid |y| \leq \rho_0\}$ (ここ、 $\rho_0 = 1/\Phi_n^{-1}[\{\Phi_n(4)\}^k]$) を含む。それ故 ring $y^*(B)$

k に対し定理 1 が適用でき $\text{mod } y^*(B)$ が上から評価され、
その途中 Lemma 1 が用いられ最終的な結果がえられる。

文 献

- [1] F.W. Gehring, Rings and quasiconformal mappings in space, Trans. Amer. Math. Soc., 103 (1962).
- [2] K. Ikoma, An estimate for the modulus of the Grötzsch ring in n -space, Bull. Yamagata Univ. Nat. Sci., 6 (1967).
- [3] < " >, A distortion theorem in k -quasiconformal mappings of the n -ball, Tohoku Math. J., 28 (1976).
- [4] O. Lehto und K.I. Virtanen, Quasikonforme Abbildungen, Springer, 1965, 269 pp.
- [5] A. Mori, On an absolute constant in the theory of quasi-conformal mappings, J. Math. Soc. Jap., 8 (1956).
- [6] G.D. Mostow, Quasi-conformal mappings in n -space and the rigidity of hyperbolic space forms, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 34 (1968).

- [7] J. Väisälä, Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings, Lecture Notes in Math., 229, Springer, 1971, 144 pp.