

Functional independence and randomness of L -functions

名越弘文 (Hirofumi Nagoshi), 成蹊大

1. はじめに

本稿では、Dirichlet 級数たちのあるクラスに対して、値分布の観点から、ある独立性を与える。Dirichlet 級数たちの独立性の研究は、下記に述べる 1900 年の Hilbert の講演から始まったようであるが、今では様々な手法がある。本稿では、Voronin によって始まった値分布の観点からの手法を扱う。

L 関数を別の L 関数たちを用いて表わすという定理たちがある。基本的な例として、二次体/ $\mathbb{Q}$ のデデキント・ゼータ関数がリーマン・ゼータ関数とある Dirichlet L 関数の積で書けるという結果がある。(よってこれは、後に Theorem 1 で述べるような独立性が成り立たない例となっている。) 一方で、標語的に言って『 L 関数たち (特に、 $GL(n)/\mathbb{Q}$ ($n = 1, 2, \dots$) の cuspidal な保型表現に対する L 関数たち) が、互いに独立・ランダムに振舞う』という感じの現象は、様々な定理に (implicitly に) 現れる。今では古典的な結果である large sieve (の Dirichlet L 関数たちを使った証明)、また $SL(2, \mathbb{Z})$ のスペクトル理論やそれから得られる large sieve 型の不等式にはそのような雰囲気があるろうし、最近ではランダム行列理論と L 関数の族との関わりについての様々な研究結果が得られている (ただし、互いに独立という側面が存在する一方で、何らかの相関もあるという側面も存在する)。

2. 歴史 I

1900 年にパリで開催された国際数学者会議で、Hilbert が有名な講演 (23 題の問題の講演) を行ったが、その中で、リーマン・ゼータ関数 $\zeta(s)$ について、algebraic-differential independence over $\mathbb{C}(s)$ が成り立つ、すなわち、

$$P(s, \zeta(s), \zeta^{(1)}(s), \dots, \zeta^{(M)}(s)) = 0$$

が s について恒等的に成り立つような $M + 2$ 変数の多項式 P は零多項式以外にはない、ということを述べた。(ただし、Hilbert の興味は、独立性という観点よりも、 $\zeta(s)$ が代数的な微分方程式の解になりえるかどうか、すなわち、 $\zeta(s)$ がそのような意味で「超越的」かどうか、という観点からだったようである。) Hilbert の証明は、ガンマ関数が上記のような algebraic-differential independence over $\mathbb{C}(s)$ という Hölder の結果 (1887 年) と $\zeta(s)$ の関数等式を使った証明であった。また、Hilbert はその講演で、ある一般化された問題を

提示したが、それは Ostrowski [Os] によって（ヒルベルトによる先の証明とは別の証明方法により）さらにもっと一般的な形で証明された。

上記の独立性は、Dirichlet 級数 $D(s)$ を一つ取ってきて固定し、 $D(s)$ とその derivatives たち $D^{(n)}(s) (n = 1, 2, \dots)$ に対する独立性であったが、おそらくもっと興味深いのは、複数個の Dirichlet 級数たち、特に L 関数たちを取ってきて、それら（とそれらの derivatives）が独立であるかという問題であろう。このような問題に対する古典的な結果として、Artin [Ar] (see also [Ni]) による次の結果がある。有限次ガロア拡大 $K/\mathbb{Q}$ に対して、 $\chi_1, \dots, \chi_r$ をガロア群 $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の irreducible characters とするとき、Artin は、Artin L 関数たち $L(s, \chi_1, K/\mathbb{Q}), \dots, L(s, \chi_r, K/\mathbb{Q})$ に対して multiplicative independence、すなわち、

$$L(s, \chi_1, K/\mathbb{Q})^{m_1} \cdots L(s, \chi_r, K/\mathbb{Q})^{m_r} = 1$$

が s について恒等的に成り立つ $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{Z}$ は $m_1 = \cdots = m_r = 0$ 以外にはない、ということを示した。

3. 歴史 II

1973 年頃になって Voronin によって、Section 2 で述べた Hilbert の結果に対して $\zeta(s)$ の値分布の観点からの別証明が得られた。それに関することを以下に述べる。

実数 σ が $\sigma > 1$ であるとき、任意の実数 t に対して、

$$(3.1) \quad |\zeta(\sigma + it)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma+it}} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}$$

となりまた和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}$ は収束するので、 $\zeta(s)$ の $\text{Re } s = \sigma$ 上の値全体 $\{\zeta(\sigma + it) \mid t \in \mathbb{R}\}$ は、半径 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}$ の円内または円上に収まり $\mathbb{C}$ で dense ではない。

しかし 1914 年に Bohr と Courant [BC] が、 σ を $1/2 < \sigma \leq 1$ となる実数とすると、 $\zeta(s)$ の $\text{Re } s = \sigma$ 上の値全体

$$(3.2) \quad \{\zeta(\sigma + it) \in \mathbb{C} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

は $\mathbb{C}$ で dense である、ということを証明した。（ちなみに $\{\zeta(1/2 + it) \mid t \in \mathbb{R}\}$ が $\mathbb{C}$ で dense であるかどうかは今でも未解決である。）

その後 1972 年になって、Voronin [V1] が、Bohr のアイデアの他に関数解析的な事実を導入することなどにより、 σ を $1/2 < \sigma \leq 1$ となる実数とし M を自然数とすると、

$$\{(\zeta(\sigma + it), \zeta^{(1)}(\sigma + it), \dots, \zeta^{(M)}(\sigma + it)) \in \mathbb{C}^{M+1} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

が $\mathbb{C}^{M+1}$ で dense である、ということを証明した。

この結果を使って、Voronin は $\zeta(s)$ とその derivatives に対するある独立性を示したが、それを述べるために次の定義を与える。

Definition 1. (*functional independence* の定義) $g_1(s), \dots, g_r(s)$ が *functionally independent* であるとは、次のことが成り立つこととする: m を任意の自然数とする。もしも連続関数 $F_0, \dots, F_m : \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}$ が

$$\sum_{k=0}^m s^k F_k(g_1(s), \dots, g_r(s)) = 0$$

を (ある領域で) s について恒等的に満たすならば、すべての $0 \leq k \leq m$ で F_k は恒等的に 0 である関数である。

Voronin [V2] [KV, p. 254] は、先の denseness result (特に σ として $\sigma = 1$ のときだけで十分であるが) から、任意の自然数 M に対して $\zeta(s), \zeta^{(1)}(s), \dots, \zeta^{(M)}(s)$ が functionally independent であることを証明した。これは、Section 2 で述べた Hilbert の結果の別証明を与えているだけでなく、さらにもっと強い主張を与えている。その証明については、Section 7 も参照されたい。

Voronin による $\zeta(s)$ に対する上記の仕事の後、Dirichlet L 関数 (実は Section 4 に述べるようにもっと強く複数個で) [V3]、 $SL(2, \mathbb{Z})$ の holomorphic Hecke eigen cusp form の L 関数 [LM1]、 $SL(2, \mathbb{Z})$ の Maass form の L 関数 (Ramanujan 予想を仮定せずに) [N1]、ある一般のクラスに属する Dirichlet 級数 [St] [NS] などに対して、類似の denseness の結果が得られ、よって、それら各級数とその derivatives に対する functional independence が得られている。それらについては [St] を参照されたい。Section 2 で述べた Artin の結果は、実際にはもっと強く functional independence まで言える。

4. 歴史 III

前 section では、一つの L 関数を固定してそれとその derivatives に対する functional independence を述べたが、以下に述べるように、Voronin [V3] は、複数個の Dirichlet L 関数たちとそれらの derivatives に対して functional independence を示した。今、 $\chi_1, \dots, \chi_r$ を mod q の異なる Dirichlet 指標たちとし、 $L(s, \chi_j)$ を χ_j に対する Dirichlet L 関数とする。 σ を $1/2 < \sigma < 1$ となる実数とする。そのとき、まず、Voronin [V3] [KV, p. 270] は、集合

$$\left\{ \left(L(\sigma + it, \chi_1), \dots, L(\sigma + it, \chi_r), L^{(1)}(\sigma + it, \chi_1), \dots, L^{(1)}(\sigma + it, \chi_r), \dots, L^{(M)}(\sigma + it, \chi_1), \dots, L^{(M)}(\sigma + it, \chi_r) \right) \in \mathbb{C}^{r(M+1)} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

が $\mathbb{C}^{r(M+1)}$ で dense であることを証明した。(この結果は、同時期に独立に Bagchi [Ba] と Gonek によっても得られた。) そして、Voronin [V3] [KV, p. 271] は、 $\zeta(s)$ の場合と同様の議論によりこの denseness result から、 $L(s, \chi_j)$ たちとそれらの derivatives に対する functional independence を得た。

その denseness result の証明であるが、Dirichlet 指標 χ_j たちの持つ次の二つの性質が重要となる：周期性

$$(4.1) \quad \chi_j(p) = \chi_j(a) \quad \text{if } p \equiv a \pmod{q},$$

と直交性

$$(4.2) \quad \sum_{1 \leq n \leq q, (n, q) = 1} \chi_j(n) \overline{\chi_l}(n) = \begin{cases} \#\{1 \leq n \leq q \mid (n, q) = 1\} & \text{if } \chi_j = \chi_l, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

その後、例えば、 $SL(2, \mathbb{Z})$ の holomorphic Hecke eigen cusp form f を一つ固定して Dirichlet 指標たち $\chi_1, \dots, \chi_r$ で twist してできる L 関数たち $L(s, f, \chi_1), \dots, L(s, f, \chi_j)$ について ([LM2]) や、 χ_j たちで twist してできるもっと一般的な L 関数たち ([St, Chapter 12]) について同様な結果が得られた。ただし、それらの証明にも、 χ_j たちが持つ上記の周期性 (4.1) と直交性 (4.2) が重要となる。

複数列の L 関数たちの functional independence に関してこれまで知られていた結果は、上記のようなタイプのみであり、よって、例えば、 $SL(2, \mathbb{Z})$ の holomorphic Hecke eigen cusp forms $f_1, \dots, f_r$ に対しては上記の周期性 (4.1) と直交性 (4.2) のような性質は期待できないので、L 関数たち $L(s, f_1), \dots, L(s, f_r)$ (とそれらの derivatives) に対する functional independence は知られていなかった。しかし今回、この functional independence やもっと一般の結果を、Selberg's orthogonality と呼ばれる直交性を使うことによって得ることができたので、それを次の section で与える。

5. 主結果

今回得られた主結果 (Theorem 1) とそれを得るための値分布に関する結果 (Theorem 2) を述べる。

記号 $\mathcal{L}$ で、次の二つの条件を満たす Dirichlet 級数たち

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

全体の集合を表すとする：

(I) (Euler product) $\operatorname{Re} s$ が十分大きいときに、

$$(5.1) \quad L(s) = \prod_p \prod_{r=1}^{d_L} \left(1 - \frac{\alpha_L(p, r)}{p^s}\right)^{-1}$$

となる自然数 d_L と複素数たち $\alpha_L(p, r)$ ($1 \leq r \leq d_L$, p は素数) が存在する。ここで、 d_L と $\alpha_L(p, r)$ たちは $L(s)$ に寄る。

(II) (Ramanujan bound) 各 $\alpha_L(p, r)$ ($1 \leq r \leq d_L$, p は素数) が

$$|\alpha_L(p, r)| \leq 1$$

を満たす。

$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$ が $\mathcal{L}$ の元であるとき、条件 (II) より $a(n) \ll n^\varepsilon$ となる (see [St, Lemma 2.2]) ので、 $L(s)$ は $\operatorname{Re} s > 1$ で絶対収束する。 $\mathcal{L}$ について $\operatorname{Re} s \leq 1$ への解析接続は仮定していないことを注意しておく。

そのとき、次の Theorem 1 が成り立つ。ちなみに、Theorem 1 は、集会で与えた定理を改良したものであり、集会で扱った Dirichlet 級数たちのクラスよりも広いクラスに対して functional independence を示している。

Theorem 1. *Let $L_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_1(n)n^{-s}, \dots, L_N(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_N(n)n^{-s}$ be distinct functions in the class $\mathcal{L}$ satisfying*

$$(5.2) \quad \sum_{p \leq x} \frac{a_j(p) \overline{a_k(p)}}{p} = \begin{cases} \kappa_j \log \log x + o(\log \log x) & \text{if } j = k \\ o(\log \log x) & \text{if } j \neq k, \end{cases}$$

as $x \rightarrow \infty$, where each κ_j is some positive constant. Let M be any positive integer. Then $L_1(s), \dots, L_N(s), L_1^{(1)}(s), \dots, L_N^{(1)}(s), \dots, L_1^{(M)}(s), \dots, L_N^{(M)}(s)$ are functionally independent.

式 (5.2) が、Selberg's orthogonality と呼ばれる直交性である (see [KP], [Se], [LWY])。Selberg's orthogonality の応用がいくつか知られているが、Theorem 1 に関連したものとして、ある unique factorization が成り立つことが知られている (see [St, Theorem 6.3])。

また、関連する論文として、[KMP] と [Ni] を挙げておく。

Theorem 1 より下記の corollary が成り立つ。 $\mathcal{R}(GL(n), \mathbb{Q})$ で集合

$$\left\{ \pi \mid \begin{array}{l} \pi \text{ is an irreducible cuspidal automorphic representation} \\ \text{with unitary central character for } GL(n) \text{ over } \mathbb{Q} \end{array} \right\}$$

を表すとし、

$$\mathcal{R}(GL, \mathbb{Q}) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}(GL(n), \mathbb{Q})$$

とする。 $\pi \in \mathcal{R}(GL, \mathbb{Q})$ に対して、

$$L(s, \pi) = \prod_{p < \infty} \prod_{r=1}^d \left(1 - \frac{\alpha_\pi(p, r)}{p^s} \right)^{-1}$$

を π の L 関数とする ([GJ], [RS])。 π に対する Ramanujan 予想とは、各 $r = 1, \dots, d$ に対して、

$$\begin{aligned} |\alpha_\pi(p, r)| &= 1 & (p \text{ が unramified のとき}), \\ |\alpha_\pi(p, r)| &\leq 1 & (p \text{ が ramified のとき}) \end{aligned}$$

が成り立つという予想である。この予想が成り立つとき、 $L(s, \pi)$ は $\mathcal{L}$ に属する。Rankin-Selberg L 関数を用いることにより、 $\mathcal{R}(GL, \mathbb{Q})$ に対しては Selberg's

orthogonality が成り立つことが知られている ([LWY], [IK, Theorem 5.13])。よって、Theorem 1 より、次が成り立つ。

Corollary 1. *Let $\pi_1, \dots, \pi_N$ be non-equivalent automorphic representations in $\mathcal{R}(GL, \mathbb{Q})$. Assume that the Ramanujan conjecture holds for every π_j . Let $M \in \mathbb{N}$. Then $L(s, \pi_1), \dots, L(s, \pi_N), L^{(1)}(s, \pi_1), \dots, L^{(1)}(s, \pi_N), \dots, L^{(M)}(s, \pi_1), \dots, L^{(M)}(s, \pi_N)$ are functionally independent.*

Theorem 1 は、下記の Theorem 2 という denseness result から得られる。 $\zeta(s)$ に関して、(3.1) で述べたように $\sigma > 1$ のとき $\text{Re } s = \sigma$ 上の値たちは有界となる。しかし、(3.2) で述べたように $\text{Re } s = 1$ 上の値たちは $\mathbb{C}$ で dense となるから、絶対収束領域 $\text{Re } s > 1$ 上の値たち $\{\zeta(\sigma + it) \mid \sigma > 1, t \in \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{C}$ で dense となることが分かる。また、このことは、[Ti, p. 300] にあるように、 $\text{Re } s = 1$ 上の denseness の事実を使わずに直接的に証明できる。これらのことに注目して、Theorem 2 では $\text{Re } s > 1$ 上の値分布を扱う。そして実は Theorem 1 を導くにはそれで十分である。Theorem 2 の証明では、 $\text{Re } s \leq 1$ への解析接続などは必要はなく、 $\mathcal{L}$ の条件は比較的緩い条件となった。ちなみに、集会で扱ったのは $\text{Re } s = 1$ 上の値分布の結果であったが、そのためには、扱う Dirichlet 級数について $\mathcal{L}$ の条件よりもきつい条件が必要であった。

Theorem 2. *Let $L_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_1(n)n^{-s}, \dots, L_N(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_N(n)n^{-s}$ be distinct functions in the class $\mathcal{L}$ satisfying*

$$\sum_{p \leq x} \frac{a_j(p) \overline{a_k(p)}}{p} = \begin{cases} \kappa_j \log \log x + o(\log \log x) & \text{if } j = k \\ o(\log \log x) & \text{if } j \neq k, \end{cases}$$

as $x \rightarrow \infty$, where each κ_j is some positive constant. Let M be a positive integer. Then for any numbers $z_{jm} \in \mathbb{C}$ ($1 \leq j \leq N, 1 \leq m \leq M$) and any $\varepsilon > 0$, there exists a number $\sigma_0 > 1$ such that

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ t \in [0, T] \mid \left| L_j^{(m)}(\sigma_0 + it) - z_{jm} \right| < \varepsilon \right. \\ \left. \text{for all } 1 \leq j \leq N, 1 \leq m \leq M \right\} > 0,$$

where $\text{meas}\{\dots\}$ denotes the Lebesgue measure of the set $\{\dots\}$.

6. THEOREM 2 の証明の概略

Theorem 2 の証明の詳細については [N2] を参照されたいが、Theorem 2 の証明では、下記の Lemma 2 が最も重要となり、この Lemma の証明で Selberg's orthogonality が使われる。Lemma 2 の証明のために、次の Lemma 1 を用いる。Lemma 1 は既に知られていたものであり関数解析の話 (separation theorem) を使って証明される。Lemma 1 と少し違う形のものが Voronin の論文 [V1] では使われている。

Lemma 1. Let H be a complex Hilbert space with inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and norm $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Let $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ be a sequence in H satisfying the following two conditions:

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 < \infty$,
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle u_n, u \rangle| = \infty$ for any non-zero element $u \in H$.

Let any $m \in \mathbb{N}$ be fixed. Then the set $\{\sum_{n=m}^{m'} c_n u_n \mid m' \geq m, c_n \in \mathbb{C}, |c_n| = 1 \text{ for } m \leq n \leq m'\}$ is dense in H .

Lemma 2. Let $L_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_1(n)n^{-s}, \dots, L_N(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_N(n)n^{-s}$ be distinct functions in $\mathcal{L}$ satisfying

$$(6.1) \quad \sum_{p \leq x} \frac{a_j(p) \overline{a_k(p)}}{p} = \begin{cases} \kappa_j \log \log x + o(\log \log x) & \text{if } j = k \\ o(\log \log x) & \text{if } j \neq k, \end{cases}$$

as $x \rightarrow \infty$, where each κ_j is some positive constant. Let M be a positive integer. For every prime p , we define $\mathbf{F}_p \in \mathbb{C}^{N(M+1)}$ by

$$\mathbf{F}_p := \left(\frac{a_1(p)}{p}, \frac{(-\log p)a_1(p)}{p}, \dots, \frac{(-\log p)^M a_1(p)}{p}, \dots, \frac{a_N(p)}{p}, \frac{(-\log p)a_N(p)}{p}, \dots, \frac{(-\log p)^M a_N(p)}{p} \right).$$

Let y be a positive real number. Then the set

$$\left\{ \sum_{y \leq p \leq \nu} c_p \mathbf{F}_p \mid \nu \geq y, c_p \in \mathbb{C}, |c_p| = 1 \text{ for every prime } p \text{ with } y \leq p \leq \nu \right\}$$

is dense in $\mathbb{C}^{N(M+1)}$.

< Lemma 2 の証明の概略 > Lemma 1 において、 $H = \mathbb{C}^{N(M+1)}$, $u_n = \mathbf{F}_{p_n}$ (ここで p_n は n 番目の素数) と取ったときに条件 (i)、(ii) が言えれば、Lemma 1 から Lemma 2 が従う。

そのように取ったとき、条件 (i) は容易に分かる。以下、条件 (ii)、すなわち、

$$\mathbf{w} = \left(w(1, 0), \dots, w(1, M), \dots, w(N, 0), \dots, w(N, M) \right) \in \mathbb{C}^{N(M+1)}$$

を任意の零ベクトルでないベクトルとしたときに

$$(6.2) \quad \sum_{p \leq x} |\langle \mathbf{F}_p, \mathbf{w} \rangle| \rightarrow \infty \quad (\text{as } x \rightarrow \infty)$$

が成り立つことを示す。

$\mathbf{w}$ は零ベクトルでないことに注意して、 $M_0 := \max\{0 \leq m \leq M \mid w(j, m) \neq 0 \text{ for some } j\}$ とすると、

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}_p, \mathbf{w} \rangle &= \sum_{j=1}^N \sum_{m=0}^M \frac{(-\log p)^m a_j(p)}{p} \overline{w(j, m)} \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{(-\log p)^{M_0} a_j(p)}{p} \overline{w(j, M_0)} + \sum_{j=1}^N \sum_{m=0}^{M_0-1} \frac{(-\log p)^m a_j(p)}{p} \overline{w(j, m)} \end{aligned}$$

となる。これと $\mathcal{L}$ の条件 (II) などを使うと、任意の正の実数 ε に対して、ある素数 $p_0 = p_0(\varepsilon, L_1, \dots, L_N, M, \mathbf{w})$ があって、 $p > p_0$ となるすべての素数 p に対して、

$$(6.3) \quad |\langle \mathbf{F}_p, \mathbf{w} \rangle| \geq \frac{(\log p)^{M_0}}{p} \left(\left| \sum_{j=1}^N a_j(p) \overline{w(j, M_0)} \right| - \varepsilon \right)$$

が成り立つ。

各 $1 \leq j \leq N$ に対して $w_j := w(j, M_0)$ と書くとする。 M_0 の定義より、ある j に対しては $w_j \neq 0$ になることに注意して、小さな正の実数 μ に対して $\mathcal{Q}_\mu = \mathcal{Q}(\mu, L_1, \dots, L_N, w_1, \dots, w_N)$ で $\left| \sum_{j=1}^N a_j(p) \overline{w_j} \right| > \mu$ を満たすすべての素数 p たち全体を表すとする。そのとき、Selberg's orthogonality (6.1) と $\mathcal{L}$ の条件 (II) を使って、和

$$\sum_{p \leq x} \frac{\left| \sum_{j=1}^N a_j(p) \overline{w_j} \right|^2}{p}$$

を

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} \frac{\left| \sum_{j=1}^N a_j(p) \overline{w_j} \right|^2}{p} &= \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in \mathcal{Q}_\mu}} \frac{\left| \sum_{j=1}^N a_j(p) \overline{w_j} \right|^2}{p} + \sum_{\substack{p \leq x \\ p \notin \mathcal{Q}_\mu}} \frac{\left| \sum_{j=1}^N a_j(p) \overline{w_j} \right|^2}{p} \\ &\leq \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in \mathcal{Q}_\mu}} \frac{(\sum_{j=1}^N D |w_j|)^2}{p} + \sum_{\substack{p \leq x \\ p \notin \mathcal{Q}_\mu}} \frac{\mu^2}{p} \end{aligned}$$

(ここで、 $D := \max\{d_{L_j} \mid 1 \leq j \leq N\}$, d_{L_j} は (5.1) にある自然数) と

$$\sum_{p \leq x} \frac{\left| \sum_{j=1}^N a_j(p) \overline{w_j} \right|^2}{p} = \sum_{p \leq x} \frac{\left(\sum_{j=1}^N a_j(p) \overline{w_j} \right) \left(\overline{\sum_{j=1}^N a_j(p) \overline{w_j}} \right)}{p}$$

$$= \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \left(\sum_{j=1}^N |a_j(p)|^2 |w_j|^2 + \sum_{1 \leq j \neq l \leq N} a_j(p) \overline{w_j} \overline{a_l(p)} w_l \right)$$

の二通りで評価する。そうすることによって、 μ と ε を十分小さく取る ($\mu > \varepsilon$ を満たして) と

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \in Q_\mu}} \frac{1}{p} \gg \log \log x \quad (\text{as } x \rightarrow \infty)$$

が成り立つことが分かる。

これと (6.3) より

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} |\langle \mathbf{F}_p, \mathbf{w} \rangle| &\geq \sum_{\substack{p_0 < p \leq x \\ p \in Q_\mu}} |\langle \mathbf{F}_p, \mathbf{w} \rangle| \geq (\mu - \varepsilon) \sum_{\substack{p_0 < p \leq x \\ p \in Q_\mu}} \frac{(\log p)^{M_0}}{p} \\ &> (\mu - \varepsilon) \sum_{\substack{p_0 < p \leq x \\ p \in Q_\mu}} \frac{1}{p} \longrightarrow \infty \quad (\text{as } x \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となり、(6.2) が示され、よって Lemma 2 が得られた。

7. THEOREM 2 から THEOREM 1 の導出

Voronin による $\zeta(s)$ の場合と同様な議論により、Theorem 2 を使って Theorem 1 は証明されるのだが、その証明を述べる。

Theorem 2 を得るには、「 m を任意の自然数とするとき、もしも連続関数たち $F_0, \dots, F_m : \mathbb{C}^{N(M+1)} \rightarrow \mathbb{C}$ が、ある F_j は恒等的に 0 でない関数ならば、

$$(7.1) \quad \sum_{j=0}^m s^j F_j(L_1(s), \dots, L_N(s), \dots, L_1^{(M)}(s), \dots, L_N^{(M)}(s)) \neq 0$$

となる s が存在する」ことを言えよ。

今、 $n := \max\{0 \leq j \leq m \mid F_j \not\equiv 0\}$ とする。そのとき、 F_n は連続なので、

$$|F_n(\mathbf{w})| > c \quad \text{for all } \mathbf{w} \in U.$$

となる定数 $c > 0$ と有界開集合 $U \subset \mathbb{C}^{N(M+1)}$ がある。

Theorem 2 によれば、

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_j &:= (L_1(\sigma_0 + it_j), \dots, L_N(\sigma_0 + it_j), \\ &\quad \dots, L_1^{(M)}(\sigma_0 + it_j), \dots, L_N^{(M)}(\sigma_0 + it_j)) \in U. \end{aligned}$$

となる $\sigma_0 > 1$ と数列 $\{t_j \mid j = 1, 2, \dots\}$ ($\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = \infty$ を満たす) が存在する。よって、 $n \geq 1$ のとき、すべての連続関数 F_j は U 上有界であることに注意すると

$$|(\sigma_0 + it_j)^n F_n(\mathbf{w}_j) + (\sigma_0 + it_j)^{n-1} F_{n-1}(\mathbf{w}_j) + \dots + F_0(\mathbf{w}_j)| \longrightarrow \infty$$

(as $j \rightarrow \infty$) が成り立つ。また、 $n = 0$ のときは、 $|F_0(\mathbf{w}_j)| > c$ である。以上より、 n がいずれの場合にも、(7.1) が得られる。こうして Theorem 1 の証明が完了した。

REFERENCES

- [Ar] E. Artin, *Über eine neue Art von L-Reihen*, Hamb. Math. Abh. **3** (1923), 89–108.
- [Ba] B. Bagchi, *A joint universality theorem for Dirichlet L-functions*, Math. Z. **181** (1982), 319–334.
- [BC] H. Bohr, R. Courant, *Neue Anwendungen der Theorie der Diophantischen Approximationen auf die Riemannsche Zetafunktion*, J. Reine Angew. Math. **144** (1914), 249–274.
- [GJ] R. Godement, H. Jacquet, *Zeta functions of simple algebras*, Lecture Notes in Mathematics, 260, Springer-Verlag, 1972.
- [IK] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, Amer. Math. Soc., Colloquium Publications 53, 2004.
- [KP] J. Kaczorowski, A. Perelli, *The Selberg class: a survey*, in “Number Theory in Progress”, Proc. Conf. in Honor of A. Schinzel, ed. by K. Györy et al., pp. 953–992, de Gruyter 1999.
- [KMP] J. Kaczorowski, G. Molteni, A. Perelli, *Linear independence of L-functions*, Forum Math. **18** (2006), 1–7.
- [KV] A. A. Karatsuba, S. M. Voronin, *The Riemann Zeta-Function*, Walter de Gruyter, 1992.
- [LM1] A. Laurinćikas, K. Matsumoto, *The universality of zeta-functions attached to certain cusp forms*, Acta Arith. **98** (2001), 345–359.
- [LM2] A. Laurinćikas, K. Matsumoto, *The joint universality of twisted automorphic L-functions*, J. Math. Soc. Japan **56** (2004), 923–939.
- [LWY] J. Liu, Y. Wang, Y. Ye, *A proof of Selberg’s orthogonality for automorphic L-functions*, Manuscr. Math. **118** (2005), 135–149.
- [Ni] F. Nicolae, *On Artin’s L-functions. I*, J. reine angew. Math. **539** (2001), 179–184.
- [N1] H. Nagoshi, *The universality of L-functions attached to Maass forms*, Adv. Stud. Pure Math., **49** (2007), 289–306.
- [N2] H. Nagoshi, *Independence and orthogonality of L-functions*, in preparation.
- [NS] H. Nagoshi, J. Steuding, *The universality of Dirichlet series in the Selberg class*, in preparation.
- [Os] A. Ostrowski, *Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen*, Math. Zeitschr. **8** (1920), 241–298.
- [RS] Z. Rudnick, P. Sarnak, *Zeros of principal L-functions and random matrix theory*, Duke Math. J. **81** (1996), 269–322.

- [Se] A. Selberg, *Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series*, Bombieri, E. (ed.) et al., Proceedings of the Amalfi conference on analytic number theory, 367-385 (1992).
- [St] J. Steuding, *Value Distribution of L-functions*, Lecture Notes in Mathematics **1877**, Springer-Verlag, 2007.
- [Ti] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Second Edition, Oxford University Press, 1986.
- [V1] S. M. Voronin, *On the distribution of nonzero values of the Riemann zeta-function*, Trudy Mat. Inst. Steklov. **128** (1972), 131–150; Proc. Steklov Inst. Math. **128** (1972), 153–175.
- [V2] S. M. Voronin, *On differential independence of ζ -functions*, Sov. Math., Dokl. **14** (1973), 607–609.
- [V3] S. M. Voronin, *The functional independence of Dirichlet L-functions*, Acta Arith. **27** (1975), 493–503. (Russian)