

弱圧縮性乱流の統計的性質と密度分布

東北大学大学院 情報科学研究科 応用情報科学専攻 寺門 大毅

Daiki Terakado

Department of Applied Information Sciences, Graduate School of Information Sciences,

Tohoku University

東北大学 流体科学研究所 服部 裕司

Yuji Hattori

Institute of Fluid Science,

Tohoku University

1. 緒言

自然界の海洋や大気の流れ、産業界での航空機や車などの輸送機械や空調設備に生じる流れなど、私たちの身の回りのほとんどの流れは乱流である。さらに、気象現象や航空宇宙分野で現れる高速気体流れでは圧縮性が強くなる。そのため、この分野で現れる乱流を考える際には圧縮性の影響を考慮しなくてはならないが、これまでにその影響は十分には理解されていない。本研究では 2 次元弱圧縮性乱流を対象とする。弱圧縮性乱流つまり低マッハ数乱流を取り上げることで衝撃波が生じない場合の圧縮性の影響を調べることを目的とする。また、2 次元乱流では計算コストの観点から 3 次元乱流の場合と比較して高いレイノルズ数での計算が可能である。したがって、スペクトルを調べる際に広い範囲の波数を用いることが可能であり、圧縮性の影響を詳細に調べることが出来る。2 次元乱流と 3 次元乱流は異なる性質を持つが、圧縮性が乱流に与える影響という観点では類似点があると考えられる。ここで得られた圧縮性の知見は衝撃波が生じる高速気体流れの複雑な現象の解明にも生かすことが出来ると期待される。

弱圧縮性乱流研究に関しては、より強い圧縮性を持つ流れの理解へのステップとしての研究に加えて、宇宙流体分野への応用を目的とした研究も行われている。星間物質 (ISM) や太陽風の密度スペクトルは Kolmogorov スペクトル $k^{-5/3}$ に従うことがこれまでの観測により知られている^[1,2]。さらに、それらのエネルギースペクトルも同様に Kolmogorov スペクトルに従うということ^[3,4]から、ISM や太陽風の流れが非圧縮性に近い流れとなっていると予想されている。そこで、弱圧縮性乱流を用いてこれらの観測結果を説明する取り組みが行われている。Shaikh et al.^[5]は圧縮性 Navier-Stokes 方程式から導かれた nearly incompressible モデルを用いて 2 次元 nearly incompressible 流れに対する数値シミュレーションを擬スペクトル法により行い、減衰乱流の場合にはエネルギースペクトルと密度スペクトルに波数の-3 乗に比例する慣性領域をもつことを報告している。しかし、彼らの研究では初期条件の与え方が詳しく議論されていないことに加えて、得られたスペクトルが高波数で十分に

減衰していないことから、結果の信頼性に疑問が残っている。圧縮性乱流では非圧縮性乱流とは異なり圧力と密度の初期条件は一通りには決まらず、多くの選択肢が存在する。そこで Samtaney et al.^[6]はその影響を調べることを目的として3次元圧縮性乱流の直接数値計算(DNS)を高次精度有限差分法により行い、初期の圧力と密度の分布が運動エネルギーの統計量に与える影響は無視出来る程度であることを示した。しかし、この研究においても格子点数が 256^3 であることから、より高い解像度を用いて研究を行った場合、新たな知見が得られる可能性が残されている。

以上から、本研究の目的は高解像度の DNS により2次元弱圧縮性減衰乱流の性質を詳細に調べることとする。これにより、圧縮性が乱流に与える影響について詳しく議論する。また、本研究では初期の密度と圧力の依存性に着眼して、その影響が統計的性質や物理過程にどのように現れるかを議論する。

2. 方法

2-1. 方程式

支配方程式は以下に示す2次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式とする。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{m} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial m_i u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{2} (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{m}) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = (\gamma - 1) \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + (\gamma - 1) \phi. \quad (3)$$

ここで、 ρ は密度、 $\mathbf{m}$ は単位体積当たりの運動量、 $\mathbf{u}$ は速度、 p は圧力、 τ_{ij} は粘性応力テンソル、 γ は比熱比、 κ は熱伝導度、 T は温度であり、 ϕ は粘性散逸である。

さらに、比較対象として2次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式を用いる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (5)$$

ここで、 ρ_0 は一定密度、 Re はレイノルズ数である。

2-2. 数値計算方法

領域 $[0, 2\pi]^2$ において周期境界条件で方程式(1)-(3)をスペクトル法(選点法)により解く。格子点数は $N=1024^2-4096^2$ とする。時間発展には4次精度 Runge-Kutta 法を用いる。また、時間の規格化は初期の音速と長さ 2π で行っている。さらに、マッハ数の異なる結果の比較のために場の平均速度 $\langle \mathbf{u} \rangle$ と長さ 2π を用いて定義される以下の無次元時間を使用する。

$$\bar{t} = t \cdot (\langle |\mathbf{u}| \rangle / 2\pi). \quad (6)$$

2-3. 初期条件

速度場は、以下の運動エネルギースペクトル分布を満たすように決定される。

$$E(k) \propto k \exp(-2k^2 / k_0^2). \quad (7)$$

ここで、 k は波数、 k_0 はスペクトルのピーク波数である。さらに、初期の速度場は非圧縮性とする。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (8)$$

また、速度場の平均マッハ数は 0.05, 0.1, 0.2 とする。

密度と圧力の初期条件にはエントロピーの分布が異なる 2 つの初期条件を用いる。また、これらの条件は粘性を無視した Lighthill 方程式の右辺の音源項を(9)は厳密に、(10)は近似的に消去する条件となっている。このため、音波の影響を無視してエントロピー依存性に着眼した研究が可能となる。

Poisson 方程式、等密度 (Non-uniform)

非圧縮性の運動量の式の発散を取ることにより以下の Poisson 方程式を得る。

$$\nabla^2 p = -\rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad \rho_0 = 1 \quad (9)$$

Poisson 方程式、等エントロピー (Uniform)

等エントロピーの仮定のもとに運動量の式の発散を取り、粘性項を無視することで以下に示す Poisson 方程式が導かれる。

$$\nabla^2 \left(\frac{p}{\rho} \right) = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad \frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{1}{\gamma}. \quad (10)$$

3. 結果

プラントル数は $Pr=0.072-7.2$ とする。本計算では、 $\bar{t}=1.11$ 以降を準平衡状態とみなす。準平衡状態におけるレイノルズ数は $Re=(\rho \langle |\mathbf{u}| \rangle 2\pi)/\mu=3.1 \times 10^4 - 3.1 \times 10^5$ でテイラーマイクロスケールに基づくレイノルズ数 R_λ はエンストロフィー Z 、エンストロフィー散逸率 η_Z を用いて $R_\lambda=Z^{3/2}/\eta_Z$ で定義し、 $R_\lambda=21-48$ であった。

3-1. エネルギースペクトル

Fig.1 に $\bar{t} = 2.23$ のエネルギースペクトルを示す。まず、圧縮性 DNS の結果と比較するとエネルギースペクトルに初期の密度と圧力による依存性はない。さらに、非圧縮性 DNS の結果との違いは無視出来る程度であることが分かった。Kraichnan et al^[7] の次元解析によれば、2次元非圧縮性乱流にのエンストロフィーカスケードにおけるエネルギースペクトルは慣性領域において k^3 に比例することが示されている。そこで、-3 乗からのずれを調べるために、3つの異なるレイノルズ数の場合におけるエネルギースペクトルに k^3 を掛けたものを Fig.2 に示す。この結果からレイノルズ数が大きくなると慣性領域指数は-3に近い値となっていることが分かった。

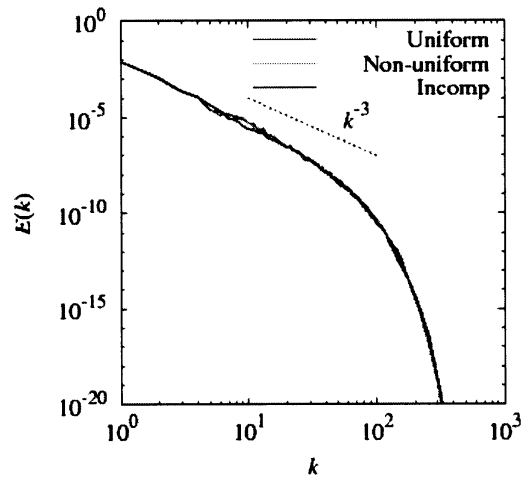


Fig.1 Energy spectrum for $Re=3.1 \times 10^4$, $M_0=0.1$, $Pr=0.72$ at $\bar{t} = 2.23$.

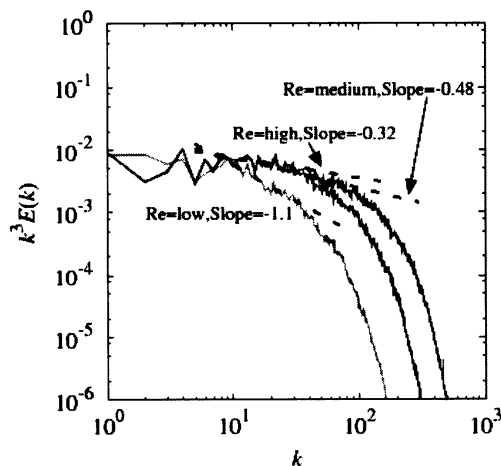


Fig.2 Energy spectrum multiplied by k^3 for uniform case, $Re=3.1 \times 10^4$, 1.3×10^5 , 3.1×10^5 , $M_0=0.1$, $Pr=0.72$ at $\bar{t} = 2.23$.

3-2. 密度場におけるシート状構造

Fig. 3 に $\bar{t} = 1.11$ の密度場を示す。密度場は初期のエントロピーに依存した分布になっている。

初期のエントロピーを一様に与えた場合 (Fig. 3(a)) は連続的な分布となっているが、初期のエントロピーを非一様に与えた場合 (Fig. 3 (b)) にはシート状の構造が発生しているが分かる。

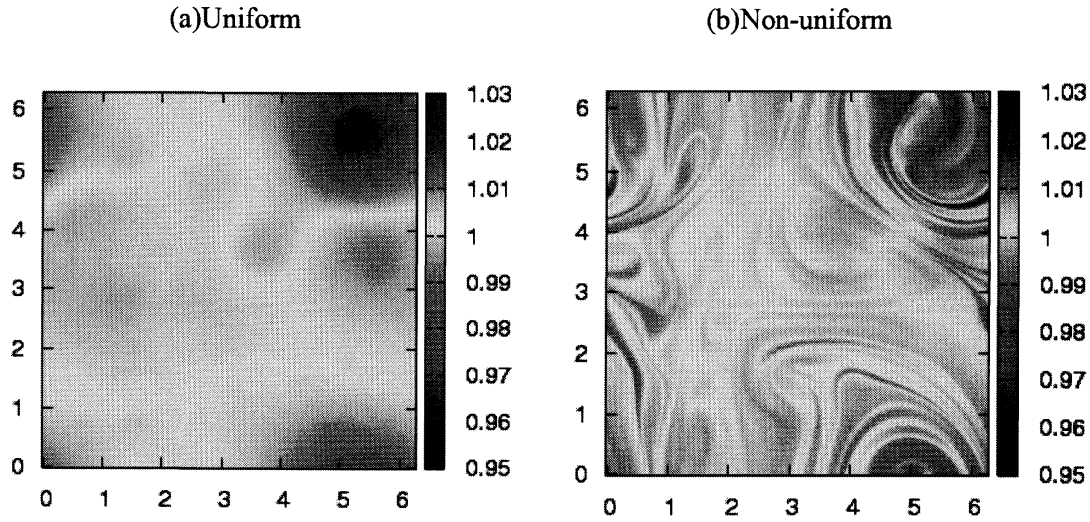


Fig.3 Density field for (a)uniform, (b)non-uniform, $Re=3.1 \times 10^4$, $M_0=0.1$, $Pr=0.72$ at $\bar{t}=1.11$.

初期のエントロピーを非一様に与えた時に密度場にシート状構造が出現する理由を以下で考察する。まずはじめに、以下に示すエントロピー方程式を考える。

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla s \right) = \Phi + \kappa \nabla^2 T. \quad (11)$$

ここで、粘性散逸 Φ は次のように表される。

$$\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij}. \quad (12)$$

今、粘性係数 μ は $1 \times 10^{-5} - 2 \times 10^{-6}$ と非常に小さいので、粘性散逸項を無視出来ると考えると、(11)は

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla s \right) = \kappa \nabla^2 T, \quad (13)$$

となる。これは任意のパッシブスカラー c に対する移流拡散方程式

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = \kappa \nabla^2 c, \quad (14)$$

と同様な形となる。したがって、エントロピーには filamentation が発生していることが予想される。Fig. 4 に示すように実際にエントロピー場には filamentation が発生している。

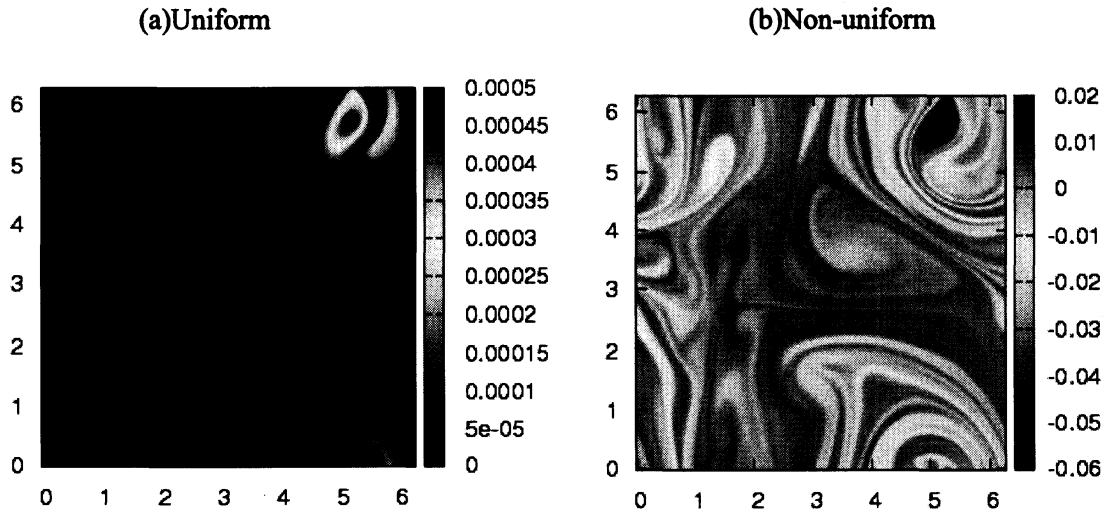


Fig.4 Entropy field for (a)uniform, (b)non-uniform, $Re=3.1 \times 10^4$, $M_0=0.1$, $Pr=0.72$ at $\bar{t}=1.11$.

さらに、圧力場にはシート状構造は存在していないことから密度にシート状構造が生じるとしたら、それはエントロピーによる影響であると考えられる。初期のエントロピーの与え方によって大きく異なるのはエントロピーの絶対値の大きさである。Fig.4のエントロピーの変動幅に注目すると、Fig.4(b)のオーダーはFig.4(a)の1000倍のオーダーとなっていることが分かる。つまり、Fig.4(a)の初期にエントロピーを一様に与えた場合では絶対値が小さいため密度に対する影響は小さい。Fig.4(b)の初期にエントロピーを非一様に与えた場合にはエントロピーの絶対値がFig.4(a)に比べて大きく、密度に影響を与える。したがって、密度場にシート状構造が発生すると考えることが出来る。

以下ではシート状構造の性質について考える。Fig.3 (b)の $x=5.5$ の断面を切断し、Fig.5に示す断面図を得る。さらに、Fig.6はFig.5を $y=4.1-4.6$ において拡大したものである。

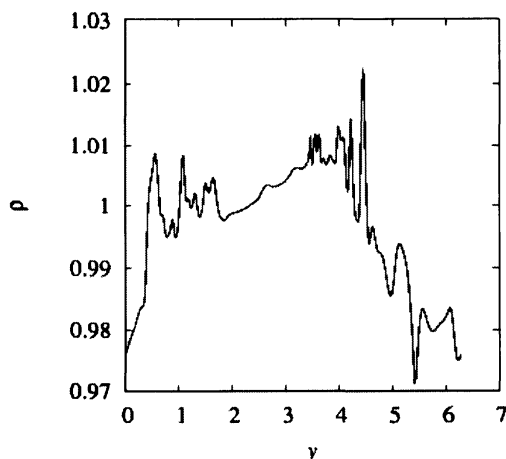


Fig.5 Cross section of Fig.4 (a) at $x=5.5$.

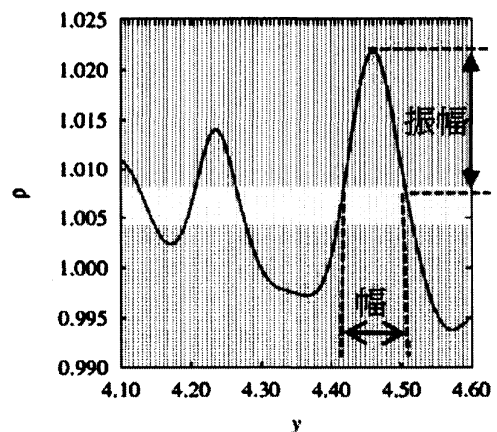


Fig.6 Magnified figure of Fig.5 at $y=4.1-4.6$.

これから幅や振幅の定量的評価を考える。はじめに、幅について以下の長さの次元をも

つ量で評価可能であるかどうかを考える。

$$\langle \nabla \rho \rangle / \langle \Delta \rho \rangle. \quad (15)$$

Fig. 7 に(15)を時間とともにプロットした図を示す。

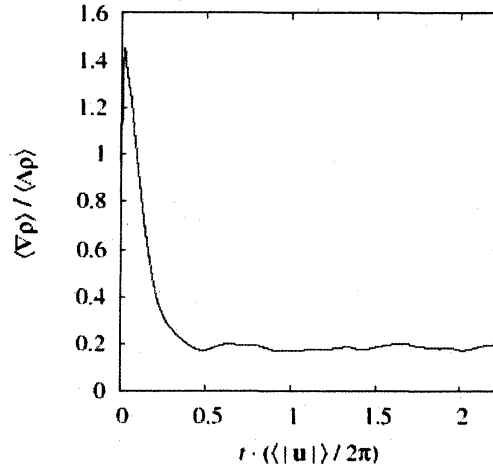


Fig. 7 Scaled widths for non-uniform case, $Re=3.1 \times 10^4$, $M_0=0.1$, $Pr=0.72$.

Fig. 7 において(15)の値はシート状構造が定常となった時の幅の代表的なオーダーと一致する。さらに、グラフの挙動はシート状構造の生成過程に連動して変化することから(15)で幅の定量的評価が可能であることが分かった。

次に、幅がどのような物理量で決定されているかを考える。シート状構造の生成にはエントロピーの拡散が 1 つの重要な役割を果たしていることはすでに述べた。そこで、以下の 1 次元拡散方程式を考える。

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (16)$$

初期条件が δ 関数の場合の解は、以下のガウス分布である。

$$c(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right). \quad (17)$$

この解では $\sqrt{\kappa}$ が幅を表す。したがって、シート状構造の幅に対して $\sqrt{\kappa}$ が 1 つの決定因子になっていると予想される。プラントル数 Pr の定義からプラントル数 Pr と熱伝導度 κ は反比例するので、幅を評価する際に $Pr^{1/2}$ を掛けることで幅が $\sqrt{\kappa}$ に比例するかどうかを調べる。Fig.8(a)に異なる 3 つのプラントル数の比較の結果を示す。一方 Fig. 8(b)は $Pr^{1/2}$ を掛けて整理した結果である。Fig.8(a)においてはプラントル数に依存して値が異なっていたが Fig. 8(b)ではどのプラントル数の場合も同様のオーダーとなっている。

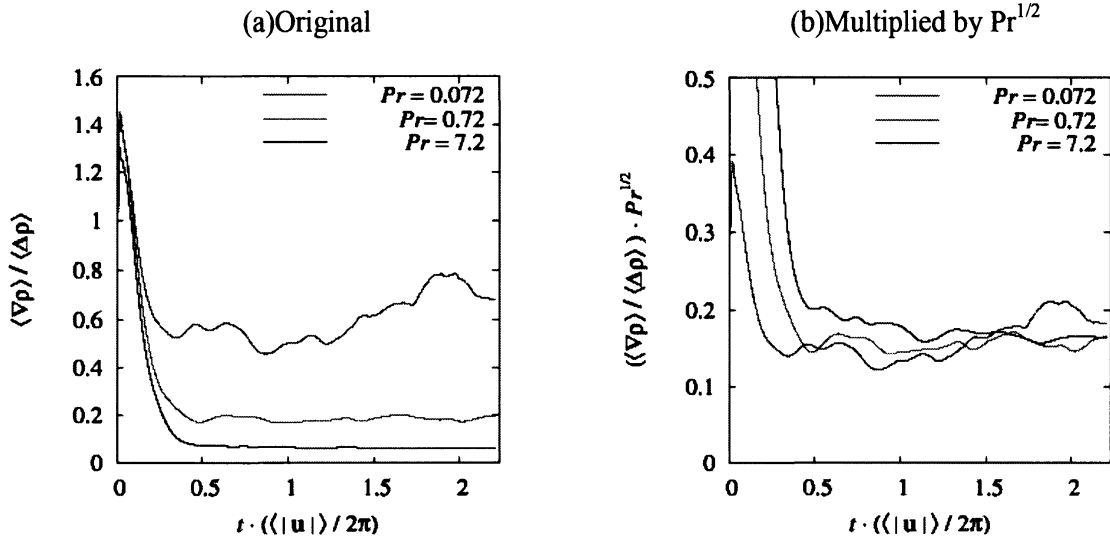


Fig. 8 Scaled widths for non-uniform case, $Re=3.1 \times 10^4$, $M_0=0.1$, $Pr=0.72$.

したがって、シート状構造の幅は $\sqrt{\kappa}$ に比例することが分かる。つまり、 $\sqrt{\kappa}$ はシート状構造の幅の1つの決定因子となっていることが分かる。

続いて、幅のレイノルズ数依存性について考える。Fig. 9(a)に異なる3つのレイノルズ数の場合について幅を評価した結果を示す。ここで、プラントル数は $Pr=0.72$ で一定である。 $Re^{1/2} \propto 1/\sqrt{\mu}$ を Fig. 9(a)に掛けた結果が Fig. 9 (b)である。Fig. 9(a)では値にレイノルズ数依存性が見られるが、Fig. 9(b)ではその差が小さくなっている。つまり、幅は $Re^{1/2}$ に反比例していることが分かる。一方、プラントル数は定義より $Pr \propto \kappa/\mu$ であるから、上の結果とあわせると幅は $(Re Pr)^{-1/2} \propto \sqrt{\kappa}$ に比例することになる。

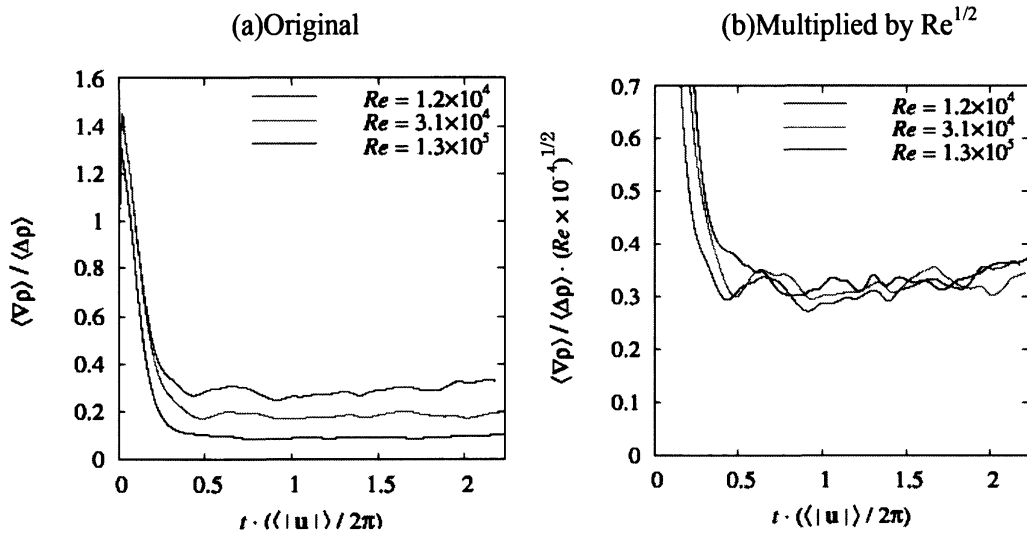


Fig. 9 Scaled widths for non-uniform case, $Re=3.1 \times 10^4$, $M_0=0.1$, $Pr=0.72$.

次に、シート状構造の振幅を考える。振幅が大きくなればなるほど密度の勾配 $\nabla \rho$ も大き

くなると予想される。そこで、 $\nabla\rho$ を用いて定量的評価することを考える。しかし、勾配 $\nabla\rho$ はシート状構造の幅が小さくなることによって大きくなるので、それを補正するために(15)を掛けた以下のような量で評価することを考える。

$$\langle \nabla\rho \rangle \cdot (\langle \nabla\rho \rangle / \langle \Delta\rho \rangle) \quad (18)$$

Fig. 10 に 3 つの異なる初期マッハ数の場合について振幅を評価した結果を示す。マッハ数によって違いが生じていることが分かる。一方 Fig. 10(a)を初期のマッハ数の二乗で割った結果 Fig.10(b)では違いが小さくなり同様のオーダーとなっている。これは、振幅がマッハ数の二乗に比例し、これが振幅に対する一つの決定因子となっていることを示している。以下でこの理由について考察する。密度スペクトルの節で詳しく示すが、等エントロピーで密度と圧力の変動が小さい場合には、基準値からの密度変動 $\rho' = \rho - \rho_0$ と圧力変動 $p' = p - p_0$ が比例すると考えることが出来る。さらに、非圧縮性に近いためベルヌーイの式 $1/2\rho_0|\mathbf{u}|^2 + p = p_0$ を考えれば、 $|\mathbf{u}|^2 \propto p'$ となる。加えて音速の変動が小さくほぼ一定とみなせることより、 $M^2 \propto p'$ となる。ここで、密度変動と圧力変動が比例することを用いれば、 $M^2 \propto \rho'$ を得る。シート状構造が発生するのは初期にエントロピーが非一様な場合であるが、密度変動のオーダーは初期のエントロピーが一様な場合と同様なので、このスケーリングがおおよそ成立していると考えられる。

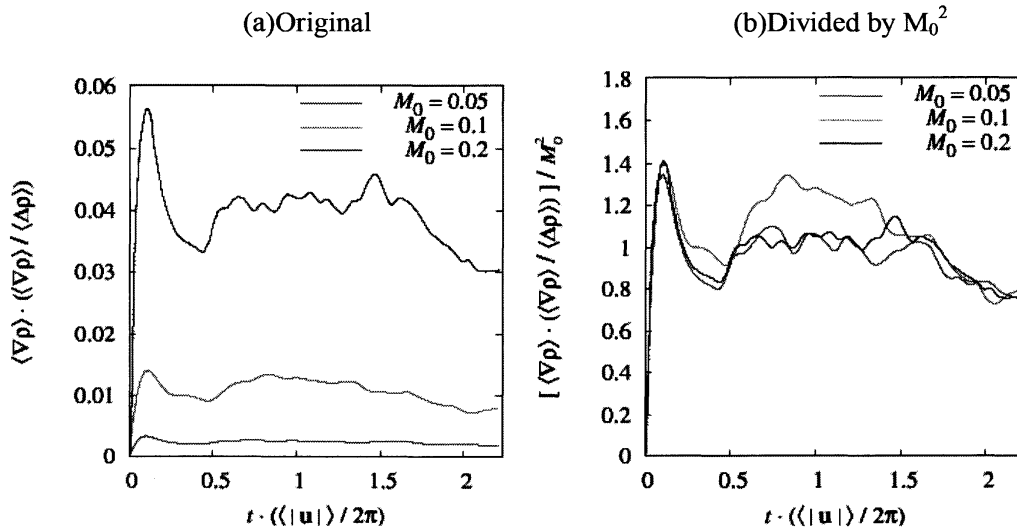


Fig. 10 Scaled amplitudes for non-uniform case, $\text{Re}=3.1 \times 10^4$, $\text{Pr}=0.72$.

3-3. 密度スペクトル

Fig. 11 に準平衡状態における密度スペクトルを示す。これより、初期のエントロピーに依存した 2 つのモードを確認することが出来る。この結果は明らかに密度場に対するエントロピー分布の影響を示している。

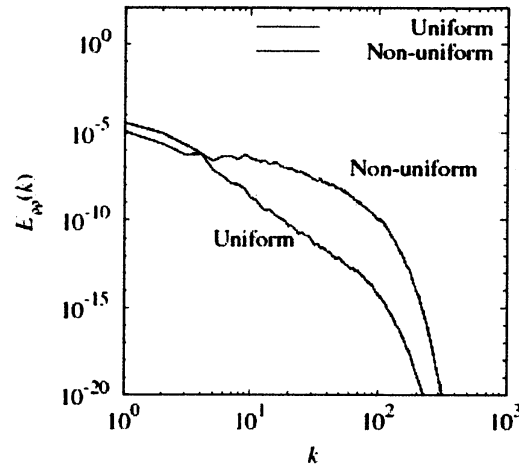


Fig.11 Density spectrum for $Re=3.1 \times 10^4$, $M_0=0.1$, $Pr=0.72$ at $\bar{t} = 2.23$.

最初に初期にエントロピーを一様に与えた場合について考える。この場合、計算時間全体にわたってほぼ等エントロピーな場となっていると予想出来るので、等エントロピー関係式

$$\frac{p}{\rho'} = \frac{p_0}{\rho'_0}, \quad (19)$$

が成立すると考える。本計算では、密度変動及び圧力変動が小さいことを考慮して、線形近似により

$$\frac{p'}{p_0} - \gamma \frac{\rho'}{\rho_0} = 0, \quad (20)$$

を得る。したがって、 $\rho' \propto p'$ となり、密度スペクトルと圧力スペクトルが比例する、つまり $E_{\rho\rho}(k) \propto E_{pp}(k)$ と予想される。そこで、密度スペクトルのスケージングのために圧力スペクトルのスケージングを考える。Lesieur et al.^[8] は非圧縮性の圧力スペクトルが慣性領域においてエンストロフィー散逸率 ε_0 と波数 k のみに依存するとして次元解析を行い、圧力スペクトルが慣性領域において波数の-5 乗に比例すると予測した。したがって、慣性領域において以下の関係式が成立すると予想することが出来る。

$$E_{\rho\rho}(k) \propto E_{pp}(k) \propto k^{-5}, \quad (21)$$

-5 乗からのずれを調べるために、Fig. 12 に 3 つの異なるレイノルズ数を与えた場合の密度スペクトルと圧力スペクトルにそれぞれ k^5 を掛けた結果を示す。まず、密度スペクトルに注目すると、波数の-5 乗に比例する領域が確認出来る。一方、圧力スペクトルに関してもレイノルズ数が最も低い場合は-5 乗からのずれが見られるが、レイノルズ数が大きくなるにつれて、密度スペクトルと重なったフラットな領域が広くなることが分かる。以上から、レイノルズ数が大きい極限では慣性領域において(21)の関係式が成立すると考えられる。

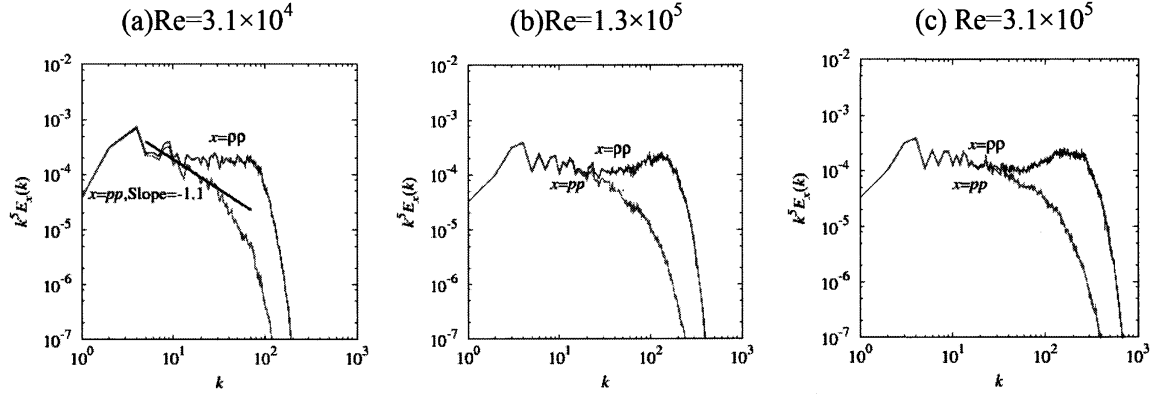


Fig.12 Density spectrum multiplied by k^3 for non-uniform case, (a) $Re=3.1 \times 10^4$, (b) 1.3×10^5 , (c) 3.1×10^5 , $M_0=0.1$, $Pr=0.72$ at $\bar{t} = 2.23$.

次に初期に非一様なエントロピーを与えた場合の密度スペクトルのスケーリングについて考える。シート状構造の性質の考察によれば、初期に非一様なエントロピーを与えた場合の密度はパッシブスカラーのように振る舞うエントロピーに影響を受けている。そこで、パッシブスカラースペクトル $E_{cc}(k)$ のスケーリングを考える。パッシブスカラースペクトル $E_{cc}(k)$ は慣性領域において、エンストロフィー散逸 ε_Ω と波数 k 及びパッシブスカラー散逸率 ε_c のみに比例するとした次元解析により、慣性領域において以下の関係式を得る。

$$E_{cc}(k) \propto k^{-1}. \quad (22)$$

ここでパッシブスカラー散逸率 ε_c は $\varepsilon_c = \kappa |\nabla c|^2$ と定義する。したがって、密度スペクトルは慣性領域において波数の-1 乗に比例すると予想される。

$$E_{\rho\rho}(k) \propto k^{-1}. \quad (23)$$

Fig. 13 に 3 つの異なるレイノルズ数を与えた場合の密度スペクトルに k を掛けた結果を示す。レイノルズ数が大きくなるにつれて慣性領域指数が-1 に近い値をとっていることが分かる。したがって、レイノルズ数大きい極限において(23)が成立すると考えられる。

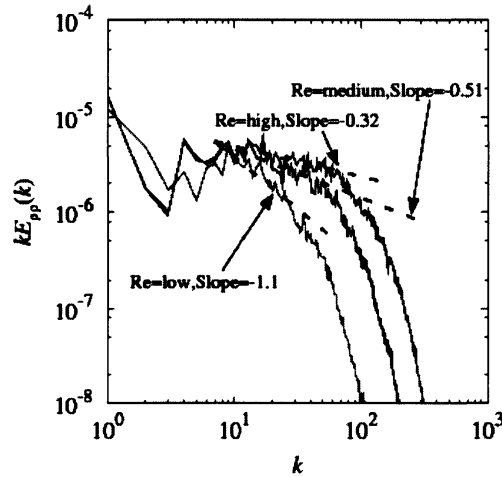


Fig.13 Density spectrum multiplied by k^3 for non-uniform case, $Re=3.1 \times 10^4$, 1.3×10^5 , 3.1×10^5 , $M_0=0.1$, $Pr=0.72$ at $\bar{t}=2.23$.

4. 結言

2次元一様等方性圧縮性減衰乱流のDNSを行い、統計的性質と密度分布の詳細な解析を行った。

エネルギースペクトルの初期の圧力と密度に対する依存性は無視出来る程度であった。一方、密度は初期のエントロピーに依存し、初期のエントロピーを非一様に与えた場合にはエントロピーの filamentation の影響を受けてシート状構造が発生することが分かった。さらに、このシート状構造の性質について調べ、 $\sqrt{k}$ が幅の決定因子であることが分かった。また振幅における決定因子は M_0^2 であることを明らかにした。また、密度スペクトルに関しては、初期のエントロピーを一様に与えた時は慣性領域において $E_{\rho\rho}(k) \propto k^{-3}$ が成立し、初期のエントロピーを非一様に与えた時に出現するモードでは $E_{\rho\rho}(k) \propto k^{-1}$ が成立することが分かった。

参考文献

- [1] Armstrog, J, W et al., Nature **291** (1981), pp.561-564.
- [2] Matthaeus, W, H. et al., Geophys. Res. **96** (1991), pp.5421-5435.
- [3] Minter, A. H. and Zank, P, G, Astrophys. J. **602** (2004), pp.29-32.
- [4] Matthaeus, H, W and Goldstein, M, L, J. Geophys. Res. **87** (1982), pp.6011-6028.
- [5] Shaikh, D and Zank, P, G, Astrophys. J. **602** (2004), pp. L29-L32.
- [6] Samtaney, R, Pullin, I, D, and Kosovic, B, Phys. Fluids **13** (2001), pp.1415-1430.
- [7] Kraichnan, H, R, Phys Fluids. **10**(1967), pp. 1417-1423
- [8] Lesieur, M. et al., Phys. Fluids **11** (1999), pp.1535-1543.