

## 乱流の相似性と普遍性

京大 理 筈 友正

非圧縮粘性流体の乱流運動は、数学的には Navier-Stokes 方程式の一見不規則な解として表現される。この運動の本質的な特徴は、粘性率  $\nu$  の特異な役割にある。もし、粘性が存在せず  $\nu = 0$  ならば、流体は一つの保存系であり、乱流は熱平衡状態にあることが可能である。しかし、小さくても  $\nu > 0$  が存在する場合には、流体は散逸的であり、乱流は熱平衡にはあり得ない。この場合、乱流は、高々、別種の平衡状態をとりうるに過ぎない。

Kolmogorov (1941) は二つのパラメーター、粘性率  $\nu$  および エネルギー散逸率  $\epsilon = -\dot{E}$ , によって決定される一つの平衡状態を提案した。ここに、 $\epsilon = \frac{1}{2} \langle |u|^2 \rangle$  は乱れのエネルギーを表す。この前提と次元解析から直ちに、エネルギー・スペクトル  $E(k)$ ,  $k$  は波数、はエネルギー保有領域の波数  $k_0$  よりはるかに大きい波数領域において、

## 2

次のような相似形をとることが示される:

$$E(k) = \epsilon^{\frac{1}{4}} \nu^{\frac{5}{4}} F(k/k_d), \quad k_d = \epsilon^{\frac{1}{4}} \nu^{\frac{3}{4}}. \quad (1)$$

ここに,  $F$ は無次元関数,  $k_d$ はエネルギー散逸領域の波数を表す。非粘性の極限  $\nu \rightarrow 0$  では, 相似形(1)は有名な慣性小領域スペクトル,

$$E(k) = C \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}, \quad C = \text{定数}, \quad (2)$$

になる。(2)はKolmogorovの普遍平衡状態を特徴づけるスペクトルである。

非圧縮粘性流体においては, エネルギー散逸率  $\epsilon$  は,

$$\epsilon = -\dot{\mathcal{E}} = 2\nu Q \quad (3)$$

のように表される。ここに,  $Q = \langle |\text{rot } u|^2 \rangle$  は, インストロフィーと呼ばれる量である。このとき, Kolmogorovの前提

$$\nu \rightarrow 0 \text{ のとき } \epsilon > 0 \quad (4)$$

は, この極限で  $Q$  の発散, すなわちインストロフィー変異,

$$\nu \rightarrow 0 \text{ のとき } Q \rightarrow \infty \quad (5)$$

を引き起こす。従って, Kolmogorovスペクトル(1)および(2)の妥当性は, 全くインストロフィー変異の存在に依存している。

インストロフィー変異(5)が二次元乱流においては起り得ないことは明らかである。なぜなら, そこではインス

トロフィー散逸率  $\eta$  が

$$\eta = -\dot{\Omega} = 2\nu\phi, \quad (6)$$

ただし,  $\phi = \langle |\text{rot rot } u|^2 \rangle$  はパリンストロフィー, のように表され, (6) から直ちに,  $\Omega$  は初期時刻において有限であれば常に有限であり, 従って,

$$\nu \rightarrow 0 \quad \text{のとき} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (7)$$

となるからである。明らかに, Kolmogorov の理論はこのようた乱流には適用できない。

Batchelor (1969), Kraichnan (1967) および Leach (1968) は, 二次元乱流に対して, 三次元乱流の場合の  $\epsilon$  と  $\nu$  の代りに  $\eta$  と  $\nu$  によって決定される別種の平衡状態を考えた。この前提と次元解析の結果, 次のようた相似形が得られる:  $k \approx k_d$  のとき,

$$E(k) = \eta^{\frac{1}{6}} \nu^{\frac{3}{2}} F(k/k_d), \quad k_d = \eta^{\frac{1}{6}} \nu^{-\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

ただし,  $k_d$  はここではインストロフィー散逸の波数を表す。非粘性の極限  $\nu \rightarrow 0$  では, 相似形(8)は, 領域  $k_0 \ll k \ll k_d$  において二次元の慣性小領域スペクトル

$$E(k) = C' \eta^{\frac{2}{3}} k^{-3}, \quad C' = \text{定数} \quad (9)$$

を与える。

上に述べたような平衡状態の提案が現実のものとして受

入れられるためには、それらが Navier-Stokes 方程式と両立しうることが検証されなければならぬ。乱流の統計的記述は、原理的には Hopf の特性汎関数方程式によってなされるが、実際には無数のモーメントを関係づける方程式系を用いて行われる。この場合、方程式系の不完結性のために、何らかの完結仮説が必要となるが、そのような仮説の一つである 変形 0-4 次 キュムラント近似 は、用いた近似にはよりよい厳密なエネルギー・スペクトルの相似則を与えることが知られている。

三次元乱流に対しては、この近似はエネルギー・スペクトルに対して、エネルギー保存領域  $k \approx k_0$  では 非粘性相似則 を、そしてエネルギー散逸領域  $k \approx k_d$  では Kolmogorov 相似則 を与え、しかも、これらの結果はいずれも厳密であることが示される。それ故、Kolmogorov 相似則 (1) とその前提 (4) は、乱流を支配する数学的方程式からの厳密な結果であることが分る。有限の  $\varepsilon$  と  $\Omega$  の初期値から出発した  $\varepsilon$  の時間的変化の数値計算の結果から、エンストロフィー変異 が有限の臨界時刻  $t = t_c$  において起ることを、そして、非粘性の極限において、エネルギー散逸  $\varepsilon$  は、 $t < t_c$  の期間では 0 であり、 $t > t_c$  の期間では 0 でないことが分る。

二次元乱流に対しては、同じ近似を適用することによって、エネルギー保有領域  $k \approx k_0$  では 非粘性相似則 が、そしてエントロピー散逸領域  $k \approx k_d$  では Batchelor の相似則 (8) が成立し、そしてこれらの相似則もまた厳密な結果であることが示される。非粘性の極限ではエネルギー  $\varepsilon$  は保存されるが、エントロピー  $Q$  は、臨界時刻以前  $t < t_c$  では保存され、それ以後の期間  $t > t_c$  では減衰する。この最後の結果は、Batchelor その他によって採用された前提の正しさを裏書きしている。三次元乱流の場合とは違って、二次元乱流に対する臨界時刻  $t_c$  は、粘性  $\nu$  が減少すると共に、

$$t_c \propto [\log(1/\nu)]^{1/2} \quad (10)$$

に従って限りなく増加する。それ故、パリンストロフィー変異

$$\nu \rightarrow 0 \text{ のとき } \omega \rightarrow \infty \quad (11)$$

は、二次元乱流に対しては、無限時間のうち、 $t > t_c \rightarrow \infty$  にはじめて起ることになる。