

物体後流におけるリズムとパターンの発生

同志社大学・理工学部 水島 二郎 (Jiro Mizushima)

Department of Mechanical Engineering, Doshisha University

1. はじめに

1 本の円柱あるいは角柱を過ぎる流れでは、物体後方にカルマン渦列が生じることが知られている。カルマン渦列のように物体後方から交互に渦が剥がれ出るのは、おそらく流れの不安定性によるものだろうということは多くの研究者によって予想されていたが (Kovaszny[1])、後流を 2 次元平行流で近似して、オア・ゾンマーフェルト方程式を解くことにより、実際に後流が不安定になることを示したのは McKoen[2] である。Taneda[3] は、オア・ゾンマーフェルト方程式から円柱における 2 次元後流の臨界レイノルズ数 $Re_c \sim 3.2$ を求めた。しかし、Taneda の結果と Jackson[4] が数値的に求めたような流れ場全体が不安定となる臨界レイノルズ数 $Re_c \sim 46$ との間には大きな相違が存在した。

この相違の原因の 1 つは流れの非平行性にあり、円柱や角柱の後流は比較的小さいレイノルズ数で不安定性が発生するため、流れ場は非平行流である。しかし、非平行流を解析的に扱うのは困難なので、これまでの物体後流の安定性に関する多くの研究では、流れ方向の各位置における流れに垂直な方向の速度分布をもつ平行流とみなして安定性を調べる方法が用いられてきた。また、この局所的な安定性を調べる時、その安定性は局所安定性と呼ばれ、さらに局所安定性は絶対不安定性と対流不安定性に分類することができる [5]。この対流・絶対不安定性の概念はオア・ゾンマーフェルト方程式の結果と流れの全体安定性解析から求めた臨界レイノルズ数の相違を解決するだけでなく、不安定性に新しい考え方を導入したという意味で重要ではあるが、非平行流には適用不可能な概念である。非平行流に対してはこの概念を拡張してアクティブ不安定性とパッシブ不安定性という概念を導入する必要があることを Takemoto and Mizushima[6] は明らかにした。この報告では、最初にこの概念を紹介する。

円柱後方に形成されるカルマン渦列は下流へ流されるが、円柱直径の 100 倍程度下流へ行くとカルマン渦列は消滅し、さらに下流で再びカルマン渦列が再生成されるということを Taneda[7] は円柱の曳航実験により発見した。この現象はカルマン渦列の消滅と再配列 (再生成) と呼ばれ、これまでに多くの研究が行われてきた [9, 10, 11, 12]。このカルマン渦列の消滅する機構と再生成する機構を実験・線形安定性解析によって明らかにしたのが、Mizushima *et al.*[13] である。この実験と安定性解析の結果をこの報告の 2 番目の話題として紹介する。

2 本の円柱や角柱が一樣流中に垂直に並べて置かれた場合には、レイノルズ数が小さいときは流れは対称な定常流であるが、レイノルズ数が大きくなると振動流へと遷移する。振動流の流れパターンは 1 本の円柱や角柱ではみられないような逆位相振動流あるいは同位相振動流になる。このような 2 本の円柱後流が同期して振動流が現れる機構を明らかにするため Akinaga and Mizushima[14] は対称定常流の線形安定性解析を行い、対称定常流の線形不安定性によって同期振動流が現れることを明らかにした。すなわち、2 円柱の間隔が円柱直径の 2.34 倍よりも小さいとき、流れは反対称攪乱モードに対して不安定となり、流れは逆位相振動流へと遷移し、それよりも大きいと対称攪乱モードに対して不安定となり、流れが同位相振動流へと遷移することを明らかにした。また、Mizushima and Ino[15] は数値シミュレーションと線形安定性解析により、2 円柱を過ぎる流れ場中で逆位相振動流と同位相振動流が現れるメカニズムを明らかにし、分岐解析により定常偏流がピッチフォーク分岐により現れることを見いだした。対称定常流は 2 円柱間中央を通る流れ

方向軸について対称性をもつため、定常偏流は偏流方向が異なる2つの安定な状態が存在し、レイノルズ数が大きくなると2つの偏流状態を交互にとる交替流となり、この現象は Kang[16] が求めた偏流方向が交互に入れ替わる流れパターンであることを示した。

2本の柱状物体を過ぎる流れにおいては2円柱間の間隔がある値を境に最も不安定となる攪乱モードが反対称攪乱モードから対称攪乱モードに入れ替わり、その境目となる円柱間間隔では2つのモードが非線形相互作用を行って複雑な流れ場を形成している。これは2つのウェイクの非線形相互作用であると考えられ、主に数値シミュレーションにより調べられてきたが、決定的な結論は得られていない。この問題に Watson[17] の振幅展開法と Herbert[18] の振幅定義法を用いて弱非線形安定性解析を行うことにより、対称・反対称攪乱の連立振幅方程式を導くことにより調べたのが、Mizushima and Hatsuda[19] である。この研究の結果、2つの攪乱の非線形相互作用により形成される流れ場は初期条件によって異なり、いくつかの安定な状態があることが分かり、これまでの数値シミュレーション結果のように、パラメータによって単純に分類することは不適切であることが明らかとなった。この結果を最後に紹介する。

2. カルマン渦列の発生と振動源

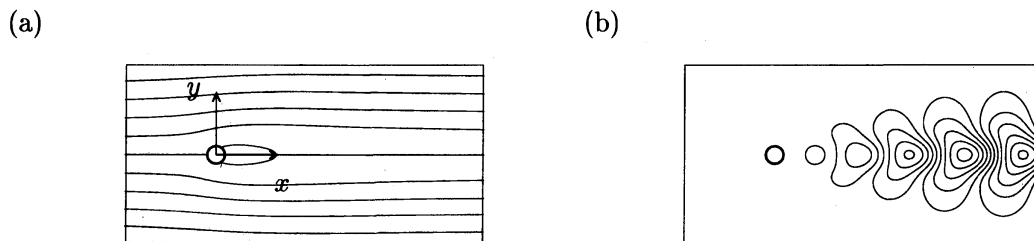


図 1: 流れ場。 $Re_d = 50$. (a) 対称定常流 (主流). (b) 攪乱 (線形固有関数の実部), $t = 83$. [Takemoto and Mizushima[6]] より引用.

1本の円柱を過ぎる流れでは、円柱の直径を代表長さにとったレイノルズ数 Re_d を用いると、レイノルズ数が小さいとき、流れ場は円柱の中心を通り流れに平行な中心線に対して対称である。この対称定常流 ($\bar{\psi}, \bar{\omega}$) は、これから安定性解析を行う上での主流であり、レイノルズ数に依らず基礎方程式の渦度輸送方程式とポアソン方程式の定常解である。図 1(a) は $Re_d = 50$ のときの対称定常流の例であり、攪乱に対して全体不安定である。この図では、円柱の中心を原点として流れの方向に x 軸をとり、流れに直交する方向に y 軸をとっており、座標は円柱直径 d で無次元化している。図 1(a) に代表されるような対称定常流のある位置 $(x, y) = (30, 0)$ に短時間の衝撃力を与え、その衝撃力によって生じた攪乱 ($\hat{\psi}, \hat{\omega}$) の空間的・時間的发展を観察することにより、対称定常解の線形安定性を調べる。円柱後方の位置 $(x, y) = (30, 0)$ に与えられた攪乱は、瞬時に円柱の後方の領域全体に伝わり、レイノルズ数が全体不安定となる臨界レイノルズ数 Re_g より大きいと、やがて成長して図 1(b) のようなパターンをもつ攪乱に発展する。これは Jackson[4] が行った全体安定性解析と同じ解析を数値的に行っているに他ならず、このような計算でも臨界レイノルズ数を評価することが可能であり、その値は $Re_g = 48.1$ となり、Jackson の結果とよく一致する。

攪乱が加えられてから平衡状態に達するまでの伝播と成長を詳しく観察するために、攪乱 $\hat{\psi}(x, y, t)$ の x 軸上における空間分布のみに注目する、レイノルズ数 $Re_d = 35 (< Re_g)$ のときの攪乱の伝播と成長を詳しく見ると、図 2(a) のようになる。亜臨界レイノルズ数である $Re_d = 35$ では、攪乱の波束は下流へ流れ去り、 x 軸上のどの位置で観察してもその振幅が減衰している。しかし、波束の

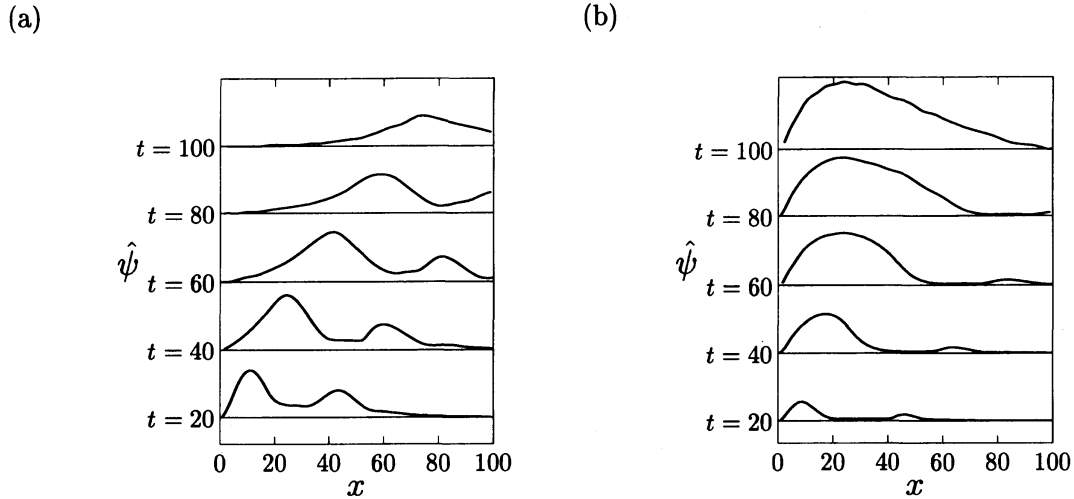


図 2: パルス型攪乱の過渡的变化 (x 軸上での攪乱 $\hat{\psi}$ の包絡線). (a) $Re_d = 35$. (b) $Re_d = 50$. [Takemoto and Mizushima[6]] より引用.

伝播する速さと同じ速さで動く系から観察するとき攪乱の大きさは成長している. 一方, 図 2(b) の $Re_d = 50$ では, 波束は $t \leq 60$ までの間は下流へ移流するが, それ以降は円柱後方の $x = 25$ 近傍に波束のピークが留まっている.

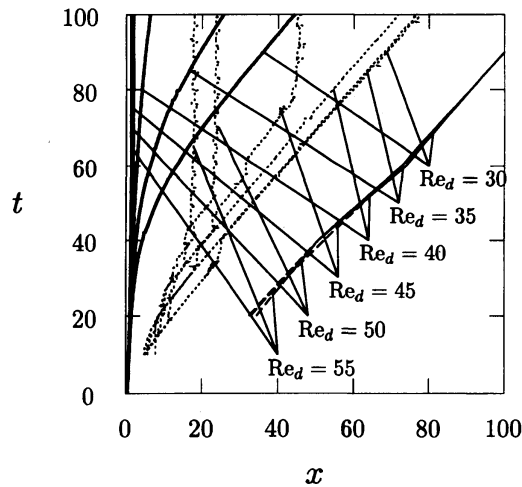


図 3: 波束攪乱の軌跡. 波線: 先端 (front). 点線: 頂点 (peak). 太い実線: 後端 (tail). [Takemoto and Mizushima[6]] より引用.

全体不安定性が発生する臨界値よりも小さなレイノルズ数では, 流れ場はそれぞれの位置で振幅を測定すれば, 時間的に減衰し, その意味で安定である. レイノルズ数が臨界値よりも大きくなると流れ場全体が不安定になるが, 全体不安定性が生じたときにその振動を維持するメカニズムは不明である. このメカニズムを明らかにするため, 波束攪乱の時間発展を詳細に観察する. 時刻 t における波束の前縁・ピーク・後端の位置をそれぞれ $x_f(t)$, $x_p(t)$, $x_t(t)$ とし, 波束の広がりの特徴づける. これらの位置を時間の関数として, x - t 平面に描くと図 3 のようになる. 破線が波束の前縁 $x_f(t)$, 点線がピーク $x_p(t)$, 太線が後端 $x_t(t)$ を表している. この図から分かることは,

前縁 $x_f(t)$ の進行速度は全てのレイノルズ数で一定であり、レイノルズ数に依らず下流へ移流していくことである。波束のピーク $x_p(t)$ と後端 $x_t(t)$ は、レイノルズ数 Re_d が臨界値 Re_g に近づくとつれて、進行速度が小さくなり、共に $x = 0$ すなわち、円柱の後端に近づいていく。したがって、超臨界状態 $Re_d > Re_g$ では、後端では攪乱を与えた後も円柱後方に攪乱は留まり、移流しないことになる。

波束の前縁・ピーク・後端の振る舞いを調べるために、 x_f 、 x_p および x_t の伝播速度がほぼ一定となる $80 < t < 100$ の区間でそれぞれの伝播速度を評価し、グラフに描くと、図4のようになる。この図からも、波束の前縁の位置 x_f は基本流の速さとほぼ同じ (約 0.9 倍) であることが観察できる。すなわち、波束の前縁はレイノルズ数に依らず速度一定で移流する。ピーク x_p の伝播速度は Re_g に近づくと次第に 0 に近づいていく。一方、波束の後端位置 x_t は臨界レイノルズ数 Re_g で突然 0 となる。この結果は、流れの振動維持メカニズムを説明する上で最も重要な結果である。なぜなら、流れの中での振動が維持される機構は、波束の後端の伝播速度が 0 となるのが最も重要であり、波束はレイノルズ数に依らず常に下流へ移流しているが、その後端は移流効果による減衰よりも線形増幅による振幅の成長が卓越することにより、円柱の後端に常に存在し、そのことが流れの振動源となっているからである。これが結論であり、このように、後端の伝播速度が 0 となるのが全体不安定性を誘起し、振動を持続的に生じる物理的機構である。Takemoto and Mizushima はこれをアクティブ不安定性と名付け、増幅攪乱が下流に流れ去ってしまう一時的な不安定性をパッシブ不安定性と呼んだ。これらがそれぞれ Huerre[5] が主張した絶対不安定性と対流不安定性に置き換えられるべきものである。

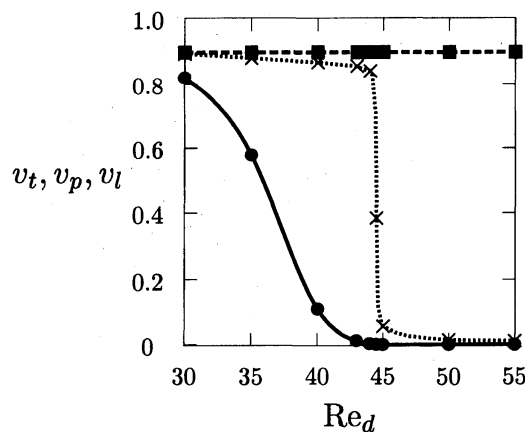


図 4: 波束攪乱の後端 (tail), 頂点 (peak), 先端 (front) の進行速度. 波線: v_l , 先端 (front). 点線: v_p , 頂点 (peak). 太い実線: v_t , 後端 (tail).

3. カルマン渦列の消滅と再生成

柱状物体後流に発生するカルマン渦列は下流へ流されるとやがて消滅して一様流に近い剪断流となった後、さらに下流で再びカルマン渦列が形成される [7]. 円柱を過ぎる流れの場合にはカルマン渦列の消滅と再生成はそれぞれ円柱直径の 50 倍から 100 倍下流で生じるが、角柱の場合にはもっと短い距離で生じることが最近になって明らかとなった [8]. 角柱の流れ方向の長さを幅で割った値であるアスペクト比 A が 0.2 のときは、カルマン渦列の消滅が比較的上流で生じるので、ここでは $A = 0.2$ の角柱を過ぎる流れの解析を行い、第 1 渦列の消滅と第 2 渦列の生成について説明する。

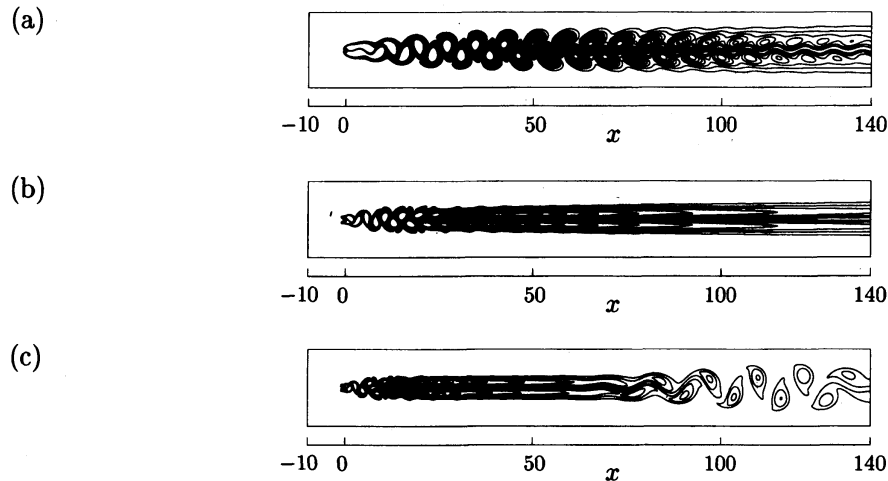


図 5: 流れ場 (等渦度線). $A = 0.2$. (a) 振動流. $Re = 40$. (b) 第 1 渦列の消滅. $Re = 80$. (c) 第 2 渦列の発生. $Re = 100$. [Mizushima *et al.*[13]] より引用.

3つの異なるレイノルズ数 $Re = 40, 80, 100$ について 1 本の角柱を過ぎる流れの数値シミュレーションを行った結果を図 5 に示す. 図 5(a) は $Re = 40$ のときの流れ場であり, 流れは対称性を失い, 角柱後方で振動が生じており, カルマン渦列は $x \sim 100$ の後流において確認できる. $Re = 80$ (図 5(b)) では, 後流 $x \sim 30$ でカルマン渦列はほぼ消滅しており (第 1 渦列の消滅), 単純なせん断層へと変化している. さらにレイノルズ数が大きくなり, $Re = 100$ (図 5(c)) になると, カルマン渦列の消滅していた領域の下流側でカルマン渦列が生成される (第 2 渦列の生成).

数値シミュレーションおよび線形安定性解析において, 第 1 渦列と第 2 渦列が観測される領域を図示すると, 図 6 のようになる. 第 1 渦列が生じるのは臨界レイノルズ数 $Re_c \sim 35$ より大きなレイノルズ数であり, レイノルズ数が大きくなると観測される領域の下流端が上流側へ移動しその長さが短くなる. 第 2 渦列は $Re_c \sim 90$ 程度から現れ, その上流端はレイノルズ数が大きくなるにつれて上流へ移動する.

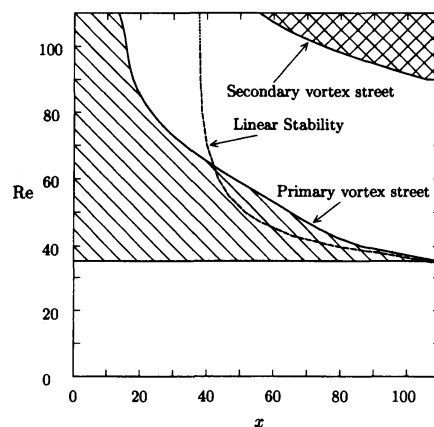


図 6: 第 1 渦列と第 2 渦列の観測可能領域. $A = 0.2$. [Mizushima *et al.*[13]] より引用.

次に第 1 渦列の消滅と第 2 渦列の生成が生じる理由を調べるため対称定常流の線形安定性解析を行う. 線形攪乱方程式を固有値問題として解くことにより得られた固有値 λ の実部 λ_r は線形増

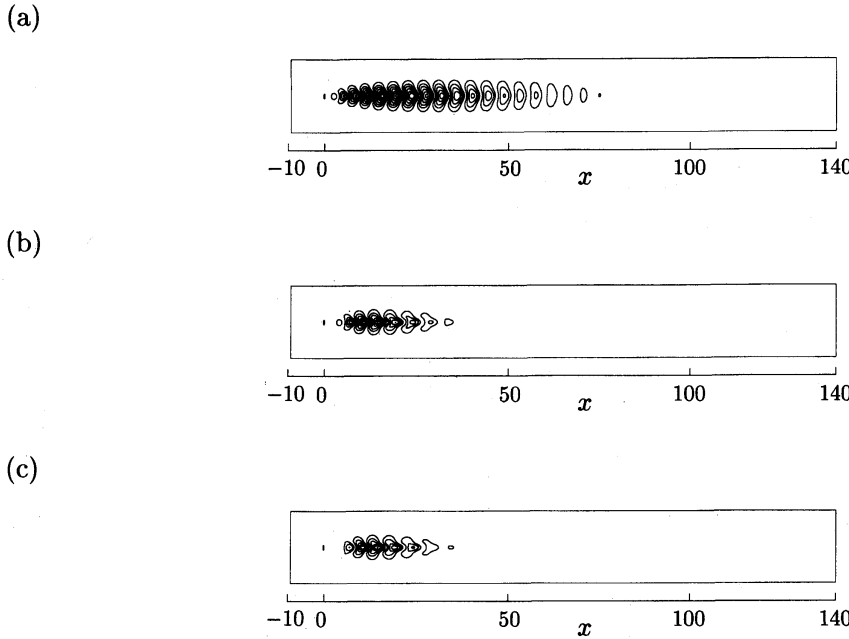


図 7: 攪乱 (等渦度線). $A = 0.2$. (a) $Re = 40$. (b) $Re = 80$. (c) $Re = 100$. [Mizushima *et al.*[13] より引用.]

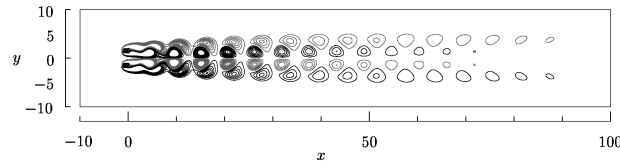
幅率であり、虚部 λ_i は振動数を表す。また、 $\lambda_r > 0$ ならば対称定常流は不安定、 $\lambda_r < 0$ ならば安定、 $\lambda_r = 0$ となるレイノルズ数が臨界レイノルズ数である。

固有値問題の数値計算により得られた攪乱の固有関数 $\hat{\psi}$ の実部 $\hat{\psi}_r$ は図 7 のようになる。図 7(a) は $Re = 40$ における攪乱の流れ場であり、攪乱は角柱後方から $x \sim 75$ の位置まで存在している。ところが、図 7(b) の $Re = 80$ では、攪乱は角柱後方から $x \sim 36$ の間に見られ、存在範囲が短くなる。図 7(c) は $Re = 100$ の場合の結果である。このレイノルズ数で数値シミュレーションにおいては第 2 渦列が形成しているに関わらず、この図では第 1 渦列の存在範囲でのみ攪乱が見られ、第 2 渦列に対応する領域では攪乱は存在しない。レイノルズ数が大きくなると渦列の存在範囲は短くなるが、攪乱の存在範囲も短くなり、攪乱の存在範囲と第 1 渦列の存在範囲が一致するため、第 1 渦列の消滅は攪乱の非線形相互作用に依らずとも、既に線形不安定の段階で生じていることがわかる。また、数値シミュレーションにより得られた第 2 渦列の関数形を初期条件として、第 2 固有モードを計算しても収束解が得られないことにより、第 2 渦列は対称定常解の第 2 固有モードの増幅によって引き起こされるのではないと結論づけられる。

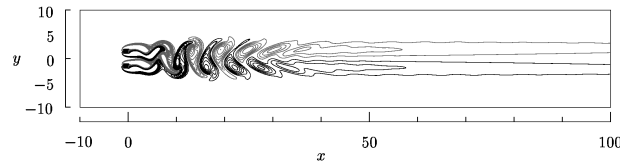
4. 2 角柱後流の非線形相互作用

一様流中に流れの方向と垂直に距離 s を隔てて 2 本の正方形角柱を置くと、2 本の角柱を過ぎる流れは間隔 s の大きさによって影響を受け、流れのパターンが異なる。ここでは角柱辺長 d で無次元化した間隔比 $\Gamma = s/d$ を定義し、 Γ の値による性質の変化を調べる。レイノルズ数が小さいときは、 Γ に依らず対称な定常流である。レイノルズ数が大きくなると対称定常流は不安定となって振動流が発生する。このとき、2 角柱の中点を通り流れと平行な面について対称な攪乱に対して不安定となる場合と反対称な攪乱に対して不安定となる場合がある。線形安定性解析の結

(a)



(b)



(c)

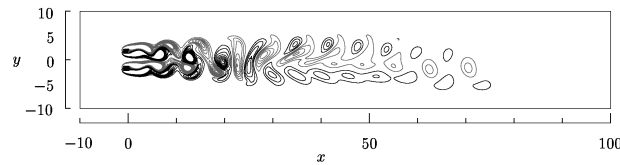


図 8: 流れ場 (渦度の等高線), $Re = 60$. (a) $\Gamma = 2.0$, 初期条件が対称流の場合. (b) $\Gamma = 2.0$, 初期条件が非対称流の場合. (c) $\Gamma = 2.5$, 初期条件にかかわらず流れは一意的. [Mizushima and Hatsuda[19]] より引用.

果, Γ が小さいときは反対称攪乱が最も増幅しやすく, Γ が大きいときは対称攪乱が最も増幅する. その閾値は $\Gamma_c = 2.25$ である.

実際に, 適当な初期条件をとって数値シミュレーションを行い, $Re = 60$ のレイノルズ数で発生する流れパターンを調べると, $\Gamma = 2.0$ の場合には図 8(a) のように, 初期条件によって対称な流れ場になったり, 同じレイノルズ数 $Re = 60$ においても図 8(b) のように非対称な流れ場になることが確認できる. また, $\Gamma = 2.5$ の場合には図 8(c) のように, 初期条件によらず非対称な流れ場となる.

対称モードと反対称モードの 2 つのモードの攪乱が同時に成長する場合についてそれらのモードの非線形相互作用について考える. そのために, ここでは Watson[17] の振幅展開法を用いて対称攪乱と反対称攪乱の振幅 A_s と A_a に対する連立振幅方程式を導く. Watson の振幅展開法では, Stuart[20] の増幅率展開法とは異なり, 臨界点からの展開ではなく, 調べようとするレイノルズ数における線形攪乱の固有関数とその振幅を用いて非線形解を展開する. この結果得られる連立ランダウ方程式は

$$\begin{aligned}\frac{dA_s}{dt} &= \lambda_{s00}A_s + \lambda_{s10}|A_s|^2A_s + \lambda_{s01}|A_a|^2A_s, \\ \frac{dA_a}{dt} &= \lambda_{a00}A_a + \lambda_{a10}|A_a|^2A_a + \lambda_{a01}|A_s|^2A_a\end{aligned}\quad (1)$$

と表せる. この方程式の係数を求めることによって, 非線形対称攪乱の平衡振幅 A_s および非線形反対称攪乱の平衡振幅 A_a を求めることができる.

振幅方程式 (1) の係数を数値計算により求め, その解を調べると, 解は自明解 $(\bar{A}_s, \bar{A}_a) = (0, 0)$, 対称シングルモード解, 反対称シングルモード解と混合モード解の 4 つに分類され, それぞれの解を求めることができる. それらの 4 つの解の安定性を調べることにより, 2 つのモードの非線

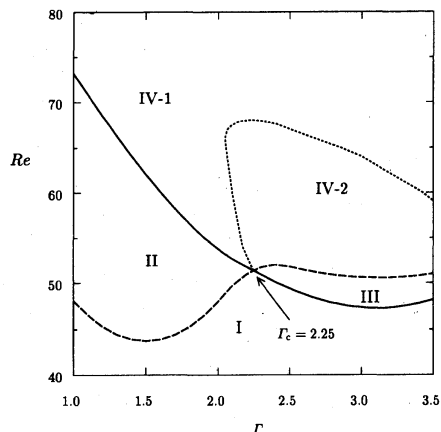


図 9: 平衡状態の分類. 実線: 対称モード線形中立レイノルズ数. 波線: 反対称モード線形中立レイノルズ数. I: 対称定常流. II: 反対称シングルモード解. III: 対称シングルモード解. IV-1: 対称シングルモード解あるいは反対称シングルモード解. IV-2: 混合モード解. [Mizushima and Hatsuda[19] より引用.]

形相互作用の結果生じる流れ場が分かる. このようにして, それぞれの間隔比 Γ とレイノルズ数について生じる流れ場を予測し, それらを図示すると, 図 9 のようになる.

この研究結果で最も大切な結論は, 従来の数値シミュレーションによる流れ場の分類では暗黙のうちに, 出現する流れ場は初期条件によらず一意に決まると仮定されていたが, 弱非線形安定性から得られる振幅方程式の解を詳細に検討すると, 出現する流れは初期条件により異なり, 一意的には決まらないということである. また, 混合モード解が生じるときは流れの平衡状態は一意的に決まるが, 対称シングルモード解が出現するときは反対称シングルモード解も出現する可能性もあり, その反対のケースも起こりうるという結論である.

5. おわりに

現在では, マイクロコンピュータの演算速度が速くなり, メモリも大きな容量のものが使用可能となって, 容易に複雑な流れの数値シミュレーションを行うことが可能となった. これにより, これまで流れの計測実験では計測が困難であった物理量を評価することが可能である. しかし, 流れ場を数値シミュレーションで再現することと流れの現象を支配している物理的な機構を知ることとは別の問題であり, 流れが不安定となる現象や乱流が維持される機構についてはまだまだ不明な点が多い. 今後の研究が期待される.

謝辞

この報告を執筆するに際し, 首都大学東京の浅井雅人教授と稲澤歩准教授および元同志社大学大学院生の武本幸生氏と初田元太氏から助言と協力を得たことを記し, 感謝の意を表する.

参考文献

- [1] KOVASZNAY, L. S. G. 1949 Hot wire investigation of the wake behind cylinders at low Reynolds numbers. *Proc. R. Soc. Lond.* **198**, 174-190.

- [2] MCKOEN, C. H. 1956 On the stability of laminar wake. *Aero. Res. Council Current Papers*. **303**, 1-19.
- [3] TANEDA, S. 1963 The stability of two-dimensional laminar wakes at low Reynolds numbers. *J. Phys. Soc. Japan* **18**, 288-296.
- [4] JACKSON, C. P. 1987 A finite-element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies. *J. Fluid Mech.* **182**, 23-45.
- [5] HUERRE, P., MONKEWITZ, P. A. 1990 Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 473-537.
- [6] TAKEMOTO, Y., MIZUSHIMA, J. 2010 Mechanism of sustained oscillations in a fluid flowing past a circular cylinder obstacle. *Phys. Rev. E*. **82**, 056316.
- [7] TANEDA, S. 1959 Downstream development of wakes behind cylinders. *J. Phys. Soc. Japan* **14**, 843-848.
- [8] 2013 INASAWA, A., ASAI, M., NAKANO, T., *Compt. Fluids* **82** (2013) 148. Sound generation in the flow behind a rectangular cylinder of various aspect ratios at low Mach numbers. *Compt. Fluids* **82**, 148-157.
- [9] OKUDE, M. 1981 Rearrangement of Karman's vortex street. *Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci* **24**, 95-105.
- [10] OKUDE, M., MATSUI, T. 1990 Vorticity distribution of vortex street in the wake of a circular cylinder. *Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci* **33**, 1-13.
- [11] DURGIN, W. W., KARLSSON, S. K. F. 1971 On the phenomenon of vortex street breakdown. *J. Fluid Mech.* **48**, 507-527.
- [12] SATO, H., KURIKI, K. 1961 The mechanism of transition in the wake of a thin flat plate placed parallel to a uniform flow. *J. Fluid Mech.* **11**, 321-352.
- [13] MIZUSHIMA, J., HATSUDA, G., AKAMINE, H., INASAWA, A., ASAI, M. 2014 Rapid annihilation of the Kármán vortex street behind a rectangular cylinder. *J. Phys. Soc. Japan* **83**, 014402.
- [14] AKINAGA, T., MIZUSHIMA, J. 2005 Linear stability of flow past two circular cylinders in a side-by-side arrangement. *J. Phys. Soc. Japan* **74**, 1366-1369.
- [15] MIZUSHIMA, J., INO, Y. 2008 Stability of flows past a pair of circular cylinders in a side-by-side arrangement. *J. Fluid Mech.* **595**, 491-507.
- [16] KANG, S. 2001 Characteristics of flow over two circular cylinders in a side-by-side arrangement at low Reynolds numbers. *Phys. Fluids* **15**, 2486-2498.
- [17] WATSON, J. 1960 On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, II. the development of a solution for plane Poiseuille flow and for plane Couette flow. *J. Fluid. Mech.* **9**, 371-389.

- [18] HERBERT, T. 1983 On perturbation methods in nonlinear stability theory. *J. Fluid. Mech.* **126**, 168-186.
- [19] MIZUSHIMA, J., HATSUDA, G. 2014 Nonlinear interaction between the two wakes behind a pair of square cylinders. *J. Fluid. Mech.* in print.
- [20] STUART, J. T. 1960 On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, I. The basic behaviour in plane Poiseuille flow. *J. Fluid. Mech.* **9**, 353-370.