

# STRONG CONVERGENCE THEOREM TO COMMON FIXED POINTS OF NONEXPANSIVE SEMIGROUPS $\{T(t) : t \geq 0\}$ IN HILBERT SPACES

新潟大学大学院自然科学研究科 鈴木智成 (TOMONARI SUZUKI)

ABSTRACT. In this paper, we prove the following strong convergence theorem: Let  $C$  be a closed convex subset of a Hilbert space  $H$ . Let  $\{T(t) : t \geq 0\}$  be a strongly continuous semigroup of nonexpansive mappings on  $C$  such that  $F(T) = \bigcap_{t \geq 0} F(T(t)) \neq \emptyset$ . Let  $\{\alpha_n\}$  and  $\{t_n\}$  be sequences of real numbers satisfying  $0 < \alpha_n < 1$ ,  $t_n > 0$ ,  $t_n \rightarrow 0$  and  $\alpha_n/t_n \rightarrow 0$ . Let  $z \in C$  and let  $\{u_n\}$  be a sequence of  $C$  defined by  $u_n = (1 - \alpha_n)T(t_n)u_n + \alpha_n z$ . Then  $\{u_n\}$  converges strongly to the element of  $F(T)$  nearest to  $z$  in  $F(T)$ .

## 1. 序

$C$  を Hilbert 空間  $H$  の閉凸集合とする.  $C$  上の写像  $T$  が非拡大であるとは,  $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$  ( $x, y \in C$ ) を満たすことである. 1967 年に F. E. Browder は次の定理を証明している. この定理は非拡大写像の不動点への強収束定理で, 非常にシンプルな定理である.

**定理 1** (Browder [1]).  $C$  を Hilbert 空間  $H$  の閉凸部分集合とし,  $T$  を  $C$  上の非拡大写像で不動点集合  $F(T)$  は空でないとする.  $P$  を  $F(T)$  の上への距離射影とする.  $\{\alpha_n\}$  を  $0 < \alpha_n < 1$  および  $\alpha_n \rightarrow 0$  を満たす実数列とする.  $z$  を  $C$  の任意の元とし,  $\{u_n\}$  を  $u_n = (1 - \alpha_n)Tu_n + \alpha_n z$  によって一意に定義される  $C$  の点列とする. このとき,  $\{u_n\}$  は  $Pz$  に強収束する.

N. Shioji と W. Takahashi は定理 1 に関連した定理 (定理 2) を証明している. 定理 2 を記述する前に, 定理 2 で使われている記号および概念について述べる.

$S$  を半群とする.  $S$  上の実数値有界関数全体からなる Banach 空間を  $B(S)$  と表し, 通常の上限ノルムを入れる. 恒等的に 1 の値をとる  $S$  上の関数を特に混乱のない限り, 1 で表す.  $s \in S$  および  $f \in B(S)$  に対して,  $B(S)$  上の写像  $\ell_s$  を  $(\ell_s f)(t) = f(st)$  ( $t \in S$ ) と定義する.  $X$  は  $B(S)$  の線形部分空間で  $1 \in X$  とする.  $\mu \in X^*$  が  $X$  上の mean であるとは,  $\|\mu\| = \mu(1) = 1$  が成り立つことである. 本論文では,  $\mu \in X^*$  および  $f \in B(S)$  に対して,  $\mu(f)$  を  $\mu_t(f(t))$  と書くことがある.

$C$  を Hilbert 空間  $H$  の閉凸部分集合とし,  $S$  を半群とする. 写像族  $\{T_t : t \in S\}$  が  $C$  上の非拡大半群とは, すべての  $t, s \in S$  に対して,  $T_t$  は  $C$  上の非拡大写像で,  $T_{ts} = T_t \circ T_s$  が成り立つことである.  $\{T_t\}$  を,  $\{T_t x : t \in S\}$  が有界になる  $x \in C$  が存在する  $C$  上の非拡大半群とする.  $X$  を  $B(S)$  の線形部分空間で, 1 を含み, すべての  $x \in C$  と

$y \in H$  に対して関数  $t \mapsto \|T_t x - y\|^2$  は  $X$  の元とする. このとき,  $X$  上の mean  $\mu$  および  $x \in C$  に対して,  $T_\mu x$  を, すべての  $y \in H$  に対して  $\langle T_\mu x, y \rangle = \mu_t \langle T_t x, y \rangle$  を満たす唯一の  $C$  の元として定義する ([3] を参照).  $T_\mu$  は  $C$  上の非拡大写像になっていることに注意する.

さて, 定理 2 を記述する. この定理の適用範囲は広く, また mean を使っているという特徴がある.

**定理 2** (Shioji and Takahashi [2]). 次の事柄を仮定する:  $C$  は Hilbert 空間  $H$  の閉凸部分集合である;  $S$  は半群である;  $\{T_t : t \in S\}$  は  $C$  上の非拡大半群で共通不動点集合  $F(S) = \bigcap_{t \in S} F(T_t)$  は空でない;  $X$  は  $B(S)$  の線形部分空間で, 1 を含み, すべての  $s \in S$  に対して  $\ell_s(X) \subset X$  が成り立ち, すべての  $x \in C$  と  $y \in H$  に対して関数  $t \mapsto \|T_t x - y\|^2$  は  $X$  に属する;  $\{\mu_n\}$  はすべての  $s \in S$  に対して  $\|\mu_n - \ell_s^* \mu_n\| \rightarrow 0$  を満たす  $X$  上の mean の列である;  $P$  は  $F(S)$  の上への距離射影である.  $\{\alpha_n\}$  を  $0 < \alpha_n < 1$  および  $\alpha_n \rightarrow 0$  を満たす実数列とする.  $z$  を  $C$  の任意の元とし,  $\{u_n\}$  を  $u_n = (1 - \alpha_n)T_{\mu_n} u_n + \alpha_n z$  によって一意に定義される  $C$  の点列とする. このとき,  $\{u_n\}$  は  $Pz$  に強収束する.

本論文では, 定理 1 および定理 2 に関連して, 非線形写像からなる 1 パラメータ強連続半群  $\{T_t : t \geq 0\}$  に関する強収束定理について証明する.

## 2. 結果

$C$  を Hilbert 空間  $H$  の閉凸部分集合とする. 写像族  $\{T(t) : t \geq 0\}$  が  $C$  上の非拡大写像からなる強連続半群とは, 以下の 4 条件を満たすことである:

- (i)  $T(0)x = x$  がすべての  $x \in C$  に対して成立する;
- (ii)  $\|T(t)x - T(t)y\| \leq \|x - y\|$  がすべての  $x, y \in C$  とすべての  $t \geq 0$  に対して成立する;
- (iii)  $T(t+s) = T(t) \circ T(s)$  がすべての  $t, s \geq 0$  に対して成立する;
- (iv) 写像  $t \mapsto T(t)x$  がすべての  $x \in C$  に対して連続である.

次の定理が本論文の主結果である.

**定理 3.**  $C$  を Hilbert 空間  $H$  の閉凸部分集合とする.  $\{T(t) : t \geq 0\}$  を  $C$  上の非拡大写像からなる強連続半群で共通不動点集合  $F(T) = \bigcap_{t \geq 0} F(T(t))$  は空でないとする.  $P$  を  $F(T)$  の上への距離射影とする.  $\{\alpha_n\}$  および  $\{t_n\}$  を  $0 < \alpha_n < 1$ ,  $t_n > 0$ ,  $t_n \rightarrow 0$  および  $\alpha_n/t_n \rightarrow 0$  を満たす実数列とする.  $z$  を  $C$  の任意の元とし,  $\{u_n\}$  を  $u_n = (1 - \alpha_n)T(t_n)u_n + \alpha_n z$  によって一意に定義される  $C$  の点列とする. このとき,  $\{u_n\}$  は  $Pz$  に強収束する.

*Proof.* 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して,

$$\begin{aligned} \|u_n - Pz\| &= \|(1 - \alpha_n)T(t_n)u_n + \alpha_n z - Pz\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|T(t_n)u_n - Pz\| + \alpha_n\|z - Pz\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|u_n - Pz\| + \alpha_n\|z - Pz\|, \end{aligned}$$

## STRONG CONVERGENCE THEOREM

より,  $\|u_n - Pz\| \leq \|z - Pz\|$  を得る. したがって,  $\{u_n\}$  が有界であることが分かる.  $\{u_{n_i}\}$  を  $\{u_n\}$  の任意の部分列とする.  $\{u_n\}$  の有界性より,  $C$  のある元  $x$  に弱収束する  $\{u_{n_i}\}$  の部分列  $\{u_{n_{i_j}}\}$  が存在する. 以降  $x_j = u_{n_{i_j}}$ ,  $\beta_j = \alpha_{n_{i_j}}$ ,  $s_j = t_{n_{i_j}}$  と置く. さて,  $x$  が共通不動点であることを示そう.  $t > 0$  を任意に固定すると,  $\{\alpha_n\}$  および  $\{t_n\}$  の条件式から

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} (\|x_j - T(t)x\|^2 - \|x_j - x\|^2) \leq 0$$

が示せる. この式と,

$$\|T(t)x - x\|^2 = \|x_j - T(t)x\|^2 - \|x_j - x\|^2 - 2\langle T(t)x - x, x - x_j \rangle$$

より,  $\|T(t)x - x\|^2 \leq 0$  を得る.  $t > 0$  は任意であるので,  $x \in F(T)$  が言える. 次に,  $\{x_j\}$  が  $Pz$  へ強収束することを示そう.

$$\begin{aligned} \beta_j \|x_j - Pz\|^2 + (1 - \beta_j) \langle (x_j - T(s_j)x_j) - (Pz - T(s_j)Pz), x_j - Pz \rangle \\ = \beta_j \langle z - Pz, x_j - Pz \rangle \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} \langle (x_j - T(s_j)x_j) - (Pz - T(s_j)Pz), x_j - Pz \rangle \\ \geq \|x_j - Pz\|^2 - \|T(s_j)x_j - T(s_j)Pz\| \cdot \|x_j - Pz\| \geq 0 \end{aligned}$$

より,  $\|x_j - Pz\|^2 \leq \langle z - Pz, x_j - Pz \rangle$  を得る. 距離射影の性質から  $\langle z - Pz, x - Pz \rangle \leq 0$  が言えるが, これを用いて,

$$\begin{aligned} \|x_j - Pz\|^2 &\leq \langle z - Pz, x_j - Pz \rangle \\ &= \langle z - Pz, x_j - x \rangle + \langle z - Pz, x - Pz \rangle \\ &\leq \langle z - Pz, x_j - x \rangle \end{aligned}$$

を得る. したがって,  $\{x_j\}$  は  $Pz$  に強収束していることが示せた.  $\{u_{n_i}\}$  は  $\{u_n\}$  の任意の部分列であるから,  $\{u_n\}$  自身も  $Pz$  に強収束する.  $\square$

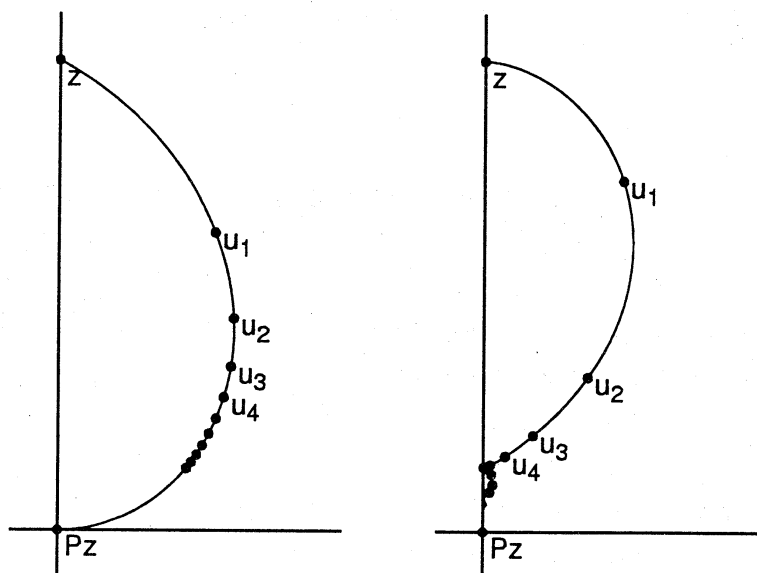
次に, 定理 2 と定理 3 を比較する. 直接比較できないので, 定理 2 から導かれる次の定理と比較する.

**定理 4.**  $C$  を Hilbert 空間  $H$  の閉凸部分集合とする.  $\{T(t) : t \geq 0\}$  を  $C$  上の非拡大写像からなる強連続半群で共通不動点集合  $F(T) = \bigcap_{t \geq 0} F(T(t))$  は空でないとする.  $P$  を  $F(T)$  の上への距離射影とする.  $\{\alpha_n\}$  および  $\{t_n\}$  を  $0 < \alpha_n < 1$ ,  $\alpha_n \rightarrow 0$ ,  $t_n > 0$ , および  $t_n \rightarrow \infty$  を満たす実数列とする.  $\{\mu_n\}$  を  $C([0, \infty))$  上の mean の列で,  $(\mu_n)_t(f(t)) = (1/t_n) \int_0^{t_n} f(t) dt$  と定義する. ここで,  $C([0, \infty))$  は  $[0, \infty)$  上の有界連続関数全体からなる空間とする.  $z$  を  $C$  の任意の元とし,  $\{u_n\}$  を  $u_n = (1 - \alpha_n)T_{\mu_n}u_n + \alpha_n z$  によって一意に定義される  $C$  の点列とする. このとき,  $\{u_n\}$  は  $Pz$  に強収束する.

定理 3 と定理 4 の最も大きな相違点は, 定理 3 では  $t_n \rightarrow 0$  であるのに対して, 定理 4 では  $t_n \rightarrow \infty$  となっていることである. 具体的な場合について収束の違いを見てみよう.  $C = H = \mathbf{R}^2$ ,  $T(t)(x, y) = (\cos t \cdot x + \sin t \cdot y, -\sin t \cdot x + \cos t \cdot y)$ ,  $z = (0, 1)$  とする. 定理 3 にお

TOMONARI SUZUKI

いて,  $\alpha_n = 1/(n+1)$ ,  $t_n = 1/\sqrt{n+1}$  とした場合の  $\{u_n\}$  は, 下図左のような点列になる. 一方, 定理 4 において,  $\alpha_n = 1/(n+1)$ ,  $t_n = n$  とした場合の  $\{u_n\}$  は, 下図右のような点列になる.



最後に, 定理 3 を Banach 空間に拡張した結果を証明抜きで述べる. ここに現れる概念については [4] 等を参照のこと.

**定理 5.**  $E$  を一様に Fréchet 微分可能なノルムを持つ Banach 空間, もしくは一様に Gâteaux 微分可能なノルムを持つ一様凸 Banach 空間とし,  $C$  を  $E$  の閉凸部分集合とする.  $\{T(t) : t \geq 0\}$  を  $C$  上の非拡大写像からなる強連続半群で共通不動点集合  $F(T) = \bigcap_{t \geq 0} F(T(t))$  は空でないとする.  $P$  を  $F(T)$  の上への sunny かつ非拡大なレトラクションとする.  $\{\alpha_n\}$  および  $\{t_n\}$  を  $0 < \alpha_n < 1$ ,  $t_n > 0$ ,  $t_n \rightarrow 0$  および  $\alpha_n/t_n \rightarrow 0$  を満たす実数列とする.  $z$  を  $C$  の任意の元とし,  $\{u_n\}$  を  $u_n = (1 - \alpha_n)T(t_n)u_n + \alpha_n z$  によって一意に定義される  $C$  の点列とする. このとき,  $\{u_n\}$  は  $Pz$  に強収束する.

## 参考文献

- [1] F. E. Browder: "Convergence of approximates to fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in Banach spaces", Arch. Rational Mech. Anal., **24** (1967), 82–90.
- [2] N. Shioji and W. Takahashi: "Strong convergence theorems for asymptotically nonexpansive semigroups in Hilbert spaces", Nonlinear Anal., **34** (1998), 87–99.
- [3] W. Takahashi: "A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space", Proc. Amer. Math. Soc., **81** (1981) 253–256.
- [4] 高橋渉: "非線形関数解析学", 近代科学社 (1988).

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATION SCIENCE, GRADUATE SCHOOL  
OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, NIIGATA UNIVERSITY, NIIGATA 950-2181, JAPAN  
E-mail address: tomonari@math.sc.niigata-u.ac.jp