

Exact G-category の Q-construction

東工大 理 村山光孝 (Mitutaka Murayama)

京大 数理研 島川和久 (Kazuhisa Shimakawa)

序

Exact category M とその Q -構成 QM は Quillen[q] により定義され、 M の代数的 K -群は (圏の) 分類空間 BQM のホモトピー群

$$K_i(M) = \pi_{i+1}(BQM) = \pi_i(\Omega BQM)$$

として定義された。(ΩX は X のループ空間。)

BQM は Waldhausen[w] の QQ -構成, shimakawa[s] の多重 Q -構成により無限ループ空間であることが示され (即ち $\exists \{X_n\}$, $X_1 = BQM$, $BQM \simeq \Omega^n X_{n+1}$: ホモトピー同値)、代数的 K -理論が一般 (コ) ホモロジー論として定式化されている。

ここではこれを群 G の作用する場合に拡張することを考える。
(c.f. [n]) その為に exact G -category M を定義し [s] の方法に従って BQM が (上の X_n が G -空間で上のホモトピー同値が同変であるという意味で) 同変無限ループ空間であること、即ち、次を示す。

定理

BQM と $\Omega^n BQ^{n+1} M^{(n+1)}$ は G -homotopy 同値。 ($n \geq 1$)

従って BQM は同変無限 loop 空間。

2. Exact G-categories

G を群とする。 M が G-category とは、 G が圏 M に各 $g \in G$ が functor であるように作用しているものとする。

小 G -圏 M の対象集合、射集合は G -集合であり、その source, target, identity, composition functions は G -maps となる。

従って、その分類空間 BM は G -CW 複体 ($[m]$) となる。

G -同変 functor, natural transformation は、 G -作用と可換なものとして定義される。 natural G -equivalence は 逆 自然 G -変換を持つものである。 G -圏 M, N が G -equivalent とは、 G -関手 $f: M \rightarrow N, h: N \rightarrow M$, 自然 G -同値 $a: hf \cong Id_N, b: fh \cong Id_M$ が存在することである。

各部分群 $H < G$ による不動対象、射 M^H は又圏になり BM は G -CW 複体で $B(M^H) = (BM)^H$ が成り立つ。 ($M^H = \{m \in M \mid \forall g \in H, gm = m\}$)

例 2.1 R を ring (with unity) で、 G は R に (unitary) ring automorphism として作用しているとする。

GRM を全ての small G - R -modules M とその A -submodules N を対象とし、 A -module homomorphisms を射とする圏とする。 $g \in G$ に対し、 $gM = M$ で gN は R -module であり、 R -準同型 $f: N \rightarrow L$ に対し

$$(gf)(n) = gf(g^{-1}n)$$

で G -作用を定義すると、 $gf: gN \rightarrow gL$ は A -準同型になり、

GRM は G -category になる。 (後ほど定義する small exact

G -category M に対し、 (非同変の場合と同様に) 同変 embedding theorem が成り立つとすれば、 ある 1 を持つ環 R が存在して M は

GRM の full G -subcategory となる。)

又、上の full subcategory で R 上有限生成射影的なものの全体を対象とするものを PG とすればこれも G -category である。

さらに PG の G -skeleton をとれば small G -category になる。

G -category 内での同値関係が G -作用で保たれる ($a \sim b \Rightarrow ga \sim gb$) 時その同値類 $[a]$ に G -作用が $g[a] = [ga]$ で定義される。同値類 $[a]$ と同一の isotropy 部分群を持つ代表元 b ($G_{[a]} = G_b \equiv \{g \in G \mid gb = b\}$) が存在するとき b を $[a]$ の 同変代表元 (equivariant representative) という。

例 2.2 部分対象は monomorphisms の次の同値関係による同値類である: $f: b \rightarrow a \sim h: c \rightarrow a \leftrightarrow$ 同型 $k: b \cong c$ が存在して $f = hk$ 。

又、商対象は epimorphisms の次の同値関係による同値類である:

$$f: a \rightarrow b \sim h: a \rightarrow c \leftrightarrow \text{同型 } k: b \cong c \text{ が存在して } h = kf。$$

これらの同値関係は G -作用によって保たれる。零対象が存在して G -不変とすると kernel は部分対象であり cokernel は商対象だからこれらも G -作用によって保たれる。

Exact category の定義については Quillen[q] を参照して下さい。

定義 2.3 M が Exact G -category とは、 M は exact category $M = (M, E)$ であり (E は a family of short exact sequences)、 G は exact functors として作用し (即ち、 $g: M \rightarrow M$ は additive で

$$(0 \rightarrow a \xrightarrow{i} b \xrightarrow{j} c \rightarrow 0) \in E \Rightarrow (0 \rightarrow ga \xrightarrow{gi} gb \xrightarrow{gj} gc \rightarrow 0) \in E,$$

i は admissible monomorphism, j は admissible epimorphism と

呼ばれ、 $\rightarrow, \Rightarrow$ と表される。) 次をみたす。

1) G -不変 zero object 0 をもつ。

2) 同変 biproduct functor $\oplus : M \times M \rightarrow M$ が存在する。即ち

$\oplus$ は任意の $(a, b) \in M \times M$ の biproduct diagram :

$$(2.1) \quad \begin{array}{ccccc} & i_a & & i_b & \\ a & \xrightarrow{\quad} & a \oplus b & \xleftarrow{\quad} & b \\ & p_a & & p_b & \end{array}$$

と $g \in G$ に対し、 $g(a \oplus b) = ga \oplus gb$, $gi_c = i_{ac}$, $gp_c = p_{ac}$, $c = a, b$ をみたす。

3) 任意の admissible subobjects, admissible quotients は同変代表元を持つ。

4) M^H 内で kernelを持つ射 $f: a \rightarrow b$ に対し、 $h: c \rightarrow a$ が存在して $fh: c \rightarrow b$ が admissible epi. ならば、 f もそうであり、admissible mono. についても、この双対が成り立つ。

又 M が Abelian G -category とは、 M は Abelian category

であり G は exact functors として作用し、1、2) 及び

A 3) 任意の部分対象、商対象は同変代表元を持つ。

をみたすものとする。

例 2.4 例 2.1 の例は全て abelian G -category になり、その全ての短完全列を E とすれば、 $M = (M, E)$ は exact G -category になる。

実際、GRM の $\oplus$ は 2) をみたし、部分対象、商対象の同変代表元としては像 (の包含写像)、商加群 (への射影) を取ればよい。

注意 2.5 Exact (abelian) G-category の基本的性質

1) $a \oplus b$ は同変積であり同変和である。

即ち、 $f: c \rightarrow a, h: c \rightarrow b$ の積 $m(f, h) = i_a f + i_b h: c \rightarrow a \oplus b$ は同変である。実際 $m(gf, gh) = i_a gf + i_b gh = g(i_a f) + g(i_b h) = g(i_a f + i_b h) = gm(f, h): gc \rightarrow ga \oplus gb$ より同変。和についても同様である。

2) M の対象 a から b への射全体を $M(a, b)$ とするとこれは $G(a, b)$ -加群である。

3) E 内の短完全列の base, cobase change は同変である。

$(0 \rightarrow a \xrightarrow{i} b \xrightarrow{j} c \rightarrow 0) \in E$, j の $f: d \rightarrow c$ による pull back (base change) を考える。 $s = jp_b - fp_d: b \oplus d \rightarrow c$, $w = \ker s: e \rightarrow b \oplus d$, $u = p_d w$, $v = p_b w$ とすると、

$$(2.2) \quad \begin{array}{ccc} e & \xrightarrow{u} & d \\ v \downarrow & & \downarrow f \\ b & \xrightarrow{j} & c \end{array} \quad (2.3) \quad \begin{array}{ccccc} e & \xrightarrow{w} & b \oplus d & \xrightarrow{p_d} & d \\ & & p_b \downarrow & & \downarrow f \\ & & b & \xrightarrow{j} & c \end{array}$$

(2.2) は pull back diagram である。今 $si_b = j: b \rightarrow b \oplus d \rightarrow c$ だから、 s, u は admissible, u を同変代表元を取れば、 $(j, f) \rightarrow (u, v)$ は同変である。 他も同様。

命題 2.6

$H < G$, $M = (M, E)$ を exact G-category とすると、 $M^H = (M^H, E^H)$ は exact subcategory である。

証明

$0 \in M^H$, $\oplus$ は制限により得られる。 $f, h: a \rightarrow b$ in $M^H, g \in H$ とすれば、
 $g(f+h) = gf + gh = f+h$ より、 $f+h \in M^H$, 左右からの射の合成も同様。
 よって M^H は additive subcategory である。 E^H が [q], p91 の
 a, b, c) をみたすことは定義 2.3 と注意 2.5 (3) より得られる。

Q-構成

$M = (M, E)$ を exact G-category とする。 M に通常の Q-構成 [q] を行
 ったものを、 QM とする。 即ち、 $oQM = oM$ (oM は M の対象)。

QM の射 $[j, i]: a \rightarrow b$ は admissible mono. $i: c \rightarrow b$ と admissible
 epi. $j: c \rightarrow a$ の対 (j, i) の次の同値関係による同値類 $[j, i]$ である:
 $(j, i) \sim (p, q) \leftrightarrow p: d \rightarrow a, q: d \rightarrow b$ で同型 $k: c \cong d$ が存在して

$$(2.4) \quad \begin{array}{ccccc} & j & & i & \\ a & \leftarrow & c & \rightarrow & b \\ \parallel & & \downarrow k & & \parallel \\ a & \leftarrow & d & \rightarrow & b \\ & p & & q & \end{array}$$

が可換になる。(このような同型は存在すれば一意的である。)

G-作用が exact であるからこの同値関係は作用によって保たれる。
 従って、 $g[j, i] = [gj, gi]$ として QM に G-作用が入る。

ここで i を b の admissible subobject $[i]$ の 同変代表元と
 すれば、 対応する j により (j, i) は $[j, i]$ の同変代表元になる。
 実際、 $g \in G_{[i]}$ とすれば $ga = a, gb = b, g \in G_{[i]}$ だから $gi = i,$
 $gc = c$, したがって (2.4) の同型 $k: c \cong gc$ は identity である ($p =$
 $gj, q = gi = i, d = gc = c$)。 よって $gj = j, gi = i$ で (j, i) は 同変代表元。

$H < G$ に対し、 $f: M^H \rightarrow M$ を inclusion functor とすると
 $(Qf)^H: Q(M^H) \rightarrow (QM)^H$ が誘導される。 今 $[j, i] \in (QM)^H$ ($H < G_{[i]}$)

に対し (j, i) を同変代表元とすると、 $j, i \in M^H$ 。従って $(Qf)^H$ は同型である。この標準的同型で両者を同一視して、次を得る。

命題 2.7

$H < G$, M を exact G -category とすると $(QM)^H = Q(M^H)$,
さらに M が small ならば $(BQM)^H = BQ(M^H)$ 。

3. Multi-exact G -category と BQM の delooping

これ以降圖は全て小圖とする。Multiple, multi-exact category の定義と性質は [s] を参照して頂きたいが、記号の紹介をかねて簡単に説明することにする。

C が A 上の n -fold category とは、 C は共通の射集合 A を持つ n 個の圖 $C_1, \dots, C_n$, $C_k = (A; 0_k)$, $0_k \subset A$, $k=1, \dots, n$ (即ち、 $C = (A; 0_1, \dots, 0_n)$ は小集合の $(n+1)$ -ad) で C_k の構造写像 ($S_k = \text{source}$, $T_k = \text{target}$, $\circ_k = \text{composition}$, $\text{identity} = I_k = \text{inclusion} : 0_k \rightarrow A$) と C_i の構造写像が可換であるものである。($i \neq k$) 各 C_k は component と呼ばれる。 n -fold functor $F: C \rightarrow D$ とは、 $(n+1)$ -ad の写像で構造写像と可換なものである。

定義 3.1 C が n -fold G -category とは、 C は n -fold category で $g \in G$ が n -fold functor として作用しているものである。

($A, 0_k$ は G -集合で、構造写像は G -写像である。) n -fold functor F が n -fold G -functor とは作用と可換なものである。

例 3.2 I を対象が $\{0, 1\}$ で identities 以外の射が $\lambda : 0 \rightarrow 1$

のみからなる圏とする。圏 C に対し、全ての $\text{functor}: I^n \rightarrow C$ からなる集合上の n -fold category $C^{[n]}$ が [s], 1.3 に定義されているが、 C を G -圏 とし、 $C^{[n]}$ への G -作用を $(gf)(a) = gf(a)$ (I への G -作用は trivial) で定義すると $C^{[n]}$ は n -fold G -category になる。このとき、 $H < G$ に対し $(C^{[n]})^H = (C^H)^{[n]}$ である。

$k \in N = \{1, \dots, n\}$ と n -fold G -category C に対し、射集合が 0_k で components が $(0_i; 0_k \cap 0_i)$, $i \in N - \{k\}$ である $(n-1)$ -fold G -category を $o_k C$ と書く。 $(o_k C = (0_i; 0_k \cap 0_i))$ このとき、 $S_k, T_k, \circ_k$ は $(n-1)$ -fold G -functor である。

P を p 個の元からなる $N = \{1, \dots, n\}$ の部分集合とする。

定義 3.3 M が P -exact n -fold G -category とは M は P -exact n -fold category で $g \in G$ が P -exact n -fold functor として作用していて次をみたすものである: $p, q \in P, p \neq q, i \in N, i \neq p$ とする。

1) M_0 は exact G -category $M_0 = (M_0, E_0)$ で $o_i M_0$ は M_0 の exact G -subcategory である。(P -exact n -fold category の定義により M_i の構造写像 $(S_i: M_0 \rightarrow o_i M_0, \text{etc})$ は exact G -functor で若干条件が付いたものになる。)

2) E_0 は $M_0 \times_{o_0 M_0} M_0$ の exact G -subcategory である。

(注意: P -exact n -fold category の定義は () 内を含めて殆ど 1、2) から G -を除いたものに等しい。)

例 3.4 M を exact G -category とすると $M^{[n]}$ は N -exact n -fold G -category (略して n -fold exact G -category という) に

なり、 $(M^{[n]})^H = (M^H)^{[n]}$ は n -fold exact subcategory になる。

(c.f. [s], 2.4)

[s], 2.6 により P -exact category M に対し、 $(Q_{M_0}; o, M_0)$ (構造写像は QS_1 , etc.) を j -th component とする $(P - \{p\})$ -exact category $Q_p M$ が定まるが命題 2.7 (の上) と同様にして次を得る。

命題 3.5

P -exact n -fold G -category M に対し $Q_p M$ は $(P - \{p\})$ -exact n -fold G -category であって、 $H < G$ に対し $(Q_p M)^H = Q_p (M^H)$ である。

n -fold exact G -category M に対し $Q^n M = Q_n \cdots Q_1 M$ と置く。
 M の nerve は n -fold simplicial G -set であり、その幾何学的実現を BM とかき、これは M の分類空間と呼ばれる。

[s], 3.4 により $S^1 \wedge BQ^n M^{[n]} \rightarrow BQ^{n+1} M^{[n+1]}$ の adjoint としてホモトピー同値 $e: BQ^n M^{[n]} \rightarrow \Omega BQ^{n+1} M^{[n+1]}$ が得られ ([s], 3.2)、これらは容易に G -map であることが分かる。

定理

exact G -category M に対し、 BQM と $\Omega^n BQ^{n+1} M^{[n+1]}$ は G -homotopy 同値である。 ($n \geq 1$)

従って BQM は同変無限 loop 空間。

(これは、定義 2.3 の条件 4) を除いても成立する。)

証明 いま $H < G$ に対し

$$(BQ^n M^{[n]})^H = B((Q^n M^{[n]})^H) = BQ^n (M^{[n]})^H = BQ^n (M^H)^{[n]}$$

で M^H は exact category であるから、 e^H はホモトピー同値。よって同変 Whitehead theorem により定理を得る。(G が有限群の時は [a] による。離散群の場合にも拡張できる。)

参考文献

- [a] S. Araki and M. Murayama: G -homotopy types of G -complexes and representation of G -cohomology theories
Publ. RIMS Kyoto Univ., 14(1978) 23-222
- [m] T. Matumoto: On G -CW complexes and a theorem of J.H.C. Whitehead, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I, 18 (1971) 51-68
- [n] 西田吾郎: 同変代数的 K -理論の定義, 第4回代数セミナー報告集
- [q] D. Quillen: Higher Algebraic K -theory I, LNM 341
- [s] K. Shimakawa: Multiple categories and Algebraic K -theory, J. Pure Appl. Alg. 41 (1986) 285-304
- [w] F. Waldhausen: Algebraic K -theory of generalized free products, Ann. Math. 108(1978) 135-256