

Oscillatory solutions of semilinear elliptic equations with nonlinear perturbed terms in exterior domains

島根大学 総合理工学研究科 山岡直人 (Naoto Yamaoka)

島根大学 総合理工学部 杉江実郎 (Jitsuro Sugie)

Department of Mathematics

Shimane University

半線形楕円型方程式

$$\Delta u + p(x)u + \phi(x, u) = 0, \quad \Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (E)$$

の外部領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) における解の振動について考える。ただし、領域 Ω は $G_a := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| > a\}$ を含む。一般に、ある正の a に対して、 G_a を含む領域を外部領域と呼ぶ。方程式 (E) の関数 $p(x)$, $\phi(x, u)$ に次の仮定をする。

- (i) 関数 $p(x)$ は非負かつ任意の有界領域 $M \subset \Omega$ に対し、 $\overline{M}$ 上で α 次 Hölder 連続 ($\alpha \in (0, 1)$) である。
- (ii) 関数 ϕ は非負かつ任意の有界領域 $M \subset \Omega$, 任意の有界区間 $J \subset \mathbb{R}$ に対し、 $\overline{M} \times \overline{J}$ 上で α 次 Hölder 連続 ($\alpha \in (0, 1)$) である。

簡単のため、2つの関数空間を定義しておく。任意の有界領域 $M \subset \mathbb{R}^N$ の閉包 $\overline{M}$ 上の関数 $u : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ の α 次 Hölder norm $\|u\|_{2+\alpha, \overline{M}}$ が有界となる集合を $C^{2+\alpha}(\overline{M})$ で表す。また、関数 $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が任意の有界領域 $M \subset \Omega$ に対して $C^{2+\alpha}(\overline{M})$ となるような u の集合を $C_{loc}^{2+\alpha}(\Omega)$ と表す。

関数 $u \in C_{loc}^{2+\alpha}(\Omega)$ がすべての $x \in \Omega$ に対して方程式 (E) を満たすとき、 $u(x)$ は方程式 (E) の解であると呼び、同様に、関数 $u \in C_{loc}^{2+\alpha}(\Omega)$ がすべての $x \in \Omega$ に対して不等式

$$\Delta u + p(x)u + \phi(x, u) \leq 0 \text{ (または, } \geq 0)$$

を満たすとき、 $u(x)$ は方程式 (E) の supersolution (または, subsolution) と呼ぶ。

本研究では、方程式 (E) の解 $u(x)$ が任意の外部領域で正値でも負値でもないとき、 $u(x)$ は振動するといい、逆に、方程式 (E) の解 $u(x)$ がある外部領域で正値または負値のとき、 $u(x)$ は振動しないという。

関数 $\phi(x, u)$ が零の場合、方程式 (E) は線形方程式

$$\Delta u + p(x)u = 0 \quad (1)$$

となる。関数 $p(x)$ が

$$p(x) = \frac{\mu}{|x|^2}, \quad \mu > 0 \quad (2)$$

の場合を考える。条件 (2) を満たす方程式 (1) の球対称解は以下のように具体的に解くことができるので、定数 μ によって、方程式 (1) が振動しない解をもつかどうかを判定することができる：

$$u(x) = \begin{cases} (K_1 + K_2 \log t(x)) \left(\frac{1}{t(x)} \right)^{1/2}, & \text{if } \mu = \lambda_N, \\ (K_3 t(x)^\zeta + K_4 t(x)^{-\zeta}) \left(\frac{1}{t(x)} \right)^{1/2} & \text{if } \mu \neq \lambda_N. \end{cases}$$

で与えられる。ただし、 $\lambda_N = (N-2)^2/4$, $t(x) = (N-2)|x|^{N-2}$ かつ K_i ($i = 1, 2, 3, 4$) は任意定数であり、 ζ は

$$((N-2)\zeta)^2 = \lambda_N - \mu$$

の根である。よって、 $0 < \mu \leq \lambda_N$ のとき、(2) を満たす線形方程式 (1) は振動しない解をもち、 $\mu > \lambda_N$ のとき、すべての球対称解は振動する。このように、線形方程式 (1) では定数 λ_N が解の振動について重要な役割をもつ。

線形方程式 (1) が振動しない解をもつための係数 $p(x)$ に関する条件をもう少し詳しく調べるために、三つの関数列を以下のように定義する：

$$\log_1 t = |\log t|, \quad \log_{k+1} t = \log\{\log_k t\}; \quad l_1(t) = 1, \quad l_k(t) = l_k(t) \log_k(t);$$

$$S_k(t) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\{l_i(t)\}^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

これらの関数列 $\{\log_k(t)\}$, $\{l_k(t)\}$ と $\{S_k(t)\}$ は $t > 0$ が絶対値の十分大きな範囲と小さな範囲で定義される。具体的に関数列 $\{l_k(t)\}$, $\{S_k(t)\}$ をいくつか列挙すると

$$\begin{aligned} l_2(t) &= |\log t|, & l_3(t) &= |\log t|(|\log |\log t||), \dots; \\ S_1(t) &= 1, & S_2(t) &= 1 + \frac{1}{(\log t)^2}, \\ S_3(t) &= 1 + \frac{1}{(\log t)^2} + \frac{1}{(\log t)^2(\log(|\log t|))^2}, \dots \end{aligned}$$

となる。

数列 $S_n(t)$ を用いて

$$p_n(x) = \frac{\lambda_N}{|x|^2} S_n(t(x))$$

とおくと、線形方程式

$$\Delta u + p_n(x)u = 0$$

は振動しない解

$$u(x) = (K_1 + K_2 \log_n(t(x))) \left(\frac{l_n(t(x))}{t(x)} \right)^{1/2}$$

をもつ。ただし、 K_1, K_2 は任意定数である。

本研究の目的は、このような振動しない解をもつ線形方程式 (1) に非線形摂動項 $\phi(x, u)$ を加えたとき、その影響によって、振動しない解が振動するようになるかどうかを調べることである。

方程式 (E) が振動しない解をもつための条件を与えるため, Noussair and Swanson [3] の “supersolution - subsolution method” を用いる。この手法は, 外部領域で正の supersolution とそれより小さい正の subsolution が存在するならば, その supersolution と subsolution の間に方程式 (E) の解が存在することを示している。

Lemma 1. $C_b = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = b\}$ とおく。領域 $G_b \cup C_b$ で, 方程式 (E) の正の supersolution $\bar{u}(x)$ と正の subsolution $\underline{u}(x)$ が存在し, $\underline{u}(x) \leq \bar{u}(x)$ を満たすとする。このとき, 方程式 (E) は

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u}(x), \quad x \in G_b, \quad u(x) = \bar{u}(x), \quad x \in C_b$$

を満たす解 $u(x)$ をもつ。

方程式 (E) の supersolution と subsolution を見つけるため, Sugie [4, Theorem 2.2] が与えた常微分方程式

$$w'' + \frac{2}{t}w' + \frac{1}{4t^2}S_n(t)w + \frac{1}{t^2}g(w) = 0, \quad ' = \frac{d}{dt} \quad (3)$$

の非振動解の存在定理を利用する。ただし, 関数 g は局所的 Lipschitz 連続と

$$wg(w) > 0, \quad w \neq 0 \quad (4)$$

を満たすものとする。

Proposition 1. 条件 (4) を仮定する。このとき, 絶対値が十分小さな $w > 0$ (または, $w < 0$) に対して, 関数 $g(w)$ が

$$\frac{g(w)}{w} \leq \frac{1}{4\{l_{n+1}(w^2)\}^2} \quad (5)$$

を満たすならば, 方程式 (3) は振動しない解をもつ。

方程式 (3) と同値な Liénard 方程式系

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta - \xi, \\ \dot{\eta} &= -\frac{1}{4}S_n(e^s)\xi - g(\xi), \end{aligned} \quad ' = \frac{d}{ds}, \quad s = \log t \quad (6)$$

を考える。方程式系 (6) の零解の大域的漸近安定は Sugie [4, Lemma 3.2] によって証明されているので, Proposition 1 で得た方程式 (3) の振動しない解 $w(t)$ は減衰する。すなわち,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0 \quad (7)$$

である。方程式系 (6) を相平面解析することによって, 減衰する速さも以下のように評価できる。

Lemma 2. 条件 (4) を仮定する。このとき, 絶対値が十分小さな $w > 0$ に対して条件 (5) が成り立つならば, 方程式 (3) は

$$w(t) \geq \frac{Tw(T)}{t} \quad (t \geq T)$$

を満たす解 $w(t)$ をもつ。

Proof. 関数 g は条件 (4), (5) と Proposition 1 より, 方程式 (3) は正值解 $w(t)$ をもつ。すなわち, ある $T > 0$ に対して, $w(t) > 0$ ($t \geq T$) である。正值解 $w(t)$ を用いて $(\xi(s), \eta(s))$ を

$$(\xi(s), \eta(s)) = (w(t), w'(t)t + w(t)), \quad s = \log t$$

で定義すると, $(\xi(s), \eta(s))$ は方程式系 (6) の解となる。関数 $S_n(e^s) > 0$, $\xi(s) > 0$ ($s \geq \log T$) なので, 条件 (4) より $\dot{\eta}(s) < 0$ ($s > \log T$) である。したがって, $\eta(s_0) < 0$ となる $s_0 > \log T$ が存在するならば

$$\dot{\xi}(s) = \eta(s) - \xi(s) < \eta(s_0) \quad (s \geq s_0)$$

である。この微分不等式を解くと

$$\xi(s) < \eta(s_0)(s - s_0) + \xi(s_0) \rightarrow -\infty \quad (s \rightarrow \infty)$$

となる。これは $\xi(s) > 0$ ($s \geq \log T$) であることに矛盾する。よって, $\eta(s) \geq 0$ ($s \geq \log T$) である。このことから

$$\dot{\xi}(s) = \eta(s) - \xi(s) \geq -\xi(s), \quad s \geq \log T$$

となる。この不等式の両辺を $\log T$ から s まで積分すると

$$\xi(s) \geq \xi(\log T)Te^{-s}, \quad s \geq \log T$$

を得る。したがって, $w(t)$ は $w(t) \geq Tw(T)/t$ ($t \geq T$) を満たす。□

Lemma 2 の $w(t)$ と $Tw(T)/t$ から, Lemma 1 の条件を満たす方程式 (E) の supersolution と subsolution が構成することができる。したがって, 方程式 (E) が振動しない解をもつための条件を得ることができる。

Theorem 1. 関数 p はある自然数 n に対して

$$0 \leq p(x) \leq p_n(x), \quad x \in \Omega, \quad (8)$$

を満たすとする。また, 関数 ϕ は

$$0 \leq \phi(x, u) \leq \frac{h(u)}{|x|^2}, \quad x \in \Omega, \quad u \geq 0 \quad (9)$$

を仮定する。ただし, 関数 $h(u)$ は局所的 Lipschitz 連続であり, $h(0) = 0$ である。このとき, 十分小さな $u > 0$ に対して

$$\frac{h(u)}{u} \leq \frac{\lambda_N}{\{l_{n+1}(u^2)\}^2} \quad (10)$$

を満たすならば, 方程式 (E) はある $b \geq a$ に対して

$$u(x) > 0, \quad x \in G_b, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$$

を満たす解 $u(x)$ をもつ。

Proof. 関数 g^* を

$$g^*(u) = \begin{cases} h(u)/4\lambda_N, & (u \geq 0) \\ -h(-u)/4\lambda_N & (u < 0) \end{cases}$$

と定義する。このとき、条件 (10) から $u > 0$ で十分小さいとき

$$\frac{g^*(u)}{u} = \frac{h(u)}{4\lambda_N u} \leq \frac{\lambda_N}{4\lambda_N \{l_{n+1}(u^2)\}^2} = \frac{1}{4\{l_{n+1}(u^2)\}^2}$$

なので、 g^* は Lemma 2 の条件を満たす。よって、方程式

$$w'' + \frac{2}{t}w' + \frac{1}{4t^2}S_n(t)w + \frac{1}{t^2}g^*(w) = 0$$

はある $b \geq a$ に対して

$$w(t) \geq \frac{bw(b)}{t} > 0 \quad (t \geq b), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$$

を満たす解 $w(t)$ をもつ。

条件 (8), (9) を用い, $\bar{u}(x) = v(r) = w(t)$, $r = |x|$, $t = (N-2)r^{N-2}$ とおくと

$$\begin{aligned} & \Delta \bar{u}(x) + p(x)\bar{u}(x) + \phi(x, \bar{u}(x)) \\ & \leq \Delta \bar{u}(x) + p_n(x)\bar{u}(x) + \frac{1}{|x|^2}h(\bar{u}(x)) \\ & = \frac{d^2}{dr^2}v(r) + \frac{N-1}{r} \frac{d}{dr}v(r) + \frac{(N-2)^2}{4r^2}S_n((N-2)r^{N-2})v(r) + \frac{1}{r^2}h(v(r)) \\ & = \frac{(N-2)^2}{r^2} \left[t^2 w''(t) + 2tw'(t) + \frac{1}{4}S_n(t)w(t) + g^*(w(t)) \right] = 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\bar{u}(x)$ は $G_b \cup C_b$ 上で方程式 (E) の正の supersolution となる。また、 $\underline{u}(x) = bw(b)/t$, $r = |x|$, $t = (N-2)r^{N-2}$ とおくと

$$\begin{aligned} & \Delta \underline{u}(x) + p(x)\underline{u}(x) + \phi(x, \underline{u}(x)) \geq \Delta \underline{u}(x) \\ & = \frac{(N-2)^2}{r^2} \left[t^2 \left(\frac{bw(b)}{t} \right)'' + 2t \left(\frac{bw(b)}{t} \right)' \right] \\ & = \frac{(N-2)^2}{r^2} \left[t^2 \frac{2bw(b)}{t^3} - 2t \frac{bw(b)}{t^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

なので、 $\underline{u}(x)$ は $G_b \cup C_b$ 上で方程式 (E) の正の subsolution となる。さらに、Lemma 2 より

$$\underline{u}(x) = \frac{bw(b)}{t} \leq w(t) = \bar{u}(x), \quad x \in G_b \cup C_b$$

なので、Lemma 1 から

$$0 < \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u}(x), \quad x \in G_b, \quad \underline{u}(x) = u(x) = \bar{u}(x), \quad x \in C_b$$

を満たす方程式 (E) の解 $u(x)$ が存在する。また、条件 (7) より

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \bar{u}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$$

なので、 $|x| \rightarrow \infty$ のとき $u(x) \rightarrow 0$ である。 □

方程式 (E) において線形の係数項 $p(x)$ を $p(x) = p_n(x)$, 摂動項 $\phi(x, u)$ を $\phi(x, u) = h(u)/|x|^2$ に制限した方程式

$$\Delta u + p_n(x)u + \frac{h(u)}{|x|^2} = 0 \quad (11)$$

を考える。関数 h が

$$\frac{h(u)}{u} = \frac{\lambda_N}{\{l_{n+1}(u^2)\}^2}, \quad |u| > 0 : \text{十分小}$$

を満たすとき, Theorem 1 より方程式 (11) のある解は振動しない。しかし, 関数 h が $\mu > \lambda_N$ に対して

$$\frac{h(u)}{u} = \frac{\mu}{\{l_{n+1}(u^2)\}^2}, \quad u > 0 : \text{十分小}$$

を満たす場合は, 条件 (10) が成り立たないので, Theorem 1 は使えない。実はこの場合, 方程式 (11) のすべての解は振動する。実際, 方程式 (E) に対して次の定理が成り立つ。

Theorem 2. ある自然数 n に対して

$$p(x) = p_n(x), \quad x \in \Omega \quad (12)$$

であるとする。また, 関数 ϕ に

$$\phi(x, u) \geq \frac{h(u)}{|x|^2} > 0, \quad x \in \Omega, \quad u > 0, \quad (13)$$

$$\phi(x, -u) = -\phi(x, u), \quad x \in \Omega, \quad u > 0 \quad (14)$$

を仮定する。ただし, 関数 $h(u)$ は局所的 Lipschitz 連続であり, $h(0) = 0$ である。このとき, 十分小さな $u > 0$ に対して

$$\frac{h(u)}{u} \geq \frac{\mu}{\{l_{n+1}(u^2)\}^2} \quad (15)$$

を満たす $\mu > \lambda_N$ が存在するならば, 方程式 (E) のすべての解は振動する。

Remark. Theorem 1 と異なり Theorem 2 では, 関数 $p(x)$ と $\phi(x, u)$ に α 次 Hölder 連続の仮定を設ける必要はない。

Theorem 2 を証明するためには, 二つのことが必要である。一つ目は, 常微分方程式

$$\frac{d}{dr} \left(r^{N-1} \frac{d}{dr} v \right) + r^{N-1} \left\{ \frac{\lambda_N}{r^2} S_n((N-2)r^{N-2})v + \frac{1}{r^2} h(v) \right\} = 0 \quad (16)$$

のすべての解が振動するための条件である。その条件は, Sugie [4, Theorem 2.1] が与えた次の結果から得ることができる。

Proposition 2. 条件 (4) を仮定する。このとき, 十分小さな $|w| > 0$ に対して

$$\frac{g(w)}{w} \geq \frac{\nu}{\{l_{n+1}(w^2)\}^2} \quad (17)$$

を満たす $\nu > 1/4$ が存在するならば, 方程式 (3) のすべての解は振動する。

Propositoin 2 を用いて方程式 (16) のすべての解が振動するための条件を与える。

Lemma 3. 条件 (4) を仮定する。このとき、十分小さな $|w| > 0$ に対して条件 (15) を満たす $\mu > \lambda_N$ が存在するならば、方程式 (16) のすべての解は振動する。

Proof. 方程式 (16) に変数変換

$$w(t) = v(r), \quad t = (N-2)r^{N-2}$$

を行うと

$$\frac{dt}{dr} = (N-2)^2 r^{N-3}, \quad \frac{d}{dr} v(r) = (N-2)^2 r^{N-3} w'(t)$$

なので

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r^{N-1} \frac{d}{dr} v(r) \right) &= \frac{d}{dr} ((N-2)^2 r^{2N-4} w'(t)) \\ &= (N-2)^2 r^{N-3} (t^2 w'(t))' \\ &= (N-2)^2 r^{N-3} (t^2 w''(t) + 2tw'(t)) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\lambda_N = (N-2)^2/4$ であることに注意すれば、方程式 (16) と方程式

$$t^2 w'' + 2tw'(t) + \left\{ \frac{1}{4} S_n(t) w + \frac{h(w)}{4\lambda_N} \right\} = 0 \quad (18)$$

は同値であることがわかる。

関数 $\tilde{g}$, 定数 ν をそれぞれ、 $\tilde{g}(x) = h(w)/4\lambda_N$, $\nu = \mu/4\lambda_N$ とおく。このとき、条件 (15) より $\tilde{g}(x)$ は

$$\frac{\tilde{g}(w)}{w} = \frac{h(w)}{4\lambda_N w} \geq \frac{\mu}{4\lambda_N \{l_{n+1}(w^2)\}^2} = \frac{\nu}{\{l_{n+1}(w^2)\}^2}, \quad \nu > \frac{1}{4},$$

すなわち、条件 (17) を満たす。よって、Propositoin 2 より方程式 (18) のすべての解は振動する。方程式 (16) と (18) は同値なので、方程式 (16) のすべての解も振動する。□

二つ目は、方程式 (E) の正値解（または負値解）と方程式 (16) の正値解（または負値解）の関係である。そのことを調べるために

$$\Delta u + \psi(x, u) = 0 \quad (19)$$

を考える。この方程式は定常状態における Schrödinger 方程式と呼ばれており、その研究は、振動問題に限っても数多くある。特に Emden-Fowler 方程式、すなわち $\psi(x, u) = k(x)u^\gamma$ を中心に議論することが多い [2, 5, 6]。

方程式 (19) の正値解と方程式

$$\frac{d}{dr} \left(r^{N-1} \frac{d}{dr} v \right) + r^{N-1} q(r) f(v) = 0 \quad (20)$$

の正値解の関係は、Naito et al. [1] によってすでに示されている。

Theorem A. 条件

$$\psi(x, u) \geq q(|x|)f(u), \quad x \in \Omega, \quad u > 0,$$

$$q \in C[a, \infty), \quad q(r) \geq 0 \quad (r \geq a); \quad f \in C(0, \infty), \quad f(u) > 0 \quad (u > 0)$$

を仮定する。このとき、方程式 (19) がある外部領域 G_b ($b \geq a$) で正値解 $u(x)$ をもつならば、方程式 (20) は $0 < v(r) < \min_{|x|=r} u(x)$ ($r \geq b$) を満たす解 $v(r)$ をもつ。

方程式 (E) の正値解と方程式 (16) の正値解の関係についても、Theorem A と類似の結論を得ることができる。

Lemma 4. 条件 (12) と (13) を仮定する。ただし、関数 h は連続である。このとき、方程式 (E) がある外部領域 G_b ($b \geq a$) で正値解 $u(x)$ をもつならば、方程式 (16) も $0 < v(r) < \min_{|x|=r} u(x)$ ($r \geq b$) を満たす解 $v(r)$ をもつ。

Lemma 4 の証明は Theorem A の証明を少し変更すればよい。

Remark. 関数 ϕ が条件 (14) を満たすとき、方程式 (E) が外部領域 G_b ($b \geq a$) で負値解 $u(x)$ をもつならば、方程式 (16) も $r \geq b$ において負値解をもつ。なぜならば、条件 (14) より $-u(x)$ は (E) の正値解になる。したがって、Lemma 4 より方程式 (16) は正値解 $v(r)$ をもつ。条件 (14) より条件 (13) の関数 h は $h(-u) = -h(u)$ ($u > 0$) を満たすように取ることができる。よって、 $-v(r)$ は方程式 (16) の負値解である。

Lemmas 3 and 4 を用いることによって、Theorem 2 を証明できる。

Proof of Theorem 2. 方程式 (E) がある外部領域 G_b で正値解をもつと仮定する。条件 (12) と (13) より Lemma 4 を用いると、方程式 (16) は $r \geq b$ で正値解をもつ。

一方、方程式 (16) は条件 (15) を満たすので、Lemma 3 より方程式 (16) のすべての解は振動する。これは矛盾である。

同様に、方程式 (E) が外部領域で負値解をもつ場合も矛盾を導くことができる。よって、方程式 (E) のすべての解は振動する。□

References

- [1] M. Naito, Y. Naito and H. Usami, *Oscillation theory for semilinear elliptic equations with arbitrary nonlinearities*, Funkcial. Ekvac. **40** (1997) 41–55.
- [2] E.S. Noussair and C.A. Swanson, *Oscillation theory for semilinear Schrödinger equations and inequalities*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sect. A **75** (1975/76) 67–81.
- [3] E.S. Noussair and C.A. Swanson, *Positive solutions of quasilinear elliptic equations in exterior domains*, J. Math. Anal. Appl. **75** (1980) 121–133.
- [4] J. Sugie, *Oscillation criteria of Kneser-Hille type for second order differential equations with nonlinear perturbed terms*, to appear in Rocky Mountain J. Math.
- [5] C.A. Swanson, *Semilinear second order elliptic oscillation*, Canad. Math. Bull. **22** (1979) 139–157.
- [6] C.A. Swanson, *Criteria for oscillatory sublinear Schrödinger equations*, Pacific J. Math. **104** (1983) 483–493.