

マルコフ過程を用いた粒状体の力学モデル (1)

北 村 良 介

APPLICATION OF A MARKOV PROCESS TO A MECHANICAL MODEL OF GRANULAR MATERIALS (1)

By *Ryosuke KITAMURA*

Synopsis

In this paper a mechanical model of granular materials is proposed to analyse the various mechanical behaviours on the granular materials such as sands. In modelling, the motion of individual particles is assumed to be a Markov process which is one of the well-known stochastics processes. This assumption is reasonable because the irregularity of the particle in both shape and volume, and the complicated fabric of granular materials are considered to prohibit the deterministic approach to the motion of individual particles in the granular materials.

First, the Markov process is explained briefly and the basic equation of the Markov process is derived. Secondly, the Markov process is applied to the mechanical behaviours of granular materials, and the concepts of potential wall and potential slip plane are introduced in order to determine the coefficients in the basic equation of the Markov process. Thirdly, the strain of granular materials is derived by averaging the motion of particles. Finally, the stress-strain relationships obtained from the proposed model are compared with the results of the drained triaxial compression tests on Toyoura sand and the availability of the proposed model is discussed.

1. 序

「土」は古くから河川堤防, 道路盛土, ダムなど種々の土構造物の材料として利用され, 人間生活と密接に関連してきている。これらの土構造物の設計, 施工に際し, 従来の土木技術者にとってはそれらのものが破壊するかどうかということが重要な問題であり, 施工中あるいは竣工後の破壊を含めた変形問題についてはあまり興味が向けられていなかったようである。しかし, ここ十数年間の経済の発展は軟弱地盤の不同沈下の問題を生じさせ, また世界的な異常気象や地震は堤防の決壊, 地すべり, 砂の液状化などの問題を生じさせた。土質工学におけるこれらの問題と電子計算機の普及による FEM 解析の急速な進歩は土の構成関係, 特に応力-ひずみ関係の解明を現在の土質力学における最も重要な課題の 1 つとした。

このような事情を背景に, 1960年代より土の構成関係の解明を目的とした理論的, 実験的研究が数多くなされてきている。これらの研究は大きく分ければ 2 つに分けられる。1 つは現象論的, あるいは巨視的アプローチといわれるものであり, 弾塑性理論を用いて土の構成関係を明らかにしていこうとするものである。他の 1 つは物性論的, あるいは微視的アプローチといわれるものであり, 土を構成している粒子や間き物質の運動を解明することによってそれらの集合体である土の構成関係を明らかにしようとするものである。筆者は後者の立場に立ち, 砂質土のような粒状体の応力-ひずみ関係の解析を行ってきている^{1), 2), 3)}。

ところで, 砂質土のような形状や大きさが不規則である粒子が複雑な粒子構造を有している粒状体において, それぞれの粒子の運動を一意的に決めることは困難であり, 物性論的なアプローチをする場合には統計・確率論の導入が必要であると考えられる。筆者は巨視的な物理量である応力やひずみは粒状体を構成している粒子の確率的な運動を平均化したものであるという認識に立ち, 粒子の運動に確率過程の 1 つである

マルコフ過程を適用し、粒状体の種々の力学的挙動を解析していくための力学モデルをここに提案することにする。

2. マルコフ過程^{4),5)}

この章ではマルコフ過程の数学的な説明を簡単に行うことにする。

一般にマルコフ過程は次式で定義される。

$$P_n\{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_{n-1}) | x(t_n)\} = P_2\{x(t_{n-1}) | x(t_n)\} \quad (1)$$

ここに、 $t_1 < t_2 < \dots < t_n$,

$P_n\{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_{n-1}) | x(t_n)\}$: 確率過程 $X(t)$ が時刻 $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ で $X(t_1)=x(t_1), X(t_2)=x(t_2), \dots, X(t_{n-1})=x(t_{n-1})$ となった時、時刻 t_n で $X(t_n)=x(t_n)$ となる条件付確率、

$P_2\{x(t_{n-1}) | x(t_n)\}$: 時刻 t_{n-1} で $X(t_{n-1})=x(t_{n-1})$ となった時、時刻 t_n で $X(t_n)=x(t_n)$ となる遷移確率。

(1) 式は確率過程 $X(t)$ において、時刻 t_n で $X(t_n)=x(t_n)$ となる確率は時刻 t_{n-2} 以前の $X(t)$ の値には関係なく、時刻 t_{n-1} での $X(t)$ の値のみに依存しているということをあらわしている。今、(1) 式における $P_2\{x(t_{n-1}) | x(t_n)\}$ のかわりに時刻 t で x という状態にあったものが時刻 s で y という状態になる遷移確率を $P(x, y; t, s)$ 、(但、 $t < s$) という形であらわすとマルコフ過程は次式であらわされる。

$$P(x, y; t, s) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x; z; t, u) \cdot P(z, y; u, s) dz \quad (\text{但、} t < u < s) \quad (2)$$

(2) 式を Smoluchowski の方程式という。

さらに、 $P(x, y; t, s)$ に適当な数学的なめらかさ (正則性)、すなわち、次の 3 つのことを仮定する。

(i) 任意の $\varepsilon > 0$ を与えた時、 $s - t \geq \varepsilon$ ならば s と y を定めると、 $P(x, y; t, s)$ は x に関して 3 回偏微分でき、かつこれらの偏微分係数は連続有界である。また、 s に関して有界連続な $\frac{\partial}{\partial s} P(x, y; t, s)$ が存在する。

$$(ii) \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} (z - x) P(x, z; t, t + \Delta) dz = A(t, x) \quad (3)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} (z - x)^2 P(x, z; t, t + \Delta) dz = B(t, x) \quad (4)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} |z - x|^3 P(x, z; t, t + \Delta) dz = 0 \quad (5)$$

が成立する。

(iii) $R(y)$ が閉区間 $[\alpha, \beta]$ の外では恒等的に 0 になるような負にならない関数で、しかも有界連続な導関数 $R'(y), R''(y)$ が存在する。

以上 3 つの仮定を利用して次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial s} P(x, y; t, s) \cdot R(y) dy &= \frac{\partial}{\partial s} \int_{\alpha}^{\beta} P(x, y; t, s) R(y) dy \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \{P(x, y; t, s + \Delta) - P(x, y; t, s)\} R(y) dy \end{aligned}$$

(2) 式を利用して

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} R(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} P(x, z; t, s) P(z, y; s, s + \Delta) dz - \int_{-\infty}^{\infty} P(x, y; t, s) R(y) dy \right\} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left[\int_{-\infty}^{\infty} P(x, z; t, s) \int_{-\infty}^{\infty} P(z, y; s, s + \Delta) \left\{ R(z) + R'(z)(y - z) + R''(z) \frac{(y - z)^2}{2!} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + R'''(\xi) \frac{(y - z)^3}{3!} \right\} dy dz - \int_{-\infty}^{\infty} P(x, z; t, s) R(z) dz \right] \end{aligned}$$

ここに、 $\xi = z + \theta(y - z)$, $0 < \theta < 1$ 。

さらに、(2) 式、および仮定 (ii), (iii) を用いて、

$$= \int_{\alpha}^{\beta} P(x, z; t, s) \{ R'(z) A(z, s) + R''(z) B(z, s) \} dz$$

部分積分を行い、 $R(\alpha) = R(\beta) = R'(\alpha) = R'(\beta) = 0$ を用いると、

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left[-\frac{\partial}{\partial z} \{ P(x, z; t, s) A(z, s) \} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{ P(x, z; t, s) B(z, s) \} \right] R(z) dz$$

すなわち、

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{\partial}{\partial s} P(x, y; t, s) + \frac{\partial}{\partial y} \{ A(y, s) P(x, y; t, s) \} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{ B(y, s) P(x, y; t, s) \} \right] R(y) dy = 0 \quad (6)$$

ところが、 $[\alpha, \beta]$ は任意、かつ $R(y)$ も仮定 (iii) を満足するということのほかは任意であるから、(6)

式の $[\]$ 内は 0 とならなければならず、次式に示す Kolmogorov の前向き微分方程式が導かれる。

$$\frac{\partial}{\partial s} P(x, y; t, s) = -\frac{\partial}{\partial y} [A(y, s) P(x, y; t, s)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [B(y, s) P(x, y; t, s)] \quad (7)$$

(7) 式は拡散理論に関連して、Fokker と Planck によって以前に得られており、Fokker-Planck の方程式ともいう。

つぎに (7) 式を利用して確率密度関数 $w(x, t)$ の時間的发展を定義することにする。

確率密度関数 $w(x, t)$ は次式を満足する。

$$w(x, t) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} w(x, t) dx = 1$$

よって、次式が導かれる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x, t) P(x, y; t, s) dx = w(y, s) \quad (8)$$

(8) 式を s について偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial s} w(y, s) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\int_{-\infty}^{\infty} w(x, t) P(x, y; t, s) dx \right) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, t) \frac{\partial}{\partial s} P(x, y; t, s) dx$$

(7) 式を利用して、

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} w(x, t) \left[-\frac{\partial}{\partial y} \{ A(y, s) P(x, y; t, s) \} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{ B(y, s) P(x, y; t, s) \} \right] dx \\ &= -\frac{\partial}{\partial y} [A(y, s) w(y, s)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [B(y, s) w(y, s)] \end{aligned}$$

すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial s} w(y, s) = -\frac{\partial}{\partial y} [A(y, s) w(y, s)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [B(y, s) w(y, s)] \quad (9)$$

よって、マルコフ過程は (7) 式、あるいは (9) 式によってあらわされる。

つぎにこれまでのマルコフ過程に関する議論を n 次元へ拡張することを考える。

n 次元空間の点 $\xi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ が確率運動を行っているとして、時刻 t に ξ であった点が時刻 s に点 $\eta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ に移る遷移確率は一次元の場合と同様に $P(\xi, \eta; t, s)$ と書くことができ、 n 次元の Kolmogorov の前向き微分方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial s} P(\xi, \eta; t, s) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} [A_i(\eta, s) P(\xi, \eta; t, s)] + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [B_{ij}(\eta, s) P(\xi, \eta; t, s)] \quad (10)$$

また n 次元マルコフ過程での確率密度関数 $w(\eta, s)$ の時間的发展は次式によって定義される。

$$\frac{\partial}{\partial s} w(\eta, s) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} [A_i(\eta, s) w(\eta, s)] + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [B_{ij}(\eta, s) w(\eta, s)] \quad (11)$$

ここに、

$$A_i(\eta, s) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (z_i - y_i) P(\eta, \zeta; s, s + \Delta) dz_1 dz_2 \dots dz_n \quad (12)$$

$$B_{ij}(\gamma, s) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{2d} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (z_i - y_i)(z_j - y_j) P(\gamma, \zeta; s, s+d) dz_1 dz_2 \cdots dz_n \quad (13)$$

$$\zeta = (z_1, z_2, \dots, z_n).$$

したがって、 n 次元マルコフ過程は (10) 式、あるいは (11) 式によってあらわされる。

3. マルコフ過程の粒状体への適用

3.1 従来の研究

マルコフ過程を粒状体の力学現象に適用した例としては Litwiniszyn^{(6), (7), (8)}, Goldstein ら⁽⁹⁾, Sweet^{(10), (11)}, Brahma⁽¹²⁾ などがある。ここでは Litwiniszyn と Brahma の研究について簡単な説明を行うことにする。

Litwiniszyn は Fig. 1 に示すような籠モデル (Cage System) を考え、砂層の沈下問題の解析を確率過程を用いて行っている。Fig. 1 において、点 (x, z) に間けきが生ずる確率を $P(x, z)$ とし、間けきが下の層の左右へ伝播する確率が等しいものと仮定すれば、次式が導かれる。

$$P(x, z+\rho) = \frac{1}{2} P(x-a, z) + \frac{1}{2} P(x+a, z) \quad (14)$$

(14) 式を変形し、 $a \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$ とすれば次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial z} P(x, z) = B \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, z) \quad (15)$$

ここに、

$$B = \lim_{a \rightarrow 0, \rho \rightarrow 0} \frac{a^2}{2\rho}.$$

(15) 式は (10) 式において、 $n=1$, $A_1=0$, $B_{11}=B$ とおいたものである。

Brahma は粒状体のクリープ変形過程にマルコフ過程を適用し、基礎方程式として次式を導いてきている。

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \beta_1 \frac{\partial F}{\partial X} + \beta_2 \frac{\partial F}{\partial Y} + D_1 \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + D_2 \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \quad (16)$$

ここに、 $F(X, Y, t)$: 時刻 t で位置 (X, Y) へくる確率、

β_1, β_2 : X 軸、 Y 軸方向の変位の分布関数の平均値に依存する量、

D_1, D_2 : X 軸、 Y 軸方向の変位の分布関数の分散に依存する量。

(16) 式は (10) 式において、 $n=2$, $A_1=\beta_1$, $A_2=\beta_2$, $B_{11}=D_1$, $B_{22}=D_2$ としたものである。

一方、(16) 式の粒状体への適用の妥当性を検討するため steel rod を用いた 2 次元のモデル実験を行い、種々の応力状態での steel rod の運動の写真撮影により各 steel rod の変位を測定している。そしてその結果を用いて変位の分布関数を求め、 $\beta_1, \beta_2, D_1, D_2$ を決め、これらの数値を (16) 式に代入して解いた計算曲線と実測値を比較し、クリープ変形過程をマルコフ過程とみなすことが妥当であることを示している。

以上、マルコフ過程を粒状体の変形過程に適用した例を 2 つ示したが、粒状体の力学的な挙動がマルコフ過程であると仮定することは、数学的には (10) 式、あるいは (11) 式を基礎方程式とすることを意味していることがわかる。したがって、マルコフ過程の粒状体への適用に際し、重要なことは (10) 式、あるいは (11) 式における確率変数として何を選ぶかということ、いいかえれば、粒状体の力学的な挙動に寄与しているものをみつけ、それらの定量的な評価を可能にすることである。

3.2 確率変数の選択

確率変数の数学的な定義は測度論を用いて行なわれているが、ここでは厳密な定義は省略し、偶然的にいろいろな値をとる変数と定義しておく。

マルコフ過程を用いた粒状体の力学モデルを確立するに際し、確率変数の選択はモデルの良否に大きな影

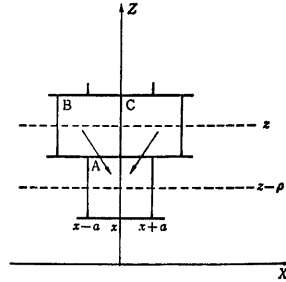


Fig. 1. Cage system.

響を及ぼすものであり、次のように考えている。

粒状体の変形過程に寄与するすべての変量を知ることができれば、それらの変量を用いて n 次元マルコフ過程の基礎方程式である (10) 式、あるいは (11) 式を解くことにより原則的にはマルコフ過程としての粒状体の変形過程は記述されるわけであるが、変形に寄与する変量を粒子レベルですべて列挙することは不可能であり、またいたずらに基礎方程式を複雑にするばかりなのでここでは粒子接点に着目し、変形に最も寄与していると考えられる粒子接点角を確率変数として採用することにする。いいかえれば、粒子の運動を接点角の変化におきかえているわけであり、その際、粒子自身は剛であり、粒子自身の変形や破砕はなく、ゆえに粒状体の変形は粒子配列の変化によってのみ生ずるものと仮定している。

Fig. 2 は粒状体内に存在する無数の粒子のうちの任意の隣接する 2 粒子をとりだしたものである。規準座標軸方向として 3 主応力方向をとり、粒子接平面の法線が規準座標軸となす角をそれぞれ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ としている。粒子接平面はこれらの角度のうちのいずれか 2 つによって規定されるので、 β_1, β_2 という 2 つの接点角を確率変数として採用することにする ($0 \leq \beta_1 \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \beta_2 \leq 2\pi$)。

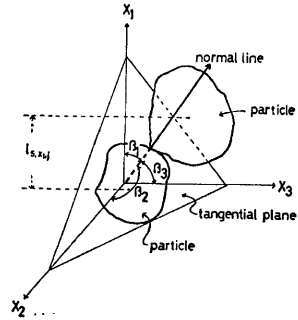


Fig. 2. Contact plane of two adjacent particles.

3.3 マルコフ過程の基礎方程式

3.2 で定義した接点角 β_1, β_2 は互いに独立であり、マルコフ過程の基礎方程式 (11) 式は次のように書き直される。

$$\frac{\partial}{\partial s} w(\eta, s) = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial \beta_i} [A_i(\eta, s) w(\eta, s)] + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta_i^2} [B_{ii}(\eta, s) w(\eta, s)] \quad (17)$$

$$A_i(\eta, s) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\beta_{i,s+\Delta} - \beta_{i,s}) P(\eta_s, \eta_{s+\Delta}) d\beta_1 d\beta_2 \quad (i=1, 2) \quad (18)$$

$$B_{ii}(\eta, s) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\beta_{i,s+\Delta} - \beta_{i,s})^2 P(\eta_s, \eta_{s+\Delta}) d\beta_1 d\beta_2 \quad (i=1, 2) \quad (19)$$

ここに、 $\eta = (\beta_1, \beta_2)$: 接点角,

$w(\eta, s)$: 接点角の分布をあらわす確率密度関数,

$P(\eta_s, \eta_{s+\Delta})$: 遷移確率.

ところで、(17) 式における s は本来時刻をあらわしているが、ここで議論しようとしている砂質土のような粒状体のせん断過程において、その力学的挙動は時間に依存しないと仮定でき、その場合には s として時刻をとることは不適当であり、以下の考察において s は応力状態をあらわす変数としている。すると $A_i(\eta, s)$, $B_{ii}(\eta, s)$ はそれぞれ (18) 式、(19) 式より応力状態が s から $s+\Delta$ に変化した時に生ずる接点角の変化量の平均と分散に相当し、ある応力状態 s で接点角が $\eta = (\beta_1, \beta_2)$ である接点における粒状体の力学特性をあらわす係数であることがわかる。これらの統計量の合理的な定量化が確率変数の選択とともにモデルの良否に大きな影響を及ぼすものと考えられる。ここではこれらの統計量を定量的に評価する一手法としてポテンシャル障壁と潜在すべり面の概念を用いることにする。

3.4 係数 $A_i(\eta, s)$, $B_{ii}(\eta, s)$ の決定法

(1) ポテンシャル障壁

Fig. 3 は粘弾性体の分子論的な説明によく用いられる概念図である¹³⁾。弾性体は Fig. 3(a) に示すようにポテンシャルの谷が深いので外作用を受けても分子はポテンシャル障壁を乗り越えることができず、弾性的な挙動を行う。粘性体は Fig. 3(b) に示すようにポテンシャル障壁が低く、容易に流動を生じる。粘弾性

体では Fig. 3(c) に示すように種々のポテンシャル障壁の大きさを有する山や谷が不規則に並んでおり、ある分子は弾性的な挙動を示し、またある分子は粘性的な挙動を示し、全体として粘弾性的な挙動をするという説明がなされている。このような考え方を粒状体内の各粒子接点での接点角の変化に適用することにする。すなわち、粒状体内の各粒子接点においてポテンシャル障壁が存在し、各接点における活性化エネルギーがポテンシャル障壁より大きくなれば不可逆な接点角の変化が生じ、活性化エネルギーがポテンシャル障壁よりも小さければ可逆な接点角の変化が生ずるものとするわけである。ところで、各接点におけるポテンシャル障壁の大きさは接点角が変化しようとする方向に依存し、Fig. 4 に示すような釣鐘をひずませた形をしているものと仮定している。

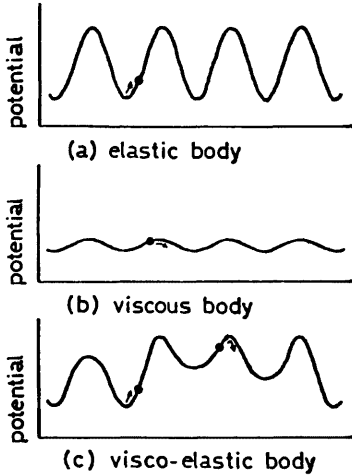


Fig. 3. Concept of potential wall.

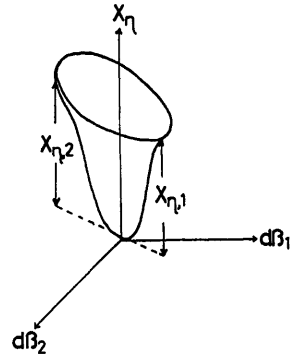


Fig. 4. Potential wall at the contact point of two adjacent particles.

このポテンシャル障壁の概念を用いて $A_i(\eta, s), B_{ii}(\eta, s)$ を決めるため、ある接点角を有する粒状体内の接点の中でポテンシャル障壁を越えることのできる接点数、越えることのできない接点数を求めることにする。

今、ある接点角 $\eta = (\beta_1, \beta_2)$ を有する粒状体内の接点において接点角は釣鐘形のポテンシャル障壁の大きさの最小の方か、最大の方向にだけ変化するものと仮定し、Fig. 4 に示すように接点角 η でのポテンシャル障壁の最小値を $x_{\eta,1}$ 、最大値を $x_{\eta,2}$ とする。さらに粒状体内の全接点数を N_c 、そのうち接点角 $\eta = (\beta_1, \beta_2)$ を有する接点数を n_η 、 n_η のうちポテンシャル障壁 $x_{\eta,1}$ を越える接点数を $n_{\eta,1}$ 、ポテンシャル障壁 $x_{\eta,2}$ を越える接点数を $n_{\eta,2}$ とし、またポテンシャル障壁を越えることができない接点数を $n_{\eta,0}$ とする。いいかえれば、接点角が η である接点のうちで不可逆な接点角の変化を生ずる接点数が $(n_{\eta,1} + n_{\eta,2})$ であり、可逆な変化を生ずる接点数が $n_{\eta,0}$ ということである。すると次式が成立する。

$$\sum_{\beta_1=0}^{\pi/2} \sum_{\beta_2=0}^{\pi/2} (n_{\eta,1} + n_{\eta,2} + n_{\eta,0}) = \sum_{\beta_1=0}^{\pi/2} \sum_{\beta_2=0}^{\pi/2} n_\eta = N_c \quad (20)$$

$$n_\eta = N_c \cdot w(\eta, s) d\beta_1 \cdot d\beta_2 \quad (21)$$

$$\sum_{\beta_1=0}^{\pi/2} \sum_{\beta_2=0}^{\pi/2} \left(n_{\eta,1} \cdot x_{\eta,1} + n_{\eta,2} \cdot x_{\eta,2} + n_{\eta,0} \cdot \frac{x_{\eta,1} + x_{\eta,2}}{2R_\eta} \right) = \Delta W \quad (22)$$

ここに、 ΔW : 外作用により粒状体になされた仕事、 R_η : 接点角が η であり、ポテンシャル障壁を越えることができない接点かどの程度までポテンシャルの山を登ることができるかをあらわす係数であり、(22) 式の左辺第 3 項はポテンシャル障壁を越えることができない接点でなされる仕事をあらわし、巨視的には弾

性成分と関連した項である。(22) 式はエネルギーのつり合い式であり、提案している力学モデルが熱力学の第 1 法則を満足していることを示している。

次に以後の考察を簡単にするため、ポテンシャル障壁の最小値と最大値の比 $x_{\eta,1}/x_{\eta,2}$ を $R_{p,\eta}$ 、またそれらのポテンシャル障壁を越える接点数の比 $n_{\eta,2}/n_{\eta,1}$ を $R_{n,\eta}$ とする。

すなわち、

$$x_{\eta,1}/x_{\eta,2}=R_{p,\eta} \quad (23) \quad n_{\eta,2}/n_{\eta,1}=R_{n,\eta} \quad (24)$$

さらに粒状体内の全接点数のうち最小のポテンシャル障壁を越える接点の総数を $N_{c,1}$ とし、 $N_{c,1}$ の分布が粒状体の全接点数 N_c の分布と等しいものと仮定すれば次式が成立する。

$$n_{\eta,1}=N_{c,1} \cdot w(\eta, s) d\beta_1 \cdot d\beta_2 \quad (25)$$

(20), (22), (23), (24), (25) 式を連立して $N_{c,1}$ について解くと次のようになる(付録参照)。

$$N_{c,1} = \frac{\Delta W - \sum_{\beta_1=0}^{\pi/2} \sum_{\beta_2=0}^{2\pi} \left(\frac{R_{p,\eta}+1}{2R_{p,\eta} \cdot R_{p,\eta}} \cdot x_{\eta,1} \cdot n_{\eta} \right)}{\sum_{\beta_1=0}^{\pi/2} \sum_{\beta_2=0}^{2\pi} \left[x_{\eta,1} w(\eta, s) d\beta_1 \cdot d\beta_2 \left\{ \left(1 + \frac{R_{n,\eta}}{R_{p,\eta}} \right) - \left(1 + \frac{1}{R_{p,\eta}} \right) (1 + R_{n,\eta}) / 2R_{p,\eta} \right\} \right]} \quad (26)$$

(26) 式の右辺には粒状体の力学的な特性をあらわしている $x_{\eta,1}$, $R_{p,\eta}$, $R_{n,\eta}$ などが含まれており、これらの諸量が既知になれば (25) 式を用いて $n_{\eta,1}$ が求まり、(24) 式を利用して $n_{\eta,2}$ が、また (21) 式を用いて $n_{\eta,0}$ が求まる。

$x_{\eta,1}$, $R_{p,\eta}$, $R_{n,\eta}$ の物理的な意味、および具体的な決定法については後述することにする。

(2) 潜在すべり面

比較的に密な状態である粒状体のせん断過程においてせん断応力がピーク強度から残留強度へ移行する付近ですべり面が発生することはよく知られている。このすべり面はせん断開始時から粒状体内の無数の粒子接点でランダムな方向に生じている局所的なすべり面がピーク強度付近へくるとある一定方向へ収束し、人間の眼で確認できるようになったものと考えられる。ここで述べようとしている潜在すべり面とは人間の眼で確認できるすべり面があらわれるまでの粒状体内に存在する無数の局所的なすべり面を代表する面のことであり、最終的には人間の眼で確認できるすべり面と一致するものである。

砂質土のように形状、大きさが不規則で、しかも隣接する粒子に拘束された粒子の集合体では粒子の運動を一意的に決めることは不可能であり、局所的なすべり面と潜在すべり面の関係についても確率的に考える必要がある。すなわち、粒状体内の任意の接点における局所的なすべり面は本来ならば潜在すべり面と一致するはずであるが、周囲の粒子の拘束のため 2 つのすべり面は一致せず、局所的なすべり面が潜在すべり面に一致するように確率的な運動をするものと考えられる。ここにいう「確率的な運動」とは個々の局所的なすべり面はランダムな方向に向かって運動しているが、粒状体全体としては潜在すべり面へ近づこうとする確率がその逆の方向へ運動しようとする確率よりも大きいということであり、いかえれば局所的なすべり面は潜在すべり面へ「指向する」ということである。このことは粒状体内の各接点でのポテンシャル障壁の大きさは潜在すべり面へ向おうとする方向が最小であり、潜在すべり面へ向う方向とは逆の方向が最大であるということと対応している。すなわち、Fig. 4 に示した $x_{\eta,1}$, $x_{\eta,2}$ はそれぞれ接点角が η である接点での潜在すべり面へ向う方向と逆の方向のポテンシャル障壁の大きさである。

このような潜在すべり面についてはすでに村山^{(14), (15), (16)}、松岡ら⁽¹⁷⁾、佐武⁽¹⁸⁾ が考察を行っている。村山は Mohr-Coulomb の破壊規準を破壊時だけでなく、それ以前のせん断過程にも適用し、せん断応力 τ とせん断垂直応力 σ の比が最大になる面である $(\tau/\sigma)_{max}$ -面 (Plane of Maximum Mobilization) に着目している。そして $(\tau/\sigma)_{max}$ -面はせん断応力による粒子の相対移動が最も活発化する面であるという解釈を行っている。松岡らは村山の提案している $(\tau/\sigma)_{max}$ -面を 3 次元一般応力状態でのものに拡張した Spatial Mobilized Plane (略して SMP) を提案している。そして SMP は 3 主応力空間において平均的に粒子が最

も滑動する合成面であるという物理的な意味を SMP に与えている。また von-Mises の破壊規準をせん断過程に適用するということは八面体応力比の最大となる面である $(\tau_{oct}/\sigma_{oct})_{max}$ -面に着目することを意味し、佐武はこの面に対して次のような物理的な意味を与えている。すなわち、 $(\tau_{oct}/\sigma_{oct})_{max}$ -面に着目することは材料において局所的なすべりがあらゆる方向に均等に起りうるものとする時、主軸座標による 1 つの象限についての平均的なすべり面は正八面体の一面であるということの意味をしているとしている。ここではこれらの潜在すべり面のうち松岡らが提案している SMP を潜在すべり面として採用することにする。

(1), (2) ではポテンシャル障壁および潜在すべり面の概念について述べてきたわけであるが、さらに接点角の変化量 δ が既知になれば (18), (19) 式で定義された $A_i(\eta, s)$, $B_{ii}(\eta, s)$ は次のようになる。

$$A_i(\eta, s) = \frac{1}{n_q} (n_{q,1} \cdot \bar{\delta}_{q,1,i} + n_{q,2} \cdot \bar{\delta}_{q,2,i} + n_{q,0} \cdot \bar{\delta}_{q,0,i}) \quad (i=1, 2) \quad (27)$$

$$B_{ii}(\eta, s) = \frac{1}{n_q} (n_{q,1} \cdot \bar{\delta}_{q,1,i}^2 + n_{q,2} \cdot \bar{\delta}_{q,2,i}^2 + n_{q,0} \cdot \bar{\delta}_{q,0,i}^2) \quad (i=1, 2) \quad (28)$$

ここに、 $\bar{\delta}_{q,k,i}$, $\bar{\delta}_{q,k,i}^2$ ($k=1, 2$): ポテンシャル障壁 $x_{q,k}$ を越える接点における接点角の変化量 $\delta_{q,k,i}$ の平均と 2 乗平均、

$\bar{\delta}_{q,0,i}$, $\bar{\delta}_{q,0,i}^2$: ポテンシャル障壁を越えることができない接点における接点角の変化量 $\delta_{q,0,i}$ の平均と 2 乗平均。

以上、マルコフ過程の基礎方程式 (17) 式に含まれる係数 $A_i(\eta, s)$, $B_{ii}(\eta, s)$ を求める手法を述べてきたが、これらの係数がわかれば、(17) 式を解くことにより各応力状態での接点角の分布をあらわす確率密度関数 $w(\eta, s)$ が求まり、それを用いてひずみを定義することができるが、そのことに関しては 4 章で考察を行うことにし、ここでは (20) 式中の N_e , (26) 式中の $x_{q,1}$, R_q , $R_{p,q}$, $R_{n,q}$, および (27), (28) 式に含まれる $\bar{\delta}_{q,k,i}$, $\bar{\delta}_{q,k,i}^2$ ($i=1, 2, k=0, 1, 2$) について考えることにする。

(3) N_e について

N_e は粒状体内に存する接点の総数であり、次に示す関係を用いて求めることにする。

$$N_e = \frac{C_a}{2} \cdot N_p \quad (29) \quad N_p = \frac{V}{1+e} \cdot \frac{1}{\bar{v}} \quad (30)$$

ここに、 C_a : 粒子 1 個当りの平均接点数、 N_p : 粒状体内の全粒子数、 V : 粒状体の体積、 e : 粒状体の間げき比、 $\bar{v}$: 粒子 1 個当りの平均体積。

(30) 式を (29) 式に代入すると N_e は C_a , V , e , $\bar{v}$ を用いて次のようにあらわされる。

$$N_e = \frac{C_a}{2} \cdot \frac{V}{1+e} \cdot \frac{1}{\bar{v}} \quad (31)$$

ところで、変形過程における粒子 1 個当りの接点数に関する実験的研究が Field⁽¹⁹⁾、小田⁽²⁰⁾ によりなされている。彼等の実験結果によれば、粒子 1 個当りの平均接点数は間げき比と密接な関係があり、Field は次式に示される実験式を提案している。

$$C_a = \frac{12}{1+e} \quad (32)$$

提案しているモデルにおいても C_a の計算に際し、(32) 式を用いている。

(4) $x_{q,1}$ について

$x_{q,1}$ は (1) で定義したように接点角が η である接点におけるポテンシャル障壁の最小値である。ポテンシャルはエネルギーと同じく [力] × [長さ] の次元をもつ物理量であり、したがって、 $x_{q,1}$ を求めるには各接点において接点角を変化させようとする力 T と接点角の変化量 δ が既知とならなければならない。ここでは、まず接点での粒子間力 F と粒子間の物理マサツ係数 μ を用いることにより $|T|$ を求め、次に接点角の変化量より長さを求め、ポテンシャル $x_{q,1}$ を既知量とする方法を述べることにする。

Fig. 5 はある接点における接平面と粒子間力 F の関係を示している。接平面の法線と粒子間力とのなす角を θ とし、 $|T|$ は次式であらわされると仮定している。

$$0 \leq \theta \leq \tan^{-1} \mu \text{ のとき, } |T| = \mu |F| \cdot \cos \theta \quad (33)$$

$\tan^{-1}\mu \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき,

$$|T| = |F| \cdot \sin \theta \quad (34)$$

ここに, $\cos \theta = \cos \beta_1 \frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}} + \cos \beta_2$

$$\frac{\sigma_3}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}} + \cos \beta_3 \frac{\sigma_3}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}}.$$

ところで, 変形過程の各段階で粒子間力 F を粒状体内の各接点で実測することは非常に困難であり, したがって既知な外力より統計的な手法を用いて推定する方法が考えられる。このような手法を用いた粒子間力に関する研究は Marsal^[21], 小田^[22], 小西^[23] などによりなされているが, まだ実際の粒状体の粒子間力を算定する手法としては十分でないようにおもわれるので, ここでは最も単純な平均化を行って次のように求めることにする。

$|F|$ = (単位面積当りの平均的な合力) / (単位面積当りの接点数)

$$= \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}}{\left\{ \frac{N_c}{(h/\bar{D})} \cdot \frac{1}{A} \right\}} = A \cdot \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \cdot \frac{h}{N_c \cdot \bar{D}} \quad (35)$$

ここに, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: 主応力, N_c : 粒状体内の全接点数, A : 粒状体の断面積, h : 粒状体の高さ, $\bar{D}$: 粒子の平均粒径。

次に接点角の変化量 δ について考えることにする。

接点角が $\eta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ より $\eta' = (\beta_1', \beta_2', \beta_3')$ に変化した場合に接点角の変化量 δ_η は次式で求められる。

$$\delta_\eta = \cos^{-1} (\cos \beta_1 \cos \beta_1' + \cos \beta_2 \cos \beta_2' + \cos \beta_3 \cos \beta_3') \quad (36)$$

ゆえに δ_η の平均値 $\bar{\delta}_\eta$ は次のようになる。

$$\bar{\delta}_\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \cos^{-1} (\cos \beta_1 \cos \beta_1' + \cos \beta_2 \cos \beta_2' + \cos \beta_3 \cos \beta_3') P(\eta, \eta') d\eta' \quad (37)$$

ここに, $P(\eta, \eta')$: 接点角が η から η' に変化する遷移確率。

(33), (34), (35), (37) 式を用いて $x_{\eta,1}$ は次のように求められる。

$0 \leq \theta \leq \tan^{-1}\mu$ のとき,

$$x_{\eta,1} = |T| \cdot \bar{\delta}_\eta \cdot \bar{D} / 2 = \mu \cdot A \cdot \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \cdot \frac{h}{2N_c} \cdot \cos \theta \cdot \bar{\delta}_\eta \quad (38)$$

$\tan^{-1}\mu \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき,

$$x_{\eta,1} = |T| \cdot \bar{\delta}_\eta \cdot \bar{D} / 2 = A \cdot \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \cdot \frac{h}{2N_c} \cdot \sin \theta \cdot \bar{\delta}_\eta \quad (39)$$

ところで, 種々の材料を用いた2粒子間の物理マサツ係数 μ に関する研究は Horn ら^[24], Proctor ら^[25], Nacimento^[26] などによりなされているが, 同一材料においても表面のなめらかさや湿りの程度, すべりの速さなど種々の要因により大きく変化し, Proctor らは粒状体のマサツ機構を2粒子のマサツ則にもとづいて解明していく手法に対して悲観的な結論を行っている。一方, 松岡ら^[17] は前述の SMP 上での垂直ひずみ増分 $d\varepsilon_N$ が0になる時のせん断・垂直応力比 τ/σ_N が同一材料ではほぼ一定になることを示し, それを粒状体に固有な粒子間マサツ係数とみなしている。筆者が提案しているモデルにおいても数値計算に際し, (38) 式中出现してくるマサツ係数 μ として $d\varepsilon_N$ が0となる時の応力比 τ/σ_N を用いている。

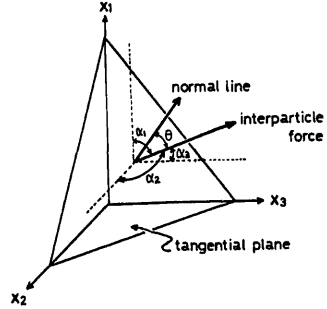


Fig. 5. Relation between the tangential plane and interparticle force at a contact point.

(5) R_η について

R_η は (22) 式の説明の際にも述べたようにポテンシャル障壁を越えることができない接点においてなされた仕事の割合をあらわす係数であり、巨視的には弾性状態と関連している。ここにいう弾性状態とは粒状体を構成している粒子の運動が可逆的である状態を意味している。ゆえに弾性状態では (22) 式中のポテンシャル障壁を越える接点数 $n_{\eta,1}, n_{\eta,2}$ は 0 となり、 $n_{\eta,0} = n_\eta$ となるので、(22) 式は次のようになる。

$$\sum_{\beta_1=0}^{\pi/2} \sum_{\beta_2=0}^{2\pi} \{n_\eta(x_{\eta,1} + x_{\eta,2}) / 2R_\eta\} = \Delta W_e$$

ここに、 ΔW_e : 粒状体になされた仕事のうちの可逆的な粒子の運動に寄与した仕事。

R_η が η に依存しない係数であると仮定すれば、上式は次のようになる。

$$R_\eta = \frac{\sum_{\beta_1=0}^{\pi/2} \sum_{\beta_2=0}^{2\pi} \{n_\eta(x_{\eta,1} + x_{\eta,2})\}}{2 \cdot \Delta W_e} \quad (40)$$

(6) $R_{p,\eta}, R_{n,\eta}$ について

$R_{p,\eta}$ は (23) 式で定義したようにポテンシャル障害の最小値と最大値の比であり、Fig. 2 を参照しながら次のように考えている。考察を簡単にするため、接点角 β_2 の範囲を $0 \leq \beta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ に限定すると、 β_1, β_2 のいずれか一方が 0 または $\pi/2$ である接点では各方向へ接点角が変化する確率は等しく、ポテンシャル障壁の高さはすべて等しいものと仮定できる。したがって $R_{p,\eta}$ は 1 となる。次に潜在すべり面である SMP と平行な接平面を有する接点では接点角の変化方向はすべて SMP の変化方向に等しいものと考えられる。

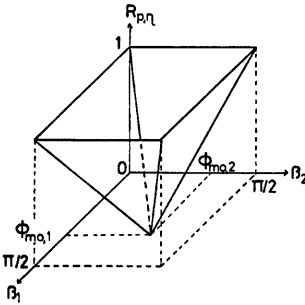


Fig. 6. Relation between $R_{p,\eta}$ and η .

いいかえれば、SMP と平行な接平面をもつ接点ではすべてある一定の方向へ接点角が変化するということである。この場合にはポテンシャル障壁の最大値 $x_{\eta,2}$ は無限大になっていると考えられるので、 $R_{p,\eta}$ は 0 と仮定できる。このようにある特定の接点角において 0 と 1 をとる接点角 η の関数である $R_{p,\eta}$ の最も単純な形はそれらの特定な接点角での $R_{p,\eta}$ を平面で関連づけたものであり、そうした時の $R_{p,\eta}$ と η の関係が Fig. 6 に示してある。 β_2 の他の範囲についても同様の考え方が適用できる。数値計算に際しては $R_{p,\eta}$ として Fig. 6 に示した関数を用いている。

ポテンシャル障壁を越える接点数はポテンシャル障壁の大きさに比例するものと考えられるので (24) 式で定義した $R_{n,\eta}$ は $R_{p,\eta}$ に比例するものと仮定できる。すなわち、 β_1, β_2 のいずれかが 0 または

$\pi/2$ の場合にはポテンシャル障壁の大きさが等しく、ポテンシャル障壁を越える接点数はどの方向へ向うものも等しく、 $R_{n,\eta}$ は 1 となる。また、SMP と平行な接平面を有する接点では $n_{\eta,2}$ が 0 となるので、 $R_{n,\eta}$ も 0 となると仮定できる。数値計算に際しては、 $R_{n,\eta}$ は $R_{p,\eta}$ と等しい関数、すなわち、Fig. 6 に示した関数を用いている。

(7) $\bar{\delta}_{\eta,k,i}, \bar{\delta}_{\eta,k,i}^2$ ($i=1, 2, k=0, 1, 2$) について

(27), (28) 式で用いられている $\bar{\delta}_{\eta,k,i}, \bar{\delta}_{\eta,k,i}^2$ は接点角が η である接点において応力状態の変化に伴って生ずる接点角の変化量の平均と 2 乗平均であり、次のようにして求めている。

SMP のせん断・垂直応力比 τ/σ_N が変化するせん断過程においては SMP は変化するわけであるが、接点角の変化量 δ の分布をあらわす確率密度関数の平均の絶対値と標準偏差が接点角 η に独立であり、SMP の変化量に等しい正規分布であると仮定している。そして (2) で述べた接点角の変化は潜在すべり面へ指

向するという概念を用いると、 $\bar{\delta}_{\gamma, k, i}$, $\bar{\delta}_{\gamma, k, i}^2$ は次のようになる。

$0 \leq \beta_i \leq \phi_{m0, i}$ のとき, ($i=1, 2$)

$$\bar{\delta}_{\gamma, 0, i} = \int_{\delta_{2, i}}^{\delta_{1, i}} \delta f_{\gamma, i}(\delta) d\delta \quad (41)$$

$$\bar{\delta}_{\gamma, 0, i}^2 = \int_{\delta_{2, i}}^{\delta_{1, i}} \delta^2 f_{\gamma, i}(\delta) d\delta \quad (42)$$

$$\bar{\delta}_{\gamma, 1, i} = \int_{\delta_{1, i}}^{\infty} \delta f_{\gamma, i}(\delta) d\delta \quad (43)$$

$$\bar{\delta}_{\gamma, 1, i}^2 = \int_{\delta_{1, i}}^{\infty} \delta^2 f_{\gamma, i}(\delta) d\delta \quad (44)$$

$$\bar{\delta}_{\gamma, 2, i} = \int_{-\infty}^{\delta_{2, i}} \delta f_{\gamma, i}(\delta) d\delta \quad (45)$$

$$\bar{\delta}_{\gamma, 2, i}^2 = \int_{-\infty}^{\delta_{2, i}} \delta^2 f_{\gamma, i}(\delta) d\delta \quad (46)$$

$$\text{ここに, } f_{\gamma, i}(\delta) = \frac{1}{\Delta\phi_{m0, i}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\delta - \Delta\phi_{m0, i})^2}{2(\Delta\phi_{m0, i})^2}\right\} \quad (47)$$

$\phi_{m0, i}$: SMP の法線が Fig. 2 に示した規準座標軸 x_i となす角,

$\Delta\phi_{m0, i}$: SMP の変化に伴う $\phi_{m0, i}$ の変化量,

$\delta_{1, i}$, $\delta_{2, i}$: ポテンシャル辺壁の最小値と最大値を越える接点における接点角 β_i の変化量の最小値であり, 数値計算に際しては $\delta_{1, i} = \frac{3}{2}\Delta\phi_{m0, i}$, $\delta_{2, i} = \frac{1}{2}\Delta\phi_{m0, i}$ を用いている。

$\phi_{m0, i} < \beta_i \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, ($i=1, 2$)

$$\bar{\delta}_{\gamma, 0, i} = \int_{\delta_{1, i}}^{\delta_{2, i}} \delta f_{\gamma, i}(\delta) d\delta \quad (48)$$

$$\bar{\delta}_{\gamma, 0, i}^2 = \int_{\delta_{1, i}}^{\delta_{2, i}} \delta^2 f_{\gamma, i}(\delta) d\delta \quad (49)$$

$$\bar{\delta}_{\gamma, 1, i} = \int_{\delta_{1, i}}^{\infty} \delta f_{\gamma, i}(\delta) d\delta \quad (50)$$

$$\bar{\delta}_{\gamma, 1, i}^2 = \int_{\delta_{1, i}}^{\infty} \delta^2 f_{\gamma, i}(\delta) d\delta \quad (51)$$

$$\bar{\delta}_{\gamma, 2, i} = \int_{-\infty}^{\delta_{2, i}} \delta f_{\gamma, i}(\delta) d\delta \quad (52)$$

$$\bar{\delta}_{\gamma, 2, i}^2 = \int_{-\infty}^{\delta_{2, i}} \delta^2 f_{\gamma, i}(\delta) d\delta \quad (53)$$

$$\text{ここに, } f_{\gamma, i}(\delta) = \frac{1}{\Delta\phi_{m0, i}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\delta + \Delta\phi_{m0, i})^2}{2(\Delta\phi_{m0, i})^2}\right\} \quad (54)$$

$$\delta_{1, i} = -\frac{3}{2}\Delta\phi_{m0, i}, \quad \delta_{2, i} = -\frac{1}{2}\Delta\phi_{m0, i}.$$

また (37) 式で定義した $\bar{\delta}_{\gamma}$ はここでの議論より $\Delta\phi_{m0}$ に等しくなり次式のようになる。

$$\bar{\delta}_{\gamma} = \Delta\phi_{m0} = \cos^{-1} \{ \cos \phi_{m0, 1} \cdot \cos(\phi_{m0, 1} + \Delta\phi_{m0, 1}) + \cos \phi_{m0, 2} \cdot \cos(\phi_{m0, 2} + \Delta\phi_{m0, 2}) + \cos \phi_{m0, 3} \cdot \cos(\phi_{m0, 3} + \Delta\phi_{m0, 3}) \} \quad (55)$$

以上, (3) から (7) においてマルコフ過程の基礎方程式に含まれる $A_i(\gamma, s)$, $B_{ii}(\gamma, s)$ を決定するために導入された粒状体の力学的な物性を表現している諸量の物理的意味を考え, 具体的に求めていく手法を述べてきたわけであるが, これらの諸量を実際の粒状体を用いて直接実測し, 定量的な検討を加えていくことは非常に困難であり, 筆者は提案している力学モデルを用いた数値実験結果が実際の粒状体を用いた種々の応力状態での力学的挙動をより統一的に表現できるようにすることにより間接的に (3) から (7) で述べた諸量について検討を加えていく立場をとることとする。

4. 粒状体におけるひずみの定義²⁷⁾

粒状体のひずみを粒状体を構成している粒子の運動をもとに定義しようとする研究が Horn^{28), 29)} 村山^{14), 15)}, 松岡³⁰⁾, 小田²²⁾ などによりなされている。これらの研究をみればひずみという巨視的な物理量を粒子の運動をもとに誘導するには2粒子間の相対的な運動をなんらかの形で平均化することにより求めていく方法が有用であることがわかる。筆者もこの手法を用いて粒状体のひずみを定義することとする。

考察の基礎となる図が Figs. 2, 7 に示してある。

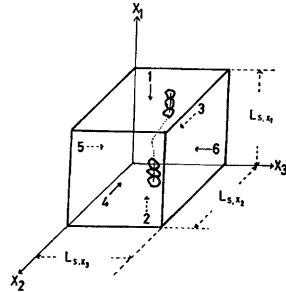


Fig. 7. Element of a granular material.

Fig. 7 はある応力状態 s での粒状体内の単位要素と基準座標をあらわしている (ここに単位要素とは粒子径に比し一辺が非常に大きな直方体を意味する)。応力状態 s での単位要素の x_i 軸方向の長さを $L_{s,x}$ とし, また単位要素の 6 つの面を順に 1, 2, ..., 6 と名づける。Fig. 7 に示すように, 例えば平面 1 から平面 2 へ向う任意の経路を描くことができる。この経路に含まれる任意の隣接する 2 粒子をとり出したものが Fig. 2 に示されている。応力状態が $s - \Delta s$ から s に変化し, 粒状体の単位要素の x_i 軸方向の長さが $L_{s-\Delta s, x_i}$ から L_{s, x_i} に変化したとすれば, x_i 軸方向のひずみ ε_{s, x_i} は次のように定義される。

$$\varepsilon_{s, x_i} = \frac{L_{s, x_i} - L_{s-\Delta s, x_i}}{L_{s-\Delta s, x_i}} \quad (i=1, 2, 3) \quad (56)$$

応力状態 s での単位要素の相対する 2 面を結ぶ任意の経路における全粒子数を N_{s, x_i} , また Fig. 2 に示すように隣接する 2 粒子の中心距離の x_i 軸方向へ投影された距離を $l_{s, x_i, j}$ とすれば, L_{s, x_i} が $l_{s, x_i, j}$ に比べて, 非常に大きいので, 近似的に次式が成り立つ。

$$L_{s, x_i} = \sum_{j=1}^{N_{s, x_i}} l_{s, x_i, j} \quad (i=1, 2, 3) \quad (57)$$

(57) 式を (56) 式に代入すると,

$$\varepsilon_{s, x_i} = \frac{\sum_{j=1}^{N_{s, x_i}} l_{s, x_i, j} - \sum_{j=1}^{N_{s-\Delta s, x_i}} l_{s-\Delta s, x_i, j}}{\sum_{j=1}^{N_{s-\Delta s, x_i}} l_{s-\Delta s, x_i, j}}$$

上式の右辺の分母を $N_{s-\Delta s, x_i}$ で割ると,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{s, x_i} &= \frac{\frac{1}{N_{s-\Delta s, x_i}} \sum_{j=1}^{N_{s, x_i}} l_{s, x_i, j} - \frac{1}{N_{s-\Delta s, x_i}} \sum_{j=1}^{N_{s-\Delta s, x_i}} l_{s-\Delta s, x_i, j}}{\frac{1}{N_{s-\Delta s, x_i}} \sum_{j=1}^{N_{s-\Delta s, x_i}} l_{s-\Delta s, x_i, j}} \\ &= \frac{N_{s, x_i} / N_{s-\Delta s, x_i} E[l_{s, x_i, j}] - E[l_{s-\Delta s, x_i, j}]}{E[l_{s-\Delta s, x_i, j}]} \end{aligned} \quad (58)$$

ここに, $E[l_{s, x_i, j}]$: 応力状態 s での単位要素の相対する 2 面を結ぶ経路における隣接する 2 粒子の中心間距離の x_i 軸方向へ投影された長さの平均値。

Fig. 7 に示されたような単位要素の相対する 2 面を結ぶ経路は無数に描くことができるわけであるが, x_i 軸方向に関して粒子構造が確率的に一様であるとすればどのような経路をとっても $E[l_{s, x_i, j}]$ は固有な値をとるものと考えられ, 次式が成立する。

$$E[l_{s, x_i, j}] = M[l_{s, x_i, j}] \quad (59)$$

ここに, $M[l_{s, x_i, j}]$: 応力状態 s での単位要素中のすべての隣接する 2 粒子の中心間距離の x_i 軸方向へ投影された長さの平均値。

接点角分布をあらわす $w(\eta, s)$ と粒度分布をあらわす確率密度関数 $g(D)$ を用いて $M[l_{s, x_i, j}]$ は次のように導かれる。

$$\begin{aligned} M[l_{s, x_i, j}] &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} D \cos \beta_i g(D) w(\eta, s) d\beta_1 \cdot d\beta_2 \cdot dD \\ &= \int_0^\infty D g(D) dD \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \beta_i w(\eta, s) d\beta_1 \cdot d\beta_2 \\ &= \bar{D} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \beta_i w(\eta, s) d\beta_1 \cdot d\beta_2 \end{aligned} \quad (60)$$

(59), (60) 式を (58) 式に代入すると次のようになる。

$$\varepsilon_{s, x_i} = \frac{N_{s, x_i} / N_{s-\Delta s, x_i} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \beta_i w(\eta, s) d\beta_1 \cdot d\beta_2 - \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \beta_i w(\eta, s-\Delta s) d\beta_1 \cdot d\beta_2}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \beta_i w(\eta, s-\Delta s) d\beta_1 \cdot d\beta_2} \quad (i=1, 2, 3) \quad (61)$$

(61) 式は応力状態が $s-ds$ から s に変化するにより生ずる x_i 軸方向のひずみ ε_{s, x_i} は各応力状態での接点角の分布をあらわす確率密度関数と任意の径路における粒子数の比 $N_{s, x_i}/N_{s-ds, x_i}$ によって表現できるということを意味している。 $N_{s, x_i}/N_{s-ds, x_i}$ は応力状態が $s-ds$ から s に変化するにより径路に含まれる粒子数が変化する割合をあらわしており、このような粒子数の変化は粒子接点での不連続な運動、すなわち、径路の中の粒子が間げきに落ちこんだり ($N_{s, x_i}/N_{s-ds, x_i} < 1$)、径路に新しい粒子が割りこんだり ($N_{s, x_i}/N_{s-ds, x_i} > 1$) することにより生ずるものと考えられる (大槌³¹⁾ はすでにこのような粒子接点での不連続な運動を評価するために分離接点、形成接点というものを提案している)。このような粒状体の粒子の不連続な運動は結晶固体における塑性変形の微視的な考察よりみいだされた転位現象と似ており、粒状体の間げきは結晶固体における欠陥格子に対応するものと考えられる。

$N_{s, x_i}/N_{s-ds, x_i}$ の定量的評価法に関する考察を次に行うことにする。

落ちこみ、割りこみという粒子の不連続な運動はポテンシャル障壁を越える接点 ($n_{v,1}+n_{v,2}$) のうちのいくらかにおいて生ずるものと考え、接点角 η を有する接点のうち ($n_{v,1}+n_{v,2}$) $_d$ の接点において落ちこみが生ずるものとし、それらの比 ($n_{v,1}+n_{v,2}$) $_d/(n_{v,1}+n_{v,2})$ を P_d とする。そして、接平面が水平 ($\beta_1=0$) の接点においては落ちこみは生じず、接平面が鉛直 ($\beta_1=\pi/2$) である接点ではすべての接点で落ちこみが生ずるものと仮定する。すると、このような関係を有する接点角の関数として次式が仮定できる。

$$P_d(\beta_1) = \frac{(n_{v,1}+n_{v,2})_d}{n_{v,1}+n_{v,2}} = \left(\frac{2}{\pi}\beta_1\right)^\lambda \quad (62)$$

ここに、 λ : 応力状態、粒子構造に依存する係数。

(21) 式と (62) 式を利用すると、 $N_{s, x_i}/N_{s-ds, x_i}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} N_{s, x_i}/N_{s-ds, x_i} &= 1 - \frac{N_{s, x_i} - N_{s-ds, x_i}}{N_{s-ds, x_i}} \\ &= 1 - \frac{\sum_{\beta_1=0}^{\pi/2} \sum_{\beta_2=0}^{2\pi} \{(n_{v,1}+n_{v,2})_d\}}{\sum_{\beta_1=0}^{\pi/2} \sum_{\beta_2=0}^{2\pi} n_v} = 1 - \frac{1}{N_c} \sum_{\beta_1=0}^{\pi/2} \sum_{\beta_2=0}^{2\pi} \{P_d(\beta_1) \cdot (n_{v,1}+n_{v,2})\} \end{aligned} \quad (63)$$

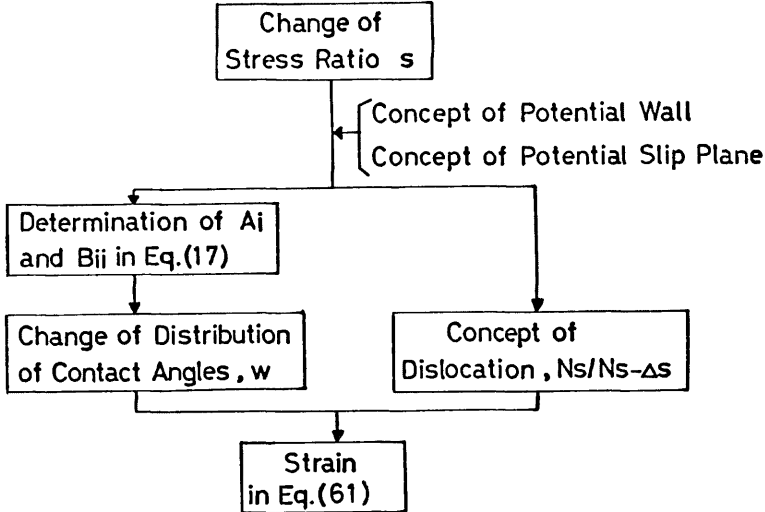


Fig. 8. Flow chart of the proposed model.

割りこみについては落ちこみを生じた接点のうちのいくらかが径路に割りこむものと考え、その比を κ とすれば次式ようになる。

$$N_{s, x_i} / N_{s-ds, x_i} = 1 + \frac{1}{N_c} \sum_{\beta_1=0}^{2\pi} \sum_{\beta_2=0}^{2\pi} \{\kappa P_d(\beta_1) \cdot n_{\beta_1}\} \quad (64)$$

ここに、 κ : 応力状態、粒子構造に依存する係数。

以上、3 章、4 章では筆者が提案してきている粒状体の力学モデルについて説明を行ってきたわけであるが、モデルの骨子をフローチャートにしたものが Fig. 8 に示されている。すなわち、応力状態の変化により粒状体になされた仕事がわかれば 3.4 節で述べたポテンシャル障壁と潜在すべり面の概念を用いてマルコフ過程の基礎方程式である (17) 式の係数 $A_i(\gamma, s)$, $B_{it}(\gamma, s)$ が求まり、(17) 式を解くことにより粒状体内の接点角の分布の変化がわかる。

一方、結晶固体の転位現象に対応する粒子の不連続な運動を評価する $N_{s, x_i} / N_{s-ds, x_i}$ が (63) 式、(64) 式より求まり、 $N_{s, x_i} / N_{s-ds, x_i}$ と接点角の分布をあらわす $w(\gamma, s)$ を (61) 式に代入することによりひずみが導かれることを示している。

次章で述べる数値実験はこのフローチャートに従って行なわれている。

5. 数 値 実 験

マルコフ過程の基礎方程式、(17) 式は非線形放物型偏微分方程式であり、解析的に解くことは困難である。ゆえにここでは差分近似を用いた数値解を求めていくことにする。差分近似法としては陽解法を用いおり、基礎方程式の各項は前進差分近似されている。

以下において計算に必要な諸量についての説明と、数値計算結果について述べることにする。

(1) ΔW , ΔW_e について

(26) 式に含まれる ΔW は粒状体の変形過程において外作用により粒状体になされた仕事増分をあらわしており、次式で求められる。

$$\Delta W = \sigma_1 \cdot d\varepsilon_1 + \sigma_2 \cdot d\varepsilon_2 + \sigma_3 \cdot d\varepsilon_3 \quad (65)$$

ここに、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: 主応力、 $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3$: 主ひずみ増分。

粒状体になされる全仕事量 W は ΔW を順次加えることにより求まる。Fig. 9 は豊浦砂を用いた側圧一定排水三軸圧縮試験結果について (65) 式を用いて求めた W と SMP 上のせん断・垂直応力比の関係を示したものである。図より $W/(\tau/\sigma_N) \sim W$ 関係において直線性が成り立ち、次式が成立することがわかる。

$$(\tau/\sigma_N) = \frac{W}{a + dW} \quad (66)$$

ここに、 a, d : $W/(\tau/\sigma_N) \sim W$ 関係における縦軸を切る値と勾配であり、材料、粒子構造に依存するものと考えられる。

排水三軸くり返し圧縮試験における除荷・再載荷過程での W と τ/σ_N の関係を両対数紙にプロットしたものが Fig. 10 に示されており、図より除荷・再載荷過程では次式が成立することがわかる。

$$W = m(\tau/\sigma_N)^r + c \quad (67)$$

ここに、 m, r : 材料に依存する係数。

(26) 式中の ΔW は数値計算に際し、初期載荷過程では (66) 式を、また除荷・再載荷過程では (67) 式を用いて求められている。

(40) 式をみればわかるように R_e を求めるには ΔW_e が必要であるが、ここでは応力-ひずみ曲線の初期接線勾配を弾性係数とみなして ΔW_e を計算している。

(2) 接点角分布について

接点角の初期分布はマルコフ過程の基礎方程式を解く際の初期条件として必要である。接点角の初期分布については小田³²⁾、松岡³⁰⁾の研究があり、自然に堆積させた粒状体においては接点角の分布が三角形あるいは台形になることが知られており、ここでは数値計算に際し、三角形分布を仮定している。三軸圧縮試験に

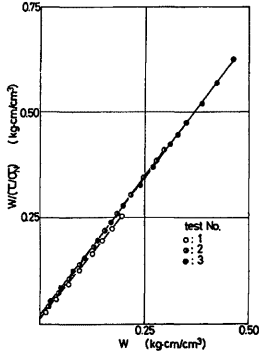


Fig. 9. Relations between W and τ/σ_N on Toyoura sand.

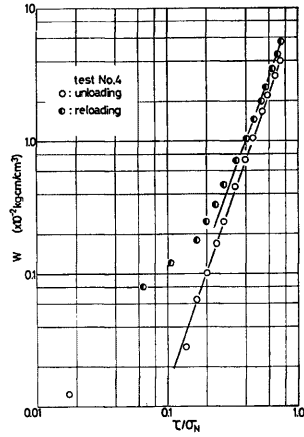


Fig. 10. Relations between W and τ/σ_N during unloading and reloading on Toyoura sand.

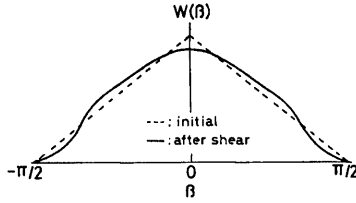


Fig. 11. Schematic change in the distribution of contact angles during deformation process.

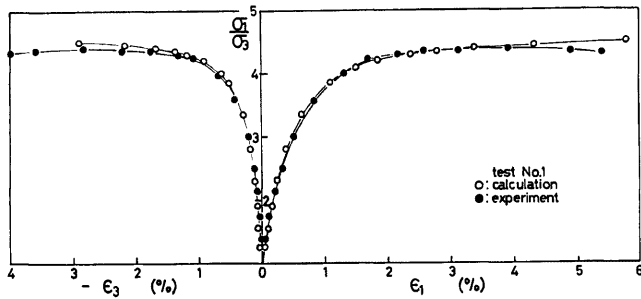


Fig. 12. (a)

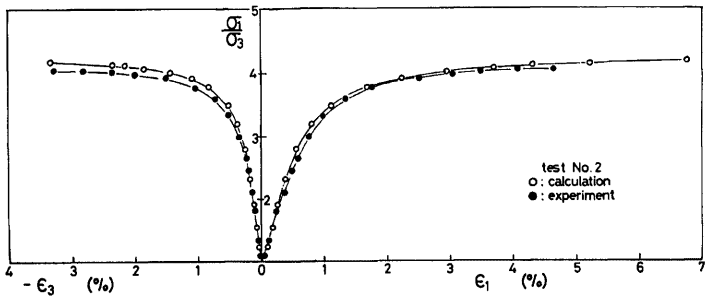


Fig. 12. (b)

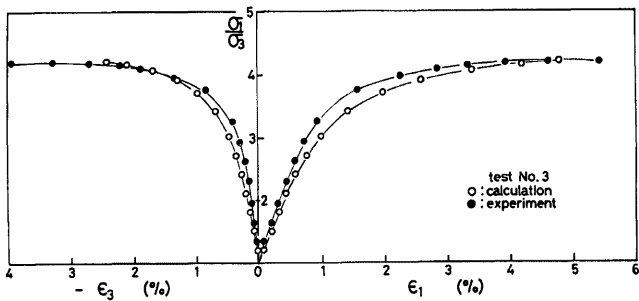


Fig. 12. (c)

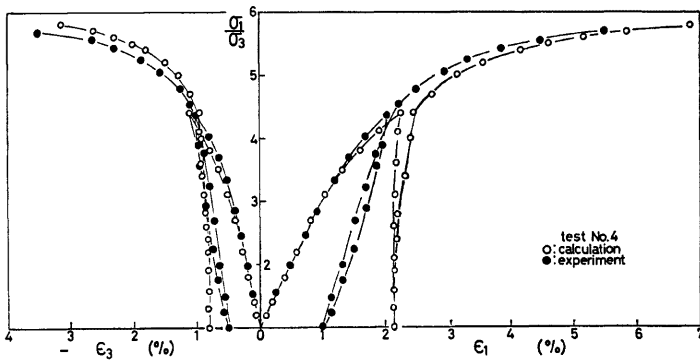


Fig. 12. (d)

Fig. 12. Stress-strain relationships obtained from drained triaxial compression tests and numerical experiments.

対する数値計算における接点角の変化を模式的に書くと Fig. 11 のようになる（数値計算結果の接点角分布の変化はもっとわずかである）。Fig. 11 は初期には点線で示される三角形であった接点角の分布が、せん断過程において潜在すべり面である SMP へ接平面が指向することにより実線で示すように SMP 付近の接点角を有する接点数が増していることを意味している。

(3) 数値実験結果

豊浦砂を用いた側圧一定排水三軸圧縮試験とそれをもとに行った数値実験より得られた応力－ひずみ関係が Fig. 12 に示されている。また数値実験に用いられた数値が Table 1 に示されている。Fig. 12 をみればわかるようにくり返し載荷試験における除荷・再載荷過程で実際の粒状体の挙動を少しずれるようであるが、筆者の提案しているモデルは粒状体の挙動をかなりよく表現できているとおもわれる。したがって、この力学モデルを用いれば粒状体の初期接点角の分布と粒状体になされる仕事をともに複雑な経路での粒子の運動の推定や巨視的な物理量である応力とひずみの関係を、初期粒子構造の異方性、応力履歴などを考慮して統一的に求めていくことが可能であると考えている。

Table 1. Values used in numerical experiments.

Test No.	σ_r (kg/cm ²)	e_0	μ	λ	κ	a	d	m	r
1	2	0.713	0.3	$15 + 0.75(\sigma_1 - \sigma_3)$	0.25	0.700	1.260	—	—
2	3	0.720	0.3	$17 + 1.50(\sigma_1 - \sigma_3)$	0.25	2.714	1.286	—	—
3	4	0.716	0.3	$25 + 1.75(\sigma_1 - \sigma_3)$	0.30	1.550	1.340	—	—
4	3	0.645	0.3	$15 + 1.50(\sigma_1 - \sigma_3)$	0.30	3.214	1.014	9.810 11.460	2.850 2.630

ここに、 σ_r : 側圧, e_0 : 初期間げき比, μ : (38)式, λ : (63)式, κ : (64)式, a, d : (66)式
 m, r : (67)式, 上が除荷, 下が再載荷過程で用いた値。

6. 結 語

粒状体の変形過程は粒状体を構成している粒子の確率的な運動を平均化したものであるという認識に立ち、粒子の運動にマルコフ過程を適用し、粒状体の力学モデルを提案してきた。その際、マルコフ過程の基礎方程式に含まれる係数 $A_i(\eta, s)$, $B_{ii}(\eta, s)$ を決定するためにポテンシャル障壁および潜在すべり面の概念を、またひずみの誘導においては転位現象に対応する概念を導入している。マルコフ過程を粒状体の力学挙動に適用するに際し、粒状体の力学的な物性を表現する $A_i(\eta, s)$, $B_{ii}(\eta, s)$ の合理的な決定方法がモデルの良否に大きく影響し、したがって、モデルをより実際の粒状体に近づけるためには 3.4 節で述べた粒子レベルでの粒状体の物性を反映している諸量についての正確な情報が得られなければならない。この点に関して、提案している力学モデルはまだかなり不完全ではあるが、5 章で述べたようにこのモデルを用いれば、粒状体の応力－ひずみ関係の解明を困難にしている初期粒子構造の異方性、応力履歴の問題などを考慮したより統一的な解析が可能であると考えている。

最後に御指導を賜っている村山朗郎名誉教授、赤井浩一教授、常に暖かい激励をいただいている今本博健教授に深謝の意を表します。また、貴重な助言をいただいた地盤災害部門、耐震基礎部門、京大土系研究室の諸先輩に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) 北村良介：ランダム粒状体のモデル化に関する一考察，第 11 回土質工学研究発表会，1976，pp. 239-242.
- 2) 北村良介：確率過程を用いた粒状体の力学モデル，第 12 回土質工学研究発表会，1977，pp. 223-226.
- 3) 北村良介：確率過程を用いた粒状体の力学モデル (2)，第 13 回土質工学研究発表会，1978，pp. 365-368.

- 4) 吉田耕作：物理数学概論，産業図書，1974，pp. 143-160.
- 5) Gnedenko, B. V.: Theory of Probability, Chelsea, New York, 1969, (確率論教程，鳥井一雄訳，森北出版，1971，pp. 348-409).
- 6) Litwiniszyn, J.: Application of the Equation of Stochastic Processes to Spatial Problems of Mechanics of some Types of Bodies, Bull. de l'Acad. Polon. Sci., Vol. IV, No. 2, 1956, pp. 91-95.
- 7) Litwiniszyn, J.: The Model of a Random Walk of Particles adopted to Researches on Problems of Mechanics of Loose Media, Bull. de l'Acad. Polon. Sci. Tech., Vol. XI, No. 10, 1963, pp. 61-70.
- 8) Litwiniszyn, J.: The Model of a Random Walk of Particles adapted to Researches on Problems of Mechanics of Loose Media II, Bull. de l'Acad. Polon. Sci. Tech., Vol. XII, No. 5, 1964, pp. 281-286.
- 9) Goldstein, M. N., Misumsky, V. A. and Lapidus, L. S.: The Theory of Probability and Statistics in Relation to the Rheology of Soils, Proc. 5th Int. Conf. SMFE, Vol. 1, 1961, pp. 123-126.
- 10) Sweet, A. L. and Bogdanoff, J. L.: Stochastic Model for Predicting Subsidence, Proc. ASCE, Vol. 91, No. EM2, 1965, pp. 21-45.
- 11) Sweet, A. L. and Bogdanoff, J. L.: Validity of a Stochastic Model for Predicting Subsidence, Proc. ASCE, Vol. 91, No. EM6, 1965, pp. 111-128.
- 12) Brahma, C. H.: Analysis of Granular Soil Deformation as a Stochastic Process, Ph. D. Thesis of Ohio Univ., 1969.
- 13) 向坊 隆編：材料の構造と性質 I，岩波講座，基礎工学13，1968.
- 14) Murayama, S.: Theoretical Consideration on Behavior of Sand, Proc. IUTAM Symposium on Rheology and Soil Mechanics, Grenoble, 1964, Springer-Verlag, 1966, pp. 146-159.
- 15) Murayama, S.: Constitutive Equations of Particulate Material in the Elastic State, Preprint of Speciality Session 9, 9th Int. Conf. SMFE, 1977, pp. 167-174.
- 16) Murayama, S.: Constitutive Equations of Particulate Material in the Plastic State, Preprint of Speciality Session 9, 9th Int. Conf. SMFE, 1977, pp. 175-582.
- 17) Matsuoka, H. and Nakai, T.: Stress-Deformation and Strength Characteristics of Soil under Three Different Principal Stresses, Proc. JSCE, No. 232, Dec., 1974, pp. 59-70.
- 18) 佐武正雄：降伏条件と統計論的考察，土木学会第 29 回年次学術講演会，第 1 部，1974，pp. 1-3.
- 19) Field, W. G.: Towards the Statistical Definition of a Granular Mass, Proc. 4th A. and N. Z. Conf. on Soil Mech., 1963, pp. 143-148.
- 20) Oda, M.: Co-ordination Number and its Relation to Shear Strength of Granular Material, Soils and Foundations, Vol. 17, No. 2, 1977, pp. 29-42.
- 21) Marsal, R. J.: A True Triaxial Apparatus to Rockfills, Proc. 8th Int. Conf. SMFE, Vol. 1, 1973, pp. 259-264.
- 22) Oda, M.: A Mechanical and Statistical Model of Granular Materials, Soils and Foundations, Vol. 14, No. 1, 1974, pp. 13-27.
- 23) 小西純一：粒状体の微視的構造と応力の関係について，土木学会第32回年次学術講演会，第 3 部，1977，pp. 84-85.
- 24) Horn, H. M. and Deere, D. V.: Frictional Characteristics of Minerals, Geotechnique, Vol. 12, No. 4, 1962, pp. 319-334.
- 25) Proctor, D. C. and Barton, R. R.: Measurements of the Angle of Interparticle friction, Geotechnique, Vol. 24, No. 4, 1974, pp. 581-604.
- 26) Naciments, U.: Goniometer for Determining Interparticle Friction, Proc. 9th Int. Conf. SMFE, Vol. 1, 1977, pp. 229-233.
- 27) 北村良介：粒状体におけるヒズミの定義について，土木学会関西支部年次学術講演会，1978，III-5.
- 28) Horn, M. R.: The Behaviour of an Assembly of Rotund, Rigid, Cohesionless Particles, Part I, II, Proc. Royal Soc. A, Vol. 286, 1965, pp. 62-97.

- 29) Horn, M. R.: The Behaviour of an Assembly of Rotund, Rigid, Cohesionless Particles, Part III, Proc. Royal Soc. A, Vol. 310, 1969, pp. 21-34.
- 30) 松岡 元：せん断時の応力-ひずみ関係について，京都大学防災研究所年報，第15号 B, 1972, pp. 499-511.
- 31) 大横正紀：粒状体の2次元変形について，第9回土質工学研究発表会，1974, pp. 199-202.
- 32) Oda, M.: Initial Fabrics and their Relations to Mechanical Properties of Granular Materials, Soils and Foundations, Vol. 12, No. 1, 1972, pp. 17-36.

付 録

$$\begin{cases} \sum_{\beta_1=0}^{\pi/2} \sum_{\beta_2=0}^{2\pi} (n_{\gamma,1} + n_{\gamma,2} + n_{\gamma,0}) = \sum_{\beta_1=0}^{\pi/2} \sum_{\beta_2=0}^{2\pi} n_{\gamma} = N_c & (1) \\ \sum_{\beta_1=0}^{\pi/2} \sum_{\beta_2=0}^{2\pi} \left(n_{\gamma,1} \cdot x_{\gamma,1} + n_{\gamma,2} \cdot x_{\gamma,2} + n_{\gamma,0} \cdot \frac{x_{\gamma,1} + x_{\gamma,2}}{2R_{\gamma}} \right) = \Delta W & (2) \\ x_{\gamma,1}/x_{\gamma,2} = R_{p,\gamma} & (3) \\ n_{\gamma,2}/n_{\gamma,1} = R_{n,\gamma} & (4) \\ n_{\gamma,1} = N_{c,1} \cdot w(\gamma, s) d\beta_1 \cdot d\beta_2 & (5) \end{cases}$$

③, ④ 式より

$$x_{\gamma,2} = \frac{1}{R_{p,\gamma}} x_{\gamma,1} \quad (3') \quad n_{\gamma,2} = R_{n,\gamma} \cdot n_{\gamma,1} \quad (4')$$

③', ④' 式を ② 式に代入すると，

$$\sum_{\beta_1=0}^{\pi/2} \sum_{\beta_2=0}^{2\pi} \left\{ n_{\gamma,1} x_{\gamma,1} + \frac{R_{n,\gamma}}{R_{p,\gamma}} x_{\gamma,1} \cdot n_{\gamma,1} + n_{\gamma,0} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{R_{p,\gamma}}\right) x_{\gamma,1}}{2R_{\gamma}} \right\} = \Delta W \quad (6)$$

$$\text{① 式より } n_{\gamma,0} = n_{\gamma} - n_{\gamma,1} - n_{\gamma,2} = n_{\gamma} - n_{\gamma,1}(1 + R_{n,\gamma}) \quad (1')$$

①' 式を ⑥ 式に代入してまとめると，

$$\begin{aligned} \sum_{\beta_1=0}^{\pi/2} \sum_{\beta_2=0}^{2\pi} \left[x_{\gamma,1} n_{\gamma,1} \left\{ \left(1 + \frac{R_{n,\gamma}}{R_{p,\gamma}}\right) - \left(1 + \frac{1}{R_{p,\gamma}}\right)(1 + R_{n,\gamma})/2R_{\gamma} \right\} \right] \\ = \Delta W - \sum_{\beta_1=0}^{\pi/2} \sum_{\beta_2=0}^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2R_{\gamma}} \left(1 + \frac{1}{R_{p,\gamma}}\right) x_{\gamma,1} \cdot n_{\gamma} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

⑤ 式を ⑦ 式に代入すると，

$$\begin{aligned} N_{c,1} \sum_{\beta_1=0}^{\pi/2} \sum_{\beta_2=0}^{2\pi} \left[x_{\gamma,1} w(\gamma, s) d\beta_1 d\beta_2 \left\{ \left(1 + \frac{R_{n,\gamma}}{R_{p,\gamma}}\right) - \left(1 + \frac{1}{R_{p,\gamma}}\right)(1 + R_{n,\gamma})/2R_{\gamma} \right\} \right] \\ = \Delta W - \sum_{\beta_1=0}^{\pi/2} \sum_{\beta_2=0}^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2R_{\gamma}} \left(1 + \frac{1}{R_{p,\gamma}}\right) x_{\gamma,1} \cdot n_{\gamma} \right\} \\ \Delta W - \sum_{\beta_1=0}^{\pi/2} \sum_{\beta_2=0}^{2\pi} \left\{ \frac{R_{p,\gamma} + 1}{2R_{\gamma} \cdot R_{p,\gamma}} \cdot x_{\gamma,1} \cdot n_{\gamma} \right\} \\ \therefore N_{c,1} = \frac{\sum_{\beta_1=0}^{\pi/2} \sum_{\beta_2=0}^{2\pi} \left[x_{\gamma,1} w(\gamma, s) d\beta_1 \cdot d\beta_2 \left\{ \left(1 + \frac{R_{n,\gamma}}{R_{p,\gamma}}\right) - \left(1 + \frac{1}{R_{p,\gamma}}\right)(1 + R_{n,\gamma})/2R_{\gamma} \right\} \right]}{\sum_{\beta_1=0}^{\pi/2} \sum_{\beta_2=0}^{2\pi} \left[x_{\gamma,1} w(\gamma, s) d\beta_1 \cdot d\beta_2 \left\{ \left(1 + \frac{R_{n,\gamma}}{R_{p,\gamma}}\right) - \left(1 + \frac{1}{R_{p,\gamma}}\right)(1 + R_{n,\gamma})/2R_{\gamma} \right\} \right]} \end{aligned}$$