

CONGRUENCE AND DIMENSION OF NON-SEPARABLE METRIC SPACES

山口大・教育 服部 泰直 (Yasunao Hattori)

距離空間における次元と、特殊な距離関数の関係について調べる。

定義 1. 距離空間 (X, d) は, non-zero distance $d(x, y)$ が互いに異なるとき、(即ち、 $\{x, y\} \neq \{u, v\}$ かつ $x \neq y$ ならば、 $d(x, y) \neq d(u, v)$ が成り立つとき、) strongly rigid と呼ばれる。

L. Janas は、1972年に、strongly rigid metric の概念を用い、可分距離空間の0次元性を特徴付けた:

定理 A ([2]). X を空でない可分距離空間とする。このとき、 X の位相を等しく strongly rigid metric d が存在することと、 $\dim X = 0$ であることは、同等である。

最近 L. Janas は、この定理を高次元へ拡張することを試みた。それを述べる為に、定義が必要である。

定義 2 ([3]). (X, d) を距離空間とする。 X の 2 つの部分集合 A, B が 合同 である (congruent) とは、 A から B の上への全単射 $f: A \rightarrow B$ で $d(f(a_1), f(a_2)) = d(a_1, a_2)$ が任意の $a_1, a_2 \in A$ に対して成り立つものが存在するときをいう。

"合同" の概念を使って、上の定理 A を言い換えると、次のようになる。

定理 A' X を空でない可分距離空間とする。このとき、 $\dim X = 0$ であることと、 X の位相を導く距離 d で、 d に関して、濃度が 2 である合同な相異なる 2 つの部分集合が存在しないものと存在することとが、同等である。

そこで、定理 A' の濃度を "2" から "3" にあることにより、 L. Janas は、次を得た。

定理 B ([3]). X を局所コンパクトな可分距離空間とする。このとき、 X が、次の条件 $(*)$ をみたす距離 d を持

つならば, $\dim X \leq 1$ である!

⊛ d に関して, 濃度が 3 である相異なる 2 つの合同な部分集合が, 存在しない。

この小論の目的は, 上の条件 ⊛ の本質性を, 考えていくことである。まず, 次の例から, 条件 ⊛ から, separability が導きなりことが, わかる。

例 $A = [0, 1)$ とし, 半開区間 $(0, 1]$ を $(0, 1] = \{t_\alpha \mid \alpha \in A\}$ と, well-order する。 $S(A)$ を, A を index set とする star-space (hedgehog space) とし, P を $S(A)$ の標準的な距離とする。 $X = \{(t_\alpha, \alpha) \mid \alpha \in A\} \subset S(A)$, $d = P|_X$ とすると, (X, d) は条件 ⊛ をみたすが, 明らかに, その weight は $\mathbb{L}$ である。

条件 ⊛ と, 次元との本質的な関係は, 次のとおりである。

定理 1. X が ⊛ をみたす距離 d を持つ距離空間ならば, $\text{ind } X \leq 1$ である。

証明は, [1] を見ればよい。

定理 A と、上の定理との比較において、 $\textcircled{*}$ が、 $\dim X \leq 1$ (或いは、 $\text{ind } X \leq 1$) を特徴付けられるかという問題が考えられるが、これは、コンパクト空間でさえ、否定的である。このことは、次のことよりわかる。

事実 (M. Bestvina). (X, d) を $\textcircled{*}$ を満たすコンパクト距離空間とする。このとき、 X は $\mathbb{R}^2$ に埋め込まれる。

証明 $|X| \geq 2$ としてよい。 $x_1 \neq x_2 \in X$ を fix する。 $i: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $i(x) = (d(x_1, x), d(x_2, x))$, for $x \in X$ とすると、 i は埋め込みになる。

さて、 $M \in \text{Menger}$ の 1 次元万有空間とすると、 M を $\mathbb{R}^2$ に埋め込むことは、できない。従って、上の Bestvina の事実より、 M は、 $\textcircled{*}$ を満たす距離を持たない。これらのことより次の問題が生ずる。これは、未解決である。

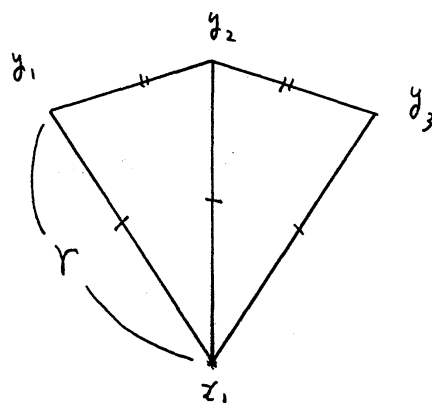
問題 (L. Janos) X をコンパクト (または、局所コンパクトな可分) 距離空間 とする。このとき、 X が更にいかなる条件を持てば、 X は $\textcircled{*}$ を満たす距離を持つか？

次に条件④を離れて、 $\text{ind } X \leq 1$ であるための必要十分条件を考えていく。最近、L. Janos [4]は、定理1の証明より次の概念を抽出した。

定義3 ([4]) (X, d) を距離空間, $x \in X$, $r > 0$ とする。このとき、四点 $\{x, y_1, y_2, y_3\}$ の配置が頂点 x と長さ r の隣接した二等辺三角形の組を形造るとは、

$$d(x, y_i) = r \quad \text{for } i = 1, 2, 3, \text{ and} \\ d(y_1, y_2) = d(y_3, y_2)$$

をみたすことである。



定理C ([4]) (X, d) は、次の条件 (**) をみたす距離空間とすると、 $\text{ind } X \leq 1$ である：

(**) $\forall x \in X$, $\forall r > 0$ に対し、

すなわち、 x を頂点とし長さ r の隣接する二等辺三角形の組が存在し

る。

定理 C の証明は、定理 I のそれと全く同様である。また明らかに 条件 $(**)$ の方が条件 $(*)$ より弱し、そこで、次の問題を問うことが出来る。

問題 (L. Janos). X をコンパクト (或いは、可分な) 距離空間とする。このとき、 $\dim X \leq 1$ ならば、 $(**)$ を満たす距離 d を X が持つか？

さて、次に star-rigid metric に関する Janos-Martin の問題について考える。

定義 4 ([5]). 距離関数 d が star-rigid であるとは、 X の任意の 3 点 x, y, z (ただし、 $y \neq z$) に対して、 $d(x, y) \neq d(x, z)$ が成り立つことを言う。

Janos-Martin [5] は、 star-rigid metric と次元との関係を調べ、次を得た。

定理 D ([5]). X を空でない可分な距離空間とする。このとき、 $\dim X = 0$ であることと、 X が全有界な star-rigid metric d を持つことは、同等である。

彼らは、同じ論文で、次を問うた "距離空間 X が star-rigid metric を持つならば、 $\text{ind } X \leq 0$ であるか?" である。
 我々は、定理 1 と同様にして (むしろより単純に)、この問題を肯定的に、解決することができる、即ち、

定理 2. X を空でない距離空間とする。 $n = 0$ とし、 X が star-rigid metric を持つならば、 $\text{ind } X = 0$ である。

References

- [1] Y. Hattori, Congruence and dimension of non-separable metric spaces, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.
- [2] L. Janos, A metric characterization of zero-dimensional spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 31 (1972), 268-270.
- [3] ———, Congruence and one-dimensionality of metric spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 103 (1988), 1268-1270.
- [4] ———, A geometric condition implying one-dimensionality, Abstracts of papers presented to the Amer. Math. Soc., 10 No.5 (1989), 410-411.
- [5] ——— and H. Martin, Metric characterizations of dimension for separable metric spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 70 (1978), 209-212.