

ϕ 函数の理論 Examples

修士論文 暫定改訂版

京大大学院 DCI
数理解析配属

矢野環

序.

これは、京都大学大学院修士課程研究論文として提出した、「 μ 函数の理論」に若干手を加えたものである。変更された箇所は次の通り。

1. 基本予想 S とよばれるものは、 P にて定式化すべきこと明らかなるようになったため、ぐねにきりより書きかえた。又、旧予想 S は S_0 とし、 S_0 の反例の NTn:m について、一般的事項を加えた。
2. non-isolated の場合の計算が違ふことにより、色々新しい事態がみこったので、ぐねについて書き加えた。
3. Join theorem の μ -fn version について、色々こじつけがとれたので、書き入れた。

その他、いくつかの変更がなされた。

1974. 4 22.

目次.

Introduction.

vi

第一章 1 変数関数の理論.

§ 1.	定義・基本性質	1
§ 2.	基本予想 KS, S_0 (命題 S_0, KS_0)	3
§ 3.	quasi-hom-isolated の $b(s)$.	5
§ 4.	non-quasi-hom 2' の $f[s]$ と $b(s)$ の関係.	8
§ 5.	$f[s]$ の具体的決定に関して.	11
§ 6.	予想 K_{dec} と $L(\neq)$	14

第二章 2 変数関数における 1 変数関数.

§ 1.	monodromy theory より.	18
§ 2.	quasi-hom poly. の 1-parameter deformation の $b(s)$	21
§ 3.	色々な link の $b(s)$	31
§ 4.	§ 2, § 3 に関する諸例.	40
§ 5.	より複雑な場合には $\sim$ して.	48

第三章 Simplex type function.

§ 1.	準備. $\mathbb{N}^n$ の subset について.	51
§ 2.	simplex type function と予想 K .	55
§ 3.	$T(n); (m)$ について.	58
§ 4.	特に $T(n); (2)$ について. (予想 S_0, KS_0 の反例)	61
§ 5.	simplex type function に対する $b(s)$ の変例.	69
§ 6.	non-simplex type functions の $b(s)$ に関して.	74

第四章	Elementary singularity に関する $\mu(n)$.	
§ 1.	singularity の分類理論.	77
§ 2.	singularity の分類における本質的形に 対しての $\mu(n)$ の計算 (ついでに μ を).	81
第五章	non-isolated case.	106
	補遺	(1-10)
第六章	未来への展望. 反省をこめて.	116
Appendix ^X S.I.		
1.	J.M. Bernstein の定理.	121
2.	漸近展開と μ 函数.	123
3.	Quasi-homogeneous function について. 関連する問題.	126
4.	本文中の定理に因りて, — 加藤満生氏による注意 —	128
5.	$3T_{8,2}$ の $\mathcal{O}/\mathfrak{m}$, $\mathcal{O}/\mathfrak{m}+f$ 代表元のととり方	132
References.		135

Notations.

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

$\mathcal{A} = (f_1, \dots, f_n)$ ideal in $\mathcal{O}_0$ (local hol. fun near $x=0$)

$\Delta(t)$ = Alexander polynomial.

$\chi(t), q(t)$ = 変数 t の, monodromy の 固有多項式, 最小多項式.

μ : $- \#2$ = Milnor $\#$ = $\dim \mathcal{O}/\mathcal{A}$ ($n \geq m^n$ のとき).
ただし $\# = \#$ §3 では $\mathbb{Z}$ の 自然数.

$\partial, \partial[s], f[s], m, \pi, \Omega^n$ などには 統一章 §1.

$m^{(i)}$: monomial を表わすとき, i の monomial の 中にある
multiindex を表わすとき, i の i .

$\boxed{ijk}$ } i, j, k の 函数を表わすときは $\boxed{ijk} = \delta^{(i)}(x) \delta^{(j)}(y) \delta^{(k)}(z)$
 $\boxed{ij}$ } 一階の作用素で, $\boxed{ij} f = x^i y^j z^k$ とする
とき j の j ともある. 混乱を避けるため.

$L(f)$ p. 16.

多項式の type.

$T_{(n)}(m)$ 統一章 §3. $T_{(n)}(m)$ 統一章 §4. 特には $T_{p,q,r}$ は
Arnold の記号で, 統一章 §2. p. 89 ..

Introduction.

1. 超曲面の singularity は色々な立場から興味をもたれ、さまざまな理論が知られている。この中でも、isolated singularity にかかわる local monodromy theory においては、 γ -主要結果に導くにあたり、解析学を深く用いている。一つの方法は、理論の abelian integral による表現であり、今一つは、Gauss-Manin connexion とよばれる、ある種の常微分方程式を用いようである。たとえば後者においては、 γ が、常微分方程式場をい) ところの "regular singularity" になることが重要である。もとよりこの二つは別個のものであるが、関連してゐるわけだが、近年、この二つとも密接に関連し、かつ、より精密な理論と目されるものが登場した。 γ が、"超曲面の函数" の理論である。佐藤幹夫、B. Malgrange によってこの端緒が^開かれ、彼らなりに、柏原正樹、三輪哲二、河合隆裕によって発展せしめつつあるこの理論の、より大きな発展のため、具体的に裏付けを行なうべく、さまざまな事例を提示すること、この論文の目的である。

この函数とよばれるものは、実に古い歴史をもっている。 γ に関しては少しみてみよう。

2. M. Riesz は、基本解の構成にあたり、"解析核" とい) 着想をもちこんだ。たとえば、 $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ とするとき、

$$\Delta (|x|^2)^{\rho+1} = 4(\rho+1)(\rho+\frac{n}{2}) (|x|^2)^{\rho} \quad (*)$$

は計算によりたしかめられる。

よってこれより

$$(|x^2|)^{\rho} = \frac{1}{4(\rho+1)(\rho+\frac{n}{2})} \Delta(|x|^2)^{\rho+1}$$

とすれば,

$\operatorname{Re} \rho$ が十分大から始めて, 次々 z 複素平面全体に $(|x|^2)^{\rho}$ が定義され, pole の位置も $-N, -\frac{n}{2}-N$ と決定される. 従って, 一般の多項式 $f(x)$ についても, γ の複素平面上の解析接続の法則には, $h(\rho)$ と γ の polynomial と diff. op. $P(x, D)$ で

$$P(x, D) f^{\rho+1} = h(\rho) f^{\rho}$$

という関係が成立すればよい. さらに, $P(x, D)$ は ρ を parameter にしていてもよい. 実際, 任意の多項式に f を, γ のように ρ を z とする. Бернштейн が証明した. [].

3. (4) のような性質を γ して, 佐藤幹夫は, $|x|^2$ が直交群に値 (不変) であること.

$\mathbb{R}^n - \{0\}$ は $G = O(n, \mathbb{R})$ の orbit space $\mathbb{R}^n - \{0\} = \mathbb{R}^+$ と本質的であることを見出した. 1961年, 彼は

"Prehomogeneous vector space" の理論を創始し, たがうに, 11 < γ の主要定理をえた. (G, V) G : 代群 V : 表現空間. $V \supset S$. Zariski closed set. G : $V \setminus S$ 上の transitive γ とき, (G, V) は prehomogeneous vector space とよぶ. γ かつ, 既約, 正則 γ 条件を γ して γ ければ, V 上の既約斉次多項式 $f(x)$ が唯一存在して, (G, V) の相対不変式はすべて f^m の形になる. $S = \{f(x) = 0\}$ により $V \setminus S$ が γ の G -orbit. さて dual space $V^* =$, G を adjoint 表現して γ ければ, (G, V^*) も既約正則 γ となり, γ の既約相対不変式を $P(y)$ $y \in V^*$ とすれば,

$$P(D) f^{\rho+1} = h(\rho) f^{\rho}$$

という式が成立し, ここに $h(\rho)$: polynomial.

このように, h 函数は, 初め prehomogeneous vector space について定義され, 研究されたものであった.

4. 従って、我々の目的とするところは、

local holomorphic function $f(x)$ (near $x=0$)
 1. として、

$$P(\rho, x, D) f^{\rho+1} = h(\rho) f^{\rho}$$

となる $h(\rho)$ を決定することである。当然、 $h(\rho)$ として
 2. 最も良いものを選びたい。そして、 $h(\rho)$ と
 $f(x)=0$ の 0 での local monodromy との関係をしる。
 f : isolated では、上式において必ずしも $P(\rho)$ を
 決定する必要はない。 $h(\rho)$ の計算のための方法もある。

f : non-isolated でも、factor を候補者として、 $h(\rho)$ の評価
 も色々と可能であり、 $P(\rho)$ も構成しうるものがある。
 ある。

f : isol. sing - f-hon では loc. monodromy との関係は
 完全に究明されたが、その一般化には、色々と困難が
 立ちはたかっている。

第一章 複関数の理論

§1. 定義・基本性質

$\mathcal{O} : \mathbb{C}^n$ の holomorphic fn の sheaf. $x, 0$ での stalk も同じ.

$$f \in \mathcal{O}, \quad U = \sum f_i \in \mathcal{O} \quad f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$\mathcal{D}[s] : s \in \text{polynomial}$ として含む, $\mathcal{O}$ の differential operators の sheaf. $(\sum_{\alpha} s_{\alpha,j}(x) D^{\alpha} \text{ の全体})$

$$\mathcal{f}[s] = \{ p(s) \in \mathcal{D}[s] \mid p(s) f^s = 0 \}$$

$$p(s) f^{s+1} = b(s) f^s \quad \text{-----} (*)$$

となる non-zero $b(s)$ の存在は, Бернштейн の定理により保証されている. (cf. App. 1).

Def. 1 $(*)$ となる $b(s)$ 達の $\mathbb{C}[s]$ における ideal の生成元で monic なものを, f の $x=0$ における b 函数といふ.

$f(0) \neq 0$ なら, $\frac{1}{f} \cdot f^{s+1} = f^s$ より $b(s) = 1$.
これは意味ないので, 以下 $f(0) = 0$ を仮定する.

$df(0) \neq 0$ なら, $f = x_1$ とおいてよいが,

$$D_1 x_1^{s+1} = (s+1) x_1^s$$

$$\text{より } b(s) = s+1.$$

$(*)$ より, b 函数は, 半連続性をもつ. 即ち, $x=0$ の近傍の点 y をとり, y の点での b 函数を $b_y(s)$ とすれば,

$$b_y(s) \mid b(s).$$

よって, 特に $s+1 \mid b(s)$.

$h(s)$ の因子 $s+\alpha$ を決定する一つの十分条件として、
 次のことがあふ。 $\alpha \in \mathbb{C}$ に對して、何らかの $\mathcal{D}(s)$ module の
 section $\Delta(x) \neq 0$ が $\left[f\Delta(x)=0, \forall Q(s) \in g[s] \text{ には } Q(\alpha)\Delta(x)=0 \right]$ を満足する $\Rightarrow s+\alpha \mid h(s)$

$\therefore$ (*) より $P(s) \neq -h(s) \in g[s]$

$\therefore (P(\alpha) \neq -h(\alpha)) \Delta(x)=0 \quad \text{i.e.} \quad h(\alpha)\Delta(x)=0.$

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}[s]f^0 = \mathcal{D}[s]/g[s]$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}[s]f^0 / \mathcal{D}[s]f^{0+1} = \mathcal{D}[s]/g[s] + \mathcal{D}[s]f \quad \text{と書く.}$$

$$(*) \Leftrightarrow h(s)f^0=0 \text{ in } \mathcal{M} \Leftrightarrow h(s) \text{ は } \rho \in \text{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}) \text{ の min. poly.}$$

$\mathcal{M}$ の PDE (偏微分方程式論) 上の性質から, $\text{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$
 は $\mathbb{C}$ 上有限次元である。よって Def. 1 において, $h(s)$ の定義
 に, Dep. の定理の根拠とする必要はない。PDE 的取扱い
 については, ここではくわしくくわべない。[] を参照せよ。

$$h(s) \text{ の factor を決定するには, } s+1 \mid h(s) \text{ を考慮して}$$

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{D}[s](s+1)f^0 / (\mathcal{D}[s](s+1)f^0 \cap \mathcal{D}[s]f^{0+1}) \hookrightarrow \mathcal{M}$$

を用いるのがよい。 ρ は $\mathcal{M}_0$ に作用する故,

$$F = \Omega^n \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{M}_0, \quad F^* = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{B}_{pt}) \text{ 写に作用する.}$$

$\mathcal{M}_0$ の PDE 上の性質から, F, F^* は finite dim. vector
 spaces で, 互いに dual である。

Conj. f : isolated sing.

F (or F^*) における linear operator λ ($\lambda \neq 0$) に対して,

$$\exp(2\pi i \lambda) \simeq (f=0 \text{ 近傍の local monodromy})$$

両者の固有変数多項式の一致はわかっている。

F or F^* における ρ の最小多項式を $\psi_\rho(\rho)$ とすれば,

$$\psi(\rho) = (\rho+1) \psi_\rho(\rho). \quad (\text{詳細は } \S 3.4, []))$$

$$\psi(\rho) = (\rho+1) \prod (\rho + \alpha_j) \quad \text{とて,}$$

「(loc. monodromy の最小多項式) = $\prod (t - \exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_j))$ 」
 といふのは正しくない。 α_j に整数差のものがあるとき、
 注意せねばならない。 たとえば $f = x^4 + y^4$ では、

$$\psi_\rho(\rho) = (\rho + \frac{1}{2})(\rho + \frac{3}{4})(\rho+1)(\rho + \frac{5}{4})(\rho + \frac{3}{2})$$

$$(\text{loc. m. min. poly}) = (t+1)(t+i)(t-1)(t-i) \quad (= t^4 - 1)$$

f : non-irr. sing. α ときについて ρ の性質を述べよ。

§ 2. 基本予想

$P(\rho) = \sum_{|\alpha|+j \leq m} s^j a_{\alpha,j}(\rho) D^\alpha$ とおけるとき、 $P(\rho)$ を
 高々 m 階微分である、という、 $\sum_{|\alpha|+j=m} s^j a_{\alpha,j}(\rho) D^\alpha \neq 0$ のとき、
 m 階微分である といふ。 このとき、

$$p_m(\rho, x, \xi) = \sum_{|\alpha|+j=m} s^j a_{\alpha,j}(\rho) \xi^\alpha$$

を、 $P(\rho)$ の principal symbol といふ。 $\mathbb{C} \times T^*X$ 上の
 函数である。 $\sigma(P) = p_m$ などと書く。

$$P(\rho) f^0 = 0 \Rightarrow \sigma(P)(f, x, d f) = 0 \quad \dots (a)$$

は計算を直接に促すが、この逆が “ある程度” 成立
 すること、 m を PDE として扱える上で重要である。
 詳細は [] にゆずり、簡略に説明しよう。

$$W = \{ (x, d f(x)) \in T^*X \mid d f(x) \neq 0 \} \text{ の Zariski closure}$$

$$W_0 = \{ (x, \xi) \in W \mid f(x) = 0 \} \quad \text{と書く。}$$

$\mathcal{M}$ は PDE を (7) は, W_0 上の α が重要だといっている。
 さて, W_0 の $f(z)$ の一意性にもよるか? を問うにす。即ち,

$$\mathcal{J} = \{ p(\omega, x, z) \mid (\omega, z) \mapsto \text{hom. } p(f, x, d_f^2) = 0 \}$$

$$\overline{f(z)} = \{ \sigma(p) \mid p \in f(z) \}$$

とすれば, $\overline{f(z)} \subset \mathcal{J}$ は (6) よりわかる。これは一致
 するであろう) とおきかえてみたが, 一般には成り立たない。
 (c.f.) 即ち, 次の命題 S_2 は false.

$$S_2 \quad p \in \mathcal{J} \Rightarrow \exists p(\omega) \in f(z) \text{ s.t. } \sigma(p) = p.$$

ここで, p^*x へもよおして考えよと, S_2 の反例も, 次の形
 の命題は満たす。これを基本予想とよんでいる。

基本予想 S $p \in \mathcal{J}$ のとき, W_0 の, ある proper
 analytic subset を除いた他の $\forall$ 点 (x, z) の近傍で,
 $\exists p(\omega) \in \mathcal{P} \otimes f(z)$ s.t. $\sigma(p) = p.$
 ($\mathcal{P} \otimes$ の意味はよきからわかる)

たとえこの反例がなくても, 次の形で成り立たない, 現存に
 はほぼ十分である。

$$SK : \exists m_0 \text{ (f. n. = dep)}, \quad p: (\omega, z) \mapsto \text{hom. deg } p = m \geq m_0 \\ \Rightarrow S \text{ の十分性成立.}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{念のためおいておく, } SK_2 : \exists m_0, \text{ hom. } (\omega, z), \text{ deg } p = m \geq m_0 \\ \Rightarrow \exists p(\omega) \in f(z) \text{ s.t. } \sigma(p) = p \\ \text{は false である} \end{array} \right)$$

さて, $\mathcal{P} \otimes f(s)$ に由いては, 本稿において, $\mathcal{P}$ を
 恒等的に用いるわけではなからず, 同年に証明しよう. thing.

$\mathcal{P}$ は pseudo-dif. op. の sheaf とし, $\mathcal{P}^*X$ 上の sheaf を
 与えて, $\mathcal{P}(x, D) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_j(x, D)$ $\mathcal{P}_j$ は j 階作用素.
 この形をしており, $0 \sim \infty$ まで $\mathcal{P}$ について, "infra exp"
 の増大度を持つもの, $-\infty \sim 0$ については, 寛大なる条件で
 よい. ここで, 増大度 j と $j+1$ と $j+2$ と $j+3$ の $\mathcal{P}_j$ の $\mathcal{P}_{j+1}$ の $\mathcal{P}_{j+2}$ の $\mathcal{P}_{j+3}$ の

$\mathcal{P}(x, D) = \sum_{j=-\infty}^m \mathcal{P}_j(x, D)$ $\mathcal{P}_m \neq 0$ のとき, $\mathcal{P}$ を $\mathcal{P}^f$ と記し,
 有限階の pseudo-dif. op. とし, $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{P}_m(x, \xi)$ と symbol を
 定める. $\mathcal{P}^*X \ni (x, \xi)$ の nbhd で, $\mathcal{P}_m(x, \xi) \neq 0$ なる $\mathcal{P}$ は,
 実は $\mathcal{P}(x, D)$ は $\mathcal{P}^f$ 内に逆元を持つ.

$\mathcal{P}(x, \xi) \in \mathcal{I}$ のとき, $\mathcal{P}$ は symbol とする $f(s)$ の元は
 なくとも, $\sum_i \mathcal{P}(x, \xi_i)$ は symbol とする $f(s)$ の元が
 存在するからである. $\mathcal{P}$ i.e. $D_1 \mathcal{P}(x, D) + \dots \in f(s)$
 となる i , $\sum_i \mathcal{P}_i \neq 0$ なる $\mathcal{P}$ とし, D_1^{-1} を含む集まりは,

$\mathcal{P}$ を $\mathcal{P}^f$ として symbol とする $\mathcal{P} \otimes f$ の元が $\mathcal{P}^f$ であることは
 なる. 一般に, $\sim$ による関係があるとき, 基本予想 S
 において, W_0 が proper analytic subset を除くことは
 なるのである. (cf.

($\mathcal{P}$ によって $\mathcal{P}^f$ は $S-K-K$ とする)

§. 3. quasi-hom. isolated case. (詳(12)三稿()参照)

$f(x)$: quasi-hom. (isolated sing. i.e. $\sqrt{\pi} = m$)
 i.e. $\exists$ vector field X_0 . $X_0 \cdot f = f$.
 (quasi-hom-fn $\Rightarrow$... τ ... 参照)

$$X_0 f = f \text{ より } X_0 f^0 = \rho f^0. \text{ 従って,}$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{O} f^0 / \mathcal{O} f^{\rho+1} = \mathcal{O} / \mathcal{J}', \quad \mathcal{J}' = \{P \in \mathcal{O} \mid P f^0 \in \mathcal{O} f^{\rho+1}\}$$

$$\mathcal{J}_0 = \{P \in \mathcal{O} \mid P f^0 = 0\} \text{ と } \mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}', \text{ 容易にわかるように}$$

$$\mathcal{J}' = \mathcal{J}_0 + \mathcal{O} f.$$

又, isolated sing 上, $\mathcal{J}_0 = \sum \mathcal{O}(f_i D_j - f_j D_i)$
 がわかる. (これは quasi-hom 上 $1 \leq i < j \leq n$ だけなり.)

$(f_1, \dots, f_n)$ は $\mathcal{O}$ -regular sequence と $\mathcal{O} \neq \mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \neq \mathcal{O}_2$.

$$\text{従って, } \mathcal{M} = \mathcal{O} / \mathcal{O} f + \sum \mathcal{O}(f_i D_j - f_j D_i).$$

$\mathcal{O}(s)$ は, 常に nonsingular part の factor $(s+1)$ を持つ.
 γ を除くように $\mathcal{O}_n(s)(s+1) = \mathcal{O}(s)$ と置く

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{O}(s+1) f^0 / (\mathcal{O}(s+1) f^0 \cap \mathcal{O} f^{\rho+1}) \subset \mathcal{M} \text{ と置く,}$$

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{O} / \mathcal{O} f_1 + \dots + \mathcal{O} f_n \text{ とする.}$$

$$\pm \rho, P \in \mathcal{O} \Rightarrow \pm \rho \mid P(\rho+1) f^0 = P(\rho+1) \rho f^0 = P(\rho+1) X_0 f^0 \\ \Rightarrow \pm \rho \mid P \cdot X_0(\rho+1) f^0$$

$$\rho: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{M}_n & \longrightarrow & \mathcal{M}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$\mathcal{O}(s+1) f^0 \longmapsto X_0(\rho+1) f^0$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}_n & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}_n \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{D}/\sum \partial f_i & \longrightarrow & \mathcal{D}/\sum \partial f_i \\
 \bar{1} & \longmapsto & X_0 \cdot \bar{1}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \tau \cdot 12 \quad \Delta \cdot \tau \in \mathbb{P}12 \\
 \bar{1} \in \mathcal{D} \supset 1 \text{ a class } \tau 12.
 \end{array}$$

ここでも lemma. $\gamma \in T = k$, $\mathcal{B}_{pt} \supset 12$, 厚さ τ に support τ かつ hyperfunction γ 全体 i.e. $\partial \delta(x) = \partial/\partial x_1 + \dots + \partial/\partial x_n$.

lemma. $\{ \text{厚さ } \tau \text{ に support } \tau \text{ かつ coherent } \mathcal{D}\text{-module category} \}$

is

$\{ \text{finite dim. vector space} \}$

Covariant. $\mathcal{M} \longrightarrow \Omega^n \otimes \mathcal{M} = V.$

$$V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{B}_{pt.} \longleftarrow V$$

contra. $\mathcal{M} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{pt})$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathcal{B}_{pt}) & \longleftarrow & V \\
 \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}) \otimes \mathcal{B}_{pt.} & &
 \end{array}$$

ここ lemma 4', $\Delta \in \text{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_n)$ は $\Delta \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ と等しい.

$$V = \Omega^n \otimes \mathcal{M}_n = \Omega^n / \Omega^n \mathcal{Q} \cong \mathcal{Q} / \mathcal{Q}.$$

$$\tau \in \tau, \text{ 最後 } \tau \text{ 同型 } 12 \tau, \quad \Delta: \omega \mapsto \omega X_0 \quad 12$$

$$\Delta: \varphi \mapsto X_0^* \varphi \quad 12 \tau \tau.$$

$$V = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_n, \mathcal{B}_{pt})$$

$$= \{ u \in \mathcal{B}_{pt} ; \partial_j u = 0 \text{ } \forall j \} \quad \Delta: u \mapsto X_0 u.$$

ここでも lemma, Saito の定理を適用して

$$X_0 = \frac{1}{r} \sum r_i x_i \partial_i \quad \tau \in \tau \tau \tau.$$

$$\text{すなわち, } X_0^* = - (X_0 + \frac{1}{r} \sum r_i)$$

$$\Delta: X^\alpha \mapsto X_0^* X^\alpha = \left(\frac{-1}{r} \sum r_i (d_i + 1) \right) X^\alpha.$$

$$\text{従って, } R = \left\{ \frac{1}{r} \sum r_i (d_i + 1) \mid \{X^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{Q}/\mathcal{Q}} \text{ の基底} \right\} \text{ として}$$

Theorem. f : quasi-hom. 全標量 (2, weighted hom
 $(r; r_1, \dots, r_n)$ とすとき,

$$b(s) = (s+1) \cdot \prod_{\beta \in R} (s + \beta)$$

semisimple であり $s=0$ は, 証明がつかない (≠).

実は三輪^星により, 2つの Theorem formula が証明されたり,
 計算には都合がよいように使われる。

Theorem. f : weighted-hom $(r; r_1, \dots, r_n)$
 $-S$ の固有値 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu$ $\mu = \dim \mathcal{Q}/\mathcal{Q}$

$$\Rightarrow \sum_{\nu} t^{r\beta_\nu} = \frac{(t^{r_1} - t^r) \cdots (t^{r_n} - t^r)}{(1 - t^{r_1}) \cdots (1 - t^{r_n})}$$

従って, この右辺を展開して $\sum g_i t^i$ とすれば,

$$\text{固有値多項式} = \prod (s + \frac{i}{r})^{g_i}$$

$$b(s) = (s+1) \cdot \prod_{g_i \neq 0} (s + \frac{i}{r})^{g_i}$$

(*) この Theorem Bannai: Lie Alg. に対しては (従), 正しい。

§ 4. non-quasi-hom. の $f[s]$ の生成. $f(s)$ の生成.

$f(s) = (s+1) \cdot f_1(s)$ と, §. 3 と同様にして, 今回は S は消去されるので,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 &= \mathcal{O}[s](s+1)f^{\circ} / (\mathcal{O}[s](s+1)f^{\circ} \cap \mathcal{O}[s]f^{\circ+1}) \\ &= \mathcal{O}[s] / f[s] + \mathcal{O}[s]f + \sum \mathcal{O}[s]f_i. \end{aligned}$$

以下 f : isolated sing. は常に仮定.

$f[s] = \{ p_0(x, D)A^l + \dots + p_l(x, D) \}$ a generator を生成.

証明は $\pm$ で 事実を列挙すると,

Prop. 1. $l=0$ の generator は $f: D_j - f_j D_i$ の形.

Prop. 2. $(A: f) = (a_0^1(x), \dots, a_0^r(x))$ とする.

$$a_0^r(x)f + \sum a_i^r(x, D)f = 0.$$

$$\therefore \underline{a_0^r(x)A + a_1^r(x, D)} \in f[s].$$

$l=1$ のときは, 同様に f と l 次 f の生成.

一般の場合にはこれ以上できない. 今, $S^2 + SA + B \in f[s]$ と仮定しよう. f が与えられ, A の形は消去され, Prop. 1.2 で与えたものと, $C = p_0$ のもとで $f[s]$ が生成される.

$$\text{すなわち, } f[s] = (S^2 - SA - B, XS - X, YS - Y)$$

と仮定しよう. (二変数)

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{O}[s] / f[s] + \mathcal{O}[s]f + \mathcal{O}[s]f_x + \mathcal{O}[s]f_y \quad \text{と仮定}$$

M_0 は $\mathcal{O}$ -module として $1, \alpha$ で生成される。

Prop. 3. $\mathcal{O}u \oplus \mathcal{O}v \longrightarrow M_0$
 $(pu, qv) \longmapsto p + qs$

α Kernel は, $\left\{ \begin{array}{l} xv = Xu, yv = Yu, \\ f_v \quad f_x v \quad f_y v \\ f_u \quad f_x u \quad f_y u \end{array} \right\} \quad \textcircled{*}$

で生成される。

これにより, $b(n)$ の計算法がわかる。

$\text{Hom}_{\mathcal{O}}(M_0, \mathcal{O}_{\text{pt}}) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_{\text{pt}} ; \textcircled{*} \right\}$.

即ち, $\begin{pmatrix} fu = fxu = fy u = 0 \Rightarrow xv = Xu \\ fu = fxv = fy v = 0 \Rightarrow yv = Yu \end{pmatrix} \textcircled{*}$.

手帳としては, まず $\mathcal{O}$ を $\mathcal{O}_{\text{pt}}$ として u をとり, $\textcircled{*}$ を満たすように v を定める。compatibility condition $xY - yX \in \mathcal{O}(f_x \mathcal{O}_2 - f_y \mathcal{O}_2)$ を満たされていなければならない, $v \in \text{mod } \mathcal{O}(u, y)$ で unique.

すると, 容易にわかるように $f_x v = f_y v = 0$ となる。又, $S^2 - SA - B \rightarrow$
 $\text{存在} \quad f_v = 0 \quad \text{がわかる。}$

u と v は $\mu-1$ 個の $\mathcal{O}/\mathcal{O}_{\text{pt}}$ の代表元として, u を選んで, $Y u = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x, y) \end{pmatrix}$ とおけるように v を μ 個に取る。

さて, u, v の選定より, $\begin{cases} Su = v \\ Sv = Av + Bu \end{cases}$

$\therefore \mathcal{O} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & A \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ となるので, $\mathcal{O}$ の作用がわかる。

あとは行列の計算。 $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, e_{\mu-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ において,

$\mathcal{O}$ を行列で表すことができる。

$\Omega \otimes m_0$ であるから, Prop. 3 の 8) ⑩ を用いて

$$0 \leftarrow m_0 \leftarrow \mathcal{O}^2 \leftarrow \mathcal{O}^8 \quad \text{と, resolution を}$$

$$0 \leftarrow \Omega \otimes m_0 \leftarrow (\mathcal{O}^n)^2 \leftarrow (\mathcal{O}^n)^8 \quad \text{とすると, たいたい}$$

$\mathcal{O}^2$ の quotient space として表わした ⑤) で十分である.

$$\begin{aligned} \Omega \otimes m_0 &= \mathcal{O}^2 / \left(\begin{pmatrix} x \\ -x^* \end{pmatrix} \mathcal{O} + \begin{pmatrix} y \\ -y^* \end{pmatrix} \mathcal{O} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{O} + \begin{pmatrix} f_x \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{O} + \begin{pmatrix} f_y \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{O} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathcal{O} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_x \end{pmatrix} \mathcal{O} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_y \end{pmatrix} \mathcal{O} \right) \\ &= (\mathcal{O}/\mathcal{O}')^2 / \left(\begin{pmatrix} x \\ -x^* \end{pmatrix} (\mathcal{O}/\mathcal{O}') + \begin{pmatrix} y \\ -y^* \end{pmatrix} (\mathcal{O}/\mathcal{O}') \right) \quad (\mathcal{O}' = \mathcal{O} + \mathcal{I}) \\ &= \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus (\mathcal{O}/\mathcal{O}') (yx^* - xy^*) (\mathcal{O}/\mathcal{O}'). \end{aligned}$$

計算処理をどうどうする方がよいのだが, quotient より subspace の方が安心してできる.

この決定法から決まることはわかる. 以下に,

$$\begin{aligned} \text{Coker}(\mathcal{O} \xrightarrow{f} \mathcal{O}/\mathcal{O}') &= \mathcal{O}/\mathcal{O}':f \\ \text{Coker}(\mathcal{O} \xrightarrow{f} \mathcal{O}/\mathcal{O}') &= \mathcal{O}/\mathcal{O}'+f \quad \text{より} \end{aligned}$$

$$\mu = \dim \mathcal{O}/\mathcal{O}' = \dim \mathcal{O}/\mathcal{O}':f + \dim \mathcal{O}/\mathcal{O}'+f. \quad \text{に注意せよ.}$$

μ としてとりうるのは一般に $\dim \mathcal{O}/\mathcal{O}'+f$ (個). $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ の形でとりうるのは $\dim \mathcal{O}/\mathcal{O}':f$ である. ⑩ ⑪ とは.

Prop. 4. $f(s) \in s^2 - sA - B$, とすると,

$\mu(s)$ にせいぜい double factor しか含まず, しかも含むとしても ⑩ ⑪ 個は $\dim \mathcal{O}/\mathcal{O}':f$ (個) 以下である.

$L(f) = 2$ にはけろ注意.

f : isolated non-quasi-hom. のとき, 一般に $\dim \text{Hom}(M_0, B_{pt})$ が μ である (この) のからなる。
 だが, $L(f) = 2$ にはけろ確認されてる。

$$L(f) = 2 \Leftrightarrow \begin{aligned} &1. f \notin \mathcal{O} \quad (\Leftrightarrow \text{Hess } f \in \mathcal{O} + f) \\ &2. \exists p(\rho, x, \xi) = \rho^2 + (\sum a_i \xi_i) \rho + \sum a_{ij} \xi_i \xi_j \\ &\quad \text{s.t. } p(f, x, df) = 0. \\ &3. \exists (a_{ij}) \text{ により, } \sum a_{ij} f_{ij} \in \mathcal{O} + f. \end{aligned}$$

このとき, 2, 3. を用いて, $\exists p(\rho) = \rho^2 + A(x, D)\rho + B(x, D)$
 $p(\rho)f' = 0$, $\sigma(P) = p$ となるのである。

Theorem $L(f) = 2 \Rightarrow \dim \text{Hom}(M_0, B_{pt}) = \mu$.

すなわち, $(\rho$ の表現行列) $= S + N$ S : semisimple N : nilpotent
 としたとき, $N^2 = 0$. 又, nilpotent とき Jordan block は,
 高々 $\dim \mathcal{O}/\mathcal{O}f$ 個である。

この部分, 条件を付けると
 厳密にはまだ示せて
 いない。

Proof) $f(s)$ は $f_i D_i - f_j D_j$, $a_\nu(x) \rho - a'_\nu(x, D)$, $\rho^2 - A\rho - B$
 により生成される。ここには $\{a_\nu(x)\}$ は $\mathcal{O}f$ の basis であり。

$a_\nu(x)f = \sum a_{\nu,j}(x) f_j$ のとき, $a'_\nu(x, D) = \sum a_{\nu,j}(x) D_j$ と
 書くことができる。従って, (1)。

$$a_\mu(x) a'_\nu(x, D) - a_\nu(x) a'_\mu(x, D) \in \sum \mathcal{O} (f_i D_i - f_j D_j) \quad (*)$$

$$M_0 = \mathcal{O}[s] / f(s) + \mathcal{O}[s] f + \sum \mathcal{O}[s] f_i = \mathcal{O} \cdot 1 + \mathcal{O} \cdot s$$

$$= \left(\mathcal{O}[s]^{(s+1)} f' / (\mathcal{O}[s]^{(s+1)} f' \cap \mathcal{O}[s] f^{(s+1)}) \right)$$

$$\text{Hom}_S(M_0, B_{pt}) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in B_{pt}^2 \mid f_i \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0, \quad f \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0, \quad \right. \\ \left. a_\nu(x) v = a'_\nu(x, D) u \right\}$$

ここで $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ あるいは $\begin{pmatrix} f^0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対応してとった。

$$\Lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{が } \Lambda \text{ の作用である。}$$

$f_i u = f v = 0$ をみたす $u \in B_{pt}$ をとる。 $\dim \mathcal{O}/\mathfrak{m} + f$ 個ある。

(*) により, 方程式 $a_\nu(x) v = a'_\nu(x, D) u$ は解ける。

直前に述べた u に対して α も β 以外に, $u=0$ に対応する解が $\dim \mathcal{O}/\mathfrak{m} + f$ 個ある。(個数は必ずしも独立なベクトルをいっている) この v の v が, $f_i v = f v = 0$ をみたせば,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \dim \mathcal{O}/\mathfrak{m} + f \text{ 個}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \dim \mathcal{O}/\mathfrak{m} + f \text{ 個} \quad \mu = \dim \mathcal{O}/\mathfrak{m} + f + \dim \mathcal{O}/\mathfrak{m} + f$$

より, 定理前半は従う。 $A(x, D) = \sum a_i(x) D_i$ $B(x, D) = \sum a_{ij}(x) D_i D_j$ としよう。 $\sum a_{ij} f_i f_j \in \mathfrak{m} + f$ に注意せよ。

$$f_i(\Lambda f^0) = (D_i f - f_i) f^0$$

$$f(\Lambda f^0) = \left\{ \sum a_i(x) (D_i f - f_i) + \sum a_{ij} D_i f_i - \sum a_{ij} f_i f_j \right\} f^0$$

がわかる。 $\Lambda^2 = A(x, D)\Lambda - B(x, D)$ を用いた。

u を f^0 とおきとき, u が Λf^0 であるから, このより

$$f_i v = f v = 0 \quad \text{が,} \quad f_i u = f u = 0 \quad \text{から従う。}$$

後半。

$f^2 \in \mathfrak{m}^2 + \mathfrak{m}f \therefore \mathfrak{m} + f \subset \mathfrak{m} + f$. $\text{Hom}_S(M_0, B_{pt})$ の basis $\{e_i\}$ を

$$e_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \quad i=1, \dots, 2m+1 \quad \text{にとる。} \quad 1 \leq i \leq 2m \quad m = \dim \mathcal{O}/\mathfrak{m} + f \quad \text{より}$$

$$e_{2j-1} = \begin{pmatrix} u_{2j-1} \\ v_{2j-1} \end{pmatrix} \quad e_{2j} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{2j} \end{pmatrix} \quad u_{2j-1} = v_{2j} \quad 1 \leq j \leq m.$$

$$i \geq m+2 \quad e_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \quad \text{この } u_i \text{ は, 従って } \dim \mathcal{O}/\mathfrak{m} + f - \dim \mathcal{O}/\mathfrak{m} + f \text{ 個.}$$

最初の m 個は pairs かつ, nilpotent であることがわかる。しかし,

現在, 条件をより厳しくして, 厳密に示している。で,

この以上の省略する。 ■

§5. $f[s]$ の具体的決定に關して.

$Q(x)$ の X への写像は §4. に示したように,
 $a \in Q(f)$ を作つたものに過ぎない.

同様に $a \in Q^2 + Qf : f^2$ とせよ. QPS
 ($Q + Qf : f^2 \supset Q : f$ より, quotient の代とて取れば……)

$$af^2 + (\sum^3 a_i f_i) f + \sum^3 a_{ij} f_i f_j = 0 \quad \text{--- ①}$$

この a_{ij} について,

$$\sum a_{ij} f_i f_j + \sum b_i f + b f = 0 \quad \text{--- ②} \quad f_j = \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}$$

とすれば b_i, b が定まつたことよ. γ とせよ,

$$A = -\sum a_i D_i + a - b$$

$$B = -\sum a_{ij} D_i D_j + \sum (a_i - b_i) D_i \quad \text{と置く,}$$

$$a\Delta^2 - A - B \in Q[s] \quad \text{であることは確か}.$$

又, 適当な γ を選べば,

$$p_2(s, x, \gamma) = a\Delta^2 + (\sum a_i \gamma_i) a + \sum a_{ij} \gamma_i \gamma_j \quad \text{とて.}$$

Prop. $p_2(f, x, df) = 0$ のとき, $\sigma_2(P) = p_2$ である 2 階の
 作用素の存在する必要十分条件は

$$\sum a_{ij} f_{ij} \in Q + (f).$$

後に γ を Prop を用い, $p_2(f, x, df) = 0$ である γ は γ の
 principal symbol にする作用素の存在する γ のことを γ を
 示す. (p.)

次に $a\Delta^3 + \dots$ について考えてみよう.

$$a\lambda^3 + \dots \quad a \text{ 求める } \lambda \text{ 一つ.}$$

$$a \in \mathcal{O}f^2 + \mathcal{O}f + \mathcal{O}f^3 : f^3 \text{ と } \text{せよ. } \gamma \text{ 41 により } \neq \text{す}$$

$$\textcircled{1} \quad \sum a_{ijk} f_i f_j f_k + (\sum a_{ij} f_i f_j) f + (\sum a_i f_i) f^2 + a f^3 = 0.$$

次に b_{ij} と b_i , b を なる と か も と け 3.

$$\textcircled{2} \quad \sum a_{ijk} (f_i f_{jk} + f_j f_{ki} + f_k f_{ij}) + \sum b_{ij} f_i f_j + (\sum b_i f_i) f + b f^2 = 0$$

こ の か も と ま, c_i と c を け と け ?

$$\textcircled{3} \quad \sum a_{ijk} f_i f_{jk} + \sum b_{ij} f_{ij} + \sum c_i f_i + c f = 0$$

f_i 一 つ 修 正 に

$$\textcircled{4} \quad \sum a_{ij} f_{ij} + \sum d_i f_i + d f = 0.$$

こ の か 全 部 求 め る と 2 つ だ.

$$\gamma 17 \quad p(\lambda) = a\lambda^3 - A\lambda^2 - B\lambda - C$$

$$\begin{aligned} &\equiv \sum a_{ijk} D_i D_j D_k + (\lambda - 2) \sum a_{ij} D_i D_j + (\lambda - 2)(\lambda - 1) \sum a_i D_i \\ &\quad + \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) a + \sum b_{ij} D_i D_j + (\lambda - 1) \sum b_i D_i \\ &\quad + \lambda(\lambda - 1) b + \sum c_i D_i + \lambda c + (\lambda - 2) \sum d_i D_i + \lambda(\lambda - 2) d \end{aligned}$$

と 決 る. $\textcircled{1}$ $\textcircled{2}$ $\textcircled{3}$

$$\begin{cases} A = -\sum a_i D_i + (3a - b - d) \\ B = -\sum a_{ij} D_i D_j + \sum (3a_i - b_i - d_i) D_i + (-2a + b + C + 2d) \\ C = -\sum a_{ijk} D_i D_j D_k + \sum (2a_{ij} - b_{ij}) D_i D_j + \sum (2a_i + b_i - c_i + 2d_i) D_i \end{cases}$$

$$\text{す べ し } p(\lambda) \neq 0. \quad \sigma(p(\lambda)) = a\lambda^3 + (\sum a_i f_i) \lambda^2 + (\sum a_{ij} f_i f_j) \lambda + \sum a_{ijk} f_i f_j f_k$$

上 で わ か る よ う に $\textcircled{4}$ か ら $\sum a_{ij} f_{ij} \in \mathcal{O} + \mathcal{f}$ γ 41 に, $\textcircled{2}$ で 求 め た b_{ij} に 対 し て, $\textcircled{3}$ $\sum a_{ijk} f_{ijk} + \sum b_{ij} f_{ij} \in \mathcal{O} + \mathcal{f}$ γ 41 が, P の 存 在 の 必 要 条 件 に な っ て く る.

し か し, 一 冊 に こ の よう に 求 め る の が 解 率 が 悪 い. 例 々 の 場 合 に ② と ③ を 求 め ば 可 い.

次の命題は、(1)より便利である。

作問として、 $x \in D$ の式に与えられた制限する

x_D とは $(x_1, \dots, x_n)$ の略記。 $x_D - a$ とは $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$

の略記。又、 $R(\rho, x, D)$ $\rho \geq 1$, $R^{(\nu)}$ とは

$$R(\rho, x, D) = \sum a_\alpha D^\alpha \quad R^{(\nu)} = \left[\left(\frac{2}{\rho} \right)^\nu (\sum a_\alpha \xi^\alpha) \right]_{\xi \mapsto D}.$$

Prop. $P(\rho, x, x_D) f^\rho = p(\rho) x^\alpha \varphi(x) f^{\rho-\ell}$
 $Q(\rho, x, x_D) f^\rho = q(\rho) x^\beta \psi(x) f^{\rho-m}$

$$\Rightarrow Q(\rho-\ell, x, x_D - a) P(\rho, x, x_D) f^\rho \\ = p(\rho) q(\rho-\ell) x^{\alpha+\beta} \varphi \psi f^{\rho-\ell-m} + \sum_{|\nu| \geq 0} \frac{D^\nu \varphi}{\nu!} (Q^{(\nu)}(\rho-\ell, x, x_D) f^{\rho-\ell})$$

証明は容易。

§6. 予想 K_{dec} と $L(\dagger)$

予想 K は, $\exists p^k + \dots \in f[s]$ を主張するが, さらに精密に, 次の予想 K_{dec} (主部分解に関する相原の予想) がある.

$$\text{予想 } K_{dec} \quad \exists P(\rho) \text{ } l\text{-階} \in f[s], \text{ s.t.} \\ P(\rho) = \prod_{i=1}^l (s - a_i(\rho)) + \sum_{j=1}^N A_j(x, D) s^{k-1}$$

$$\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n) \quad \rho_i = x_i D_i \quad \textcircled{1} \quad a_i(\rho) = \sum a_{ij} \rho_j - c_i$$

$$\textcircled{2} \quad A_j(x, D) \text{ は higher order}^*$$

$$\textcircled{3} \quad c_i \geq 0 \text{ rational number}$$

$$\textcircled{4} \quad a_{ij} \geq 0$$

$$\text{又} \left(\begin{array}{l} \textcircled{3}' \quad c_i : \text{rational}, a_{ij} : \text{rational.} \\ \textcircled{4}' \quad a_i(\rho_1, \dots, \rho_n) < 0 \text{ if } \rho_1 \leq -1, \dots, \rho_n \leq -1. \end{array} \right)$$

この予想にいたる経路は次の通りである。佐藤は, link S_I に関する計算で, 2階の作用素がこのような形になることを示した。相原は, 始め, この形の $c_i = 0$ のものを予想した。それが成立するとはすれば, 色々ありうべき状態のみにてなっている。 (e.g. $h(s)$ の根の strict negativity) $\frac{1}{4}(x^4 + y^4 + z^4) - xy^2$ において, 当初主部は分解されようになかったが, 相原は, 分解できようとして修正でまゐることを示した。その後, 三橋の例にもとづき, 矢野は一般に c_i を入れようべきことを主張し, 結局 $\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3}' \textcircled{4}'$ をもって予想とするようになった。

higher order の解釈は, 当初は $A_j(x, D) = \sum_{i=1}^n a_{ji} D_i^{\alpha_j}$

$\alpha_j \in \mathbb{N}^{n+1}$ であつたが, 佐藤と天野は,

" $\{a_i(\rho)\}$ に即して higher order で" と訂正

* この解釈は下でやる。

$s \neq 0 = \lambda$
 $\Gamma \forall i$ について, $\checkmark$ χ_k^0 を a_{ik} 次, D_k を $-a_{ik}$ 次と
 おく. $t=2$ ときには, $\sum_{j=1}^N A_j(x, D) s^{a-j}$ などの項も strict に
 正の次数をもつ* とおぐべきである) と主張した。
 その後, 矢野は, ③' ④' を, ③ ④ にまで強めてよりである)
 と予想した. (以上).

かくも 長き 厂 を もつ 予想 であるが, 現在 のところ,
 ともかく 反例 は ない。

Prop. 予想 $K_{dec} \Rightarrow f(s)$ の 根 は $\exists (v_1 \dots v_n), \exists i,$
 $— (\sum a_{ij} v_j + c_i)$ という形.

これは 容易.

この $a_{ij}(v)$ は 必ず canonical に 決定 される と 文句.

(l 以上 大 のとき) 以下 $\sum a_{ij} v_j = X_i$ と かく.

第三章 §2 において, simplex type function に対しては,
 X_i が どの よう にと かわ いても, 示 して みる.

さて, K_{dec} が 成 立 した と し た. なる とき,

$\Delta^{l+1} \subset f[s]$ と なる 最小 の l に対 して も, $X_1 \dots X_l$
 によつて, 分解 された 主部 を つく る であ る じや? という 予
 言 的 である. (T.p.f. etc) 一般 に,

$$(s - Y_1 + c_1) \dots (s - Y_l + c_l) + \dots$$

と, なる $t=2$ のとき, Y_i は どの X_j と 等 しく なる じや? であり, f に
 associate した standard な $X_1 \dots X_l$ (他にも standard な K)
 に対 して, complementary operators が 必要 となる.

(l より 下の, $a_{ij}(s - Y_1 + c_1) \dots$ など) に対 して, complementary
 が 必要 になる). complementary operators が, どの よう なる
 もの であ る じや? にか, につ いて も 色 め かわ けて いる.

* この 定義, も と なる に ついても, 一般 に は, 必ず 空 間 変 換 して みる こと, は くら び 大 変 あり ます.

ともかくも, K_{dec} か), $h(s)$ の根の因子はわかる。
 operators については, 未ヨリわかる。特に, $h(s)$ の
 multiple factors の決定には, $s^l + \dots \in \mathbb{Q}[s]$ とする
 最小の l を決定すべきことになる。

Def. $s^l + \dots \in \mathbb{Q}[s]$ とする最小の l を $L(f)$ と記す。

symbol の段階で, i.e. $f^l \in \mathbb{Q}^l + \mathbb{Q}^{l-1}f + \dots + \mathbb{Q}f^{l-1}$ とする
 最小の l は, $L'(f)$ と記すことにする。 $L'(f) \leq L(f)$ $L'(f) \rightarrow$

Appendix 4 によれば $L'(f) \leq \mu$ if f : isol. sing. poly.
 γ の加藤の方法に従えば, f : polynomial なとき,
 $\exists \Theta_1, \dots, \exists \Theta_n$ vector fields s.t.

$$\frac{\partial(\Theta_1 f, \dots, \Theta_n f)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0 \text{ near } x=0 \quad (\text{とわかる}),$$

$$\mathbb{C}_x^n \rightarrow \mathbb{C}_y^n$$

$x \mapsto (\Theta_1 f, \dots, \Theta_n f)$ は generically surjective.

$\gamma = \gamma$ generic point γ の fibre の個数を l とすれば,
 $L'(f) \leq l$ がわかる。特に, $X_i = D_i = \gamma$ ならば,

Prop. f : polynomial (not nec. isol. sing)

$$\text{Hess}(f) \neq 0 \text{ near } 0$$

$\Rightarrow x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$ 1 generic point の fibre の
 個数を l とすれば, $L'(f) \leq l$.

第三章において, f : simplex type なとき, 予想 K_{dec} の
 成立とともに, $L(f)$ の評価法を示している。

$h(s)$ の monodromy の最大多項式と一致するとすれば,

Prop. $L(f) \leq d$ とき, monodromy 行列 $M = SN$
 (S : semisimple N : nilpotent) としたとき, $N^d = 0$

Melnyak の $nT(2n+2); (2)$ については $L(f) = n$ (cf. 第 3 章 §3)
 $\gamma \mapsto N^{n-1} \neq 0, N^n = 0$.

quasi-hom とは, $L(f) = L'(f) = 1$ ときでなく,
 monodromy は semisimple であった.

色々な問題が生ずる.

- non-quasi-hom とき, いかほどの条件をもとて $L(f) = 2$?
 - 又, $L(f) \geq 3$ の判定条件は? (……たぶんさかす. cf. Appendix 3)
 - n 次元で $L(f) < n$ とする条件は?
 - 現在のときは, $L(f) = L'(f)$ だが, 一般に正しいか?
- 読者も, 以下のさまざまな例をみて考えよう.

$\gamma = 2$, 少し前にも述べた, $L(f)$ 階の作用まで,
 主部を分解したものとすると, 本質的にこの $L(f)$ の
 何れかある $L(f)$ である. (cf. type M in 第 2 章 §2.

第 4 章 §4 の例 1) この事情はどう説明すべきか.

$V: f = m$ とし, $\gamma = 2$ と, 関係があると思っただけが,
 γ のように $\gamma = 2$ は, $V: f = m$ ともなうかも知れないか?

又, m 次元の場合, complementary operators が $L(f)$ 階の
 もつてあるかも知れないと, $m > L(f)$ との関係は?

$V: f$ が m 個で生成されれば $L(f) \leq n$?

以下をすべてとすれば, この γ をよめかえていたはず
 だと思う.

第二章 2変数における函数.

2変数における monodromy は, 首先知られていた Alexander polynomial, Alexander matrix によりすべてわかり, (但し成る2以上の場合 Fox の変数と理論による) 色々詳しくここに書き知られており, 美例の検証により, monodromy theory の結果と, 我々の $\Delta(t)$ の, 色々な場合における計算を以下にします.

§. 1. monodromy theory より.

まず, 2変数においては, isolated sing. であっても, irreducible とは必ずしも $n=2$ に注意せよ. $S_f \cap \{f(t, y) = \varepsilon\}$ は link であるが, これが iterated torus knot といわれるもの $n=2$ によってなっており $n=2$ は, かなり前から知られていた. monodromy の固有多項式, 最小多項式は, Alexander matrix を経由して求まることが, 他にも色々な方法で可能である.

1. irreducible case.

Theorem 1 (Lê Dũng Tráng) $f(x, y)$: analytically irreducible at $(0, 0) \Rightarrow$ monodromy is finite order.

(i.e., monodromy matrix は, 何乗かして identity matrix)

この場合, Alexander polynomial = monodromy の固有多項式 $\Delta(t)$

として, 色々な結果にもなる.

$$\text{ord}_0(f_0, y) = \text{ord}_0 f(x, y) = N \quad \text{z.t.h.}, \quad \exists \varphi(t) \in \mathbb{C}\{t\}$$

$f(x, \varphi(x^{1/N})) = 0$ であるが, ここで Puiseux series を
 $\frac{1}{N}$ 中へかくとまた, 分母の中分母は, 必要になる $2 > 2$ になり
 $\text{ord} = 2$ となる. EPJ

$$\varphi(x^{1/N}) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{1,i} x^{\frac{m_1+i}{n_1}} + \cdots + \sum_{i=0}^{k_2-1} a_{j-1,i} x^{\frac{m_{j-1}+i}{n_1 \cdots n_{j-1}}} + \sum_{i=0}^{\infty} a_{j,i} x^{\frac{m_j+i}{n_1 \cdots n_j}}$$

ただし $N = n_1 \cdots n_j$. とりおかし $(m_j, n_j) = 1$.

こゝに, characteristic index of $f = g$.

f の ch. pairs $\left\{ \binom{m_1}{n_1} \cdots \binom{m_j}{n_j} \right\}$ とし.

$\lambda_1 \cdots \lambda_j$ z.t.h. inductive 1: z.t.h. ~~z.t.h.~~

$$\lambda_1 = m_1, \quad \lambda_i = m_i - m_{i-1} n_i + \lambda_{i-1} n_i n_{i-1}$$

$$Y = z, \quad P_{\lambda, n}(t) = \frac{(t^{\lambda n} - 1)(t - 1)}{(t^{\lambda} - 1)(t^n - 1)} \quad \text{z.t.h.} < z,$$

$$\text{Theorem 2} \quad \Delta(t) = \prod_{i=1}^j P_{\lambda_i, n_i}(t^{n_1 \cdots n_i})$$

example. $2 \leq p \leq q$ $(p, q) = 1$. $mp = nq + 1$ $z.m, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

$$Y(p, q) \quad (x^q - y^p)^q - x^m y^{p^2 - n} = 0 \quad \text{z.t.h.} \text{ ch. pairs } \left(\binom{q}{p}, \binom{q^2+1}{q} \right)$$

$$S(p, q) \quad (x^q - y^p)^p - x^m y^{p^2 - n} = 0 \quad \text{z.t.h.} \text{ ch. pairs } \left(\binom{p}{p}, \binom{p^2+1}{p} \right).$$

$$\Delta_1(t) = \frac{(t^{p^2} - 1)(t^{(p^2+1)q} - 1)(t - 1)}{(t^{q^2} - 1)(t^{p^2} - 1)(t^{p^2 q + 1} - 1)} \quad \mu = q(q-1)\{(q+1)p - 1\}$$

$$\Delta_2(t) = \frac{(t^{p^2} - 1)(t^{(p^2+1)p} - 1)(t - 1)}{(t^{p^2} - 1)(t^{p^2} - 1)(t^{p^2 q + 1} - 1)} \quad \mu = p(p-1)\{(p+1)q - 1\}$$

$$3. \quad \{(x^3 - y^2)^2 - x^2 y^3\}^3 + (x^3 - y^2)^4 y^4 = 0 \quad \text{z.t.h.}$$

$$\text{ch. pairs } \left(\binom{3}{2}, \binom{7}{2}, \binom{15}{2} \right) \quad \Delta(t) = \frac{t-1}{t^8-1} (t^{12}+1)(t^{26}+1)(t^{53}+1) \quad \mu = 84.$$

Theorem 3 (A'Campo) $\neq(x,y)$ の ch. index ≥ 2

$\Rightarrow$ geometric monodromy は finite order でなる。
(i.e. geometric monodromy を 7) 回 iterate (≠ id に isotopic なる))

例 5. geometric = 17, 複雑さ = 2 だが $\chi = 2$ である。

ch. index = 2 なる $\mu(p)$ の例は p . 2 だけ

2. reducible case.

この場合, Fox による方法が一般に用いられる。要するに, Alexander matrix Σ , link は Σ の $\mathbb{Z}$ 上の 2 。詳細は Fox [14] を参照。一般に monodromy の固有方程式 $= \chi(t) (= \delta(t))$ monodromy の最小多項式 $= f(t)$ とおく。

最も簡単な (nontrivial) link $(x^2+y^3)(x^3+y^2) = 1$ として
Torus knot を用いた ときには $f(t) = (t^5+1)(t^2-1)$ となる

$t = -1$ が double. 場合によっては $t = 1$ とき, knot している。

4 個の S^1 の link $(t = t_i)$ の $xy(x+y^2)(x^2+y)$ として

$f(t) = (t^6-1)(t+1)$ となる $t = -1$ が double.

これらについて $\mu(p)$ の一般論は §3 を参照。2. 個別の例については p. 44~46 を参照。

4 個の knot している S^1 と, $(2,3)$ knot の link として

$(x^2+y^3)(x^2y^2+x^6+y^6)$ として, A'Campo の方法で

$\chi(t) = (t-1)(t^8-1)(t^9-1)(t^{10}-1)$ とおくと,

$\mu(p)$ の直積の色を意味するが, 計算が煩雑。

尚, A'Campo の resolution を用いた方法で

$(x^h+y^h)(x^h+y^h)$ の $\chi(t)$ を決定する方法は 1971 [19].

* もう少し補足しておく.

k は knot に對し, $\pi_1(S^3 - k)$ は k の knot group と
いわれるが, torus knot (より正確に *classical*) の場合,
この定理が知られている.

Theorem 4 $\pi_1(S^3 - k)$ の commutator group を G' とすれば

G' は free, finitely generated.

(かつ $\text{rank } G' = \mu$ (Milnor #))

で, μ は parametrization から決定されるから便利.

$$\begin{cases} x = t^{a_0} \\ y = \lambda_1 t^{a_1} + \lambda_2 t^{a_2} + \dots \end{cases} \quad \lambda_i \neq 0. \quad \text{etc.}$$

$$D_j = \text{g.c.d. } \{a_0, \dots, a_j\} \in \mathbb{Z}, \quad a_0 = D_1 \geq D_2 \geq \dots \geq D_k = 1 \quad (2k)$$

$$\Rightarrow \mu = \sum_{j=1}^k (a_j - 1)(D_j - D_{j+1})$$

reducible case で, k は k の double pt の個数 δ
branch の個数 r とすれば

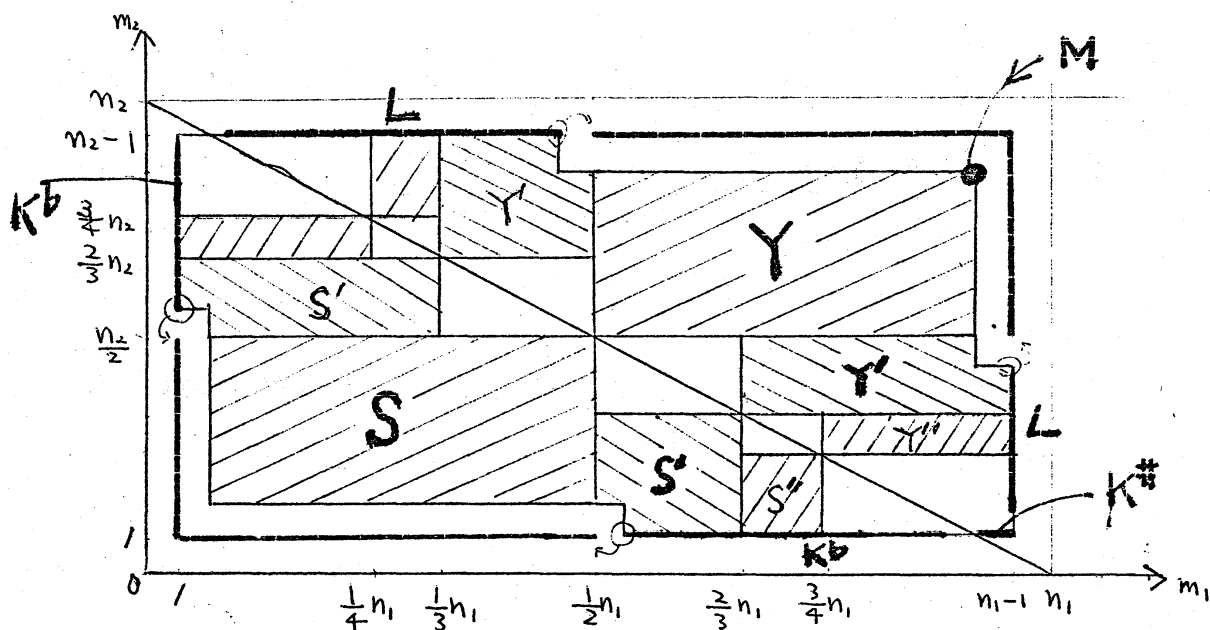
$$\text{Theorem 5 (Milnor !)} \quad 2\delta = \mu + r - 1.$$

$$\text{従って, } \begin{cases} r: \text{even} \Rightarrow \mu: \text{odd} \\ r: \text{odd} \Rightarrow \mu: \text{even} \end{cases} \quad !!$$

§2. 2変数 quasi-hom-poly. の 1-parameter deformation
に於ける, $b(s)$.

2変数 $q-h-p$. の代表型は I. $x^{n_1} + y^{n_2}$. II $x(x^{n_1} + y^{n_2})$
III. $xy(x^{n_1} + y^{n_2})$. これに $\lambda x^{m_1} y^{m_2}$ を加えて, 状次を
しよる. 尚 S_I, S_{II}, S_{III} は link を表示と重複する.
尚, これ) について $U: f$ は完全に決定されている. (1974. 109)

$$I. \frac{x^{n_1}}{n_1} + \frac{y^{n_2}}{n_2} - \lambda x^{m_1} y^{m_2}$$



monomial $x^{m_1} y^{m_2}$ の (m_1, m_2) は上の図からとる.

主対角線より上は $x^{m_1} y^{m_2}$ が高次. 下では低次.

$m_1=1$ or $m_2=1$ で 低次のものを K^b . 高次のものを $K^\#$.

$m_1=n_1-1$ or $m_2=n_2-1$ のものを L . $m_1=n_1-2, m_2=n_2-2$ を M .

ただし 右上 Γ と左下 L は quasi-hom な q で各前は
つけない. Y と他 S, Y, S', Y' などをつける.

II, III と区別するときには, S_I を S' と I を S とする.

$m_1=n+1, n_2=n, m_1=n, m_2=1$ といふ $K^\#$ と特に K とする.

(1) 概説.

主対角線より上では $\mu = (n_1 - 1)(n_2 - 1)$ で 1 個は 11 として
一つの作用素 X_0 が支配する.

$$X_0 = \frac{1}{n_1} x D_x + \frac{1}{n_2} y D_y.$$

下では $\mu = (m_1 - 1)n_2 + (m_2 - 1)n_1 + 1$ であり, 二つの作用素

X_1, X_2 があって, $m_1 = 1$ では X_2 , $m_2 = 1$ では X_1

$(m_1 - 1)(m_2 - 1) \neq 0$ では X_1, X_2 の 2 つともが支配する.

$$\begin{cases} X_1 = \frac{1}{m_1 n_2} \{ (n_2 - m_2) x D_x + m_1 y D_y \} \\ X_2 = \frac{1}{m_2 n_1} \{ m_2 x D_x + (n_1 - m_1) y D_y \} \end{cases}$$

即ち, $c = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} - 1$ とすると, $c > 0 \Rightarrow X_0$, $c < 0 \Rightarrow X_1, X_2$.

$c = 0$ なる j もしくは ∞ weighted hom.

$\exists \lambda + \dots \in f[S]$ とする λ は S, Y での 2.

S', Y' での 3. S'', Y'' での 4

一般に $\min(n_1, n_2)$ とまで評価される. かつ ∞

実際により小さな λ であることがあふ.

S は link 式表示で佐藤が初めて計算した.

$K^b K^{\#}$ は Arnold の $K_{12} \sim K_{14}$ ともあるが, 特に K の重要性
に注目し, いくつか計算した 極限に与える.

M は, 特に三輪が着目したものの (一般化) であり, 興味
ある事象が発生する. Y は筆者の頭文字より.

L は K と M の両方としてつけた.

(ii) *quasi-hom* $\Rightarrow 2 \neq 1$.

┌ $131) \geq 17, \quad \frac{x^{n_1}}{n_1} + \frac{y^{n_2}}{n_2} - t x^{n_1-1} y^{n_2} \quad (n_2 \geq \frac{n_1}{2})$

$$(\rho - X_0) + \left(\frac{1}{n_1 n_2} - \frac{1}{n_2} \right) \frac{t m_2 y^{2m_2-n_2+1}}{\varphi} \left(y^{n_2-m_2-1} D_x + t(n_1-1) x^{n_1-2} D_y \right)$$

$$\varphi = 1 - t^2 m_2 (n_1-1) x^{n_1-2} y^{2m_2-n_2}$$

$\neq$; $\rightarrow$ 同様.

┌ X_2
└ X_1

$$\frac{x^{n_1}}{n_1} + \frac{y^{n_2}}{n_2} - x^{m_1} y$$

$$(\rho - X_1) + \left(\frac{m_1}{n_1} + \frac{1}{n_2} - 1 \right) \frac{x^{n_1-2m_1+1}}{m_1 - x^{n_1-2m_1} y^{n_2-2}} \left(\frac{y^{n_2-1}}{m_1} D_x + x^{m_1-2} D_y \right)$$

$$\frac{x^{n_1}}{n_1} + \frac{y^{n_2}}{n_2} - x y^{m_2}$$

$$(\rho - X_2) + \left(\frac{m_2}{n_2} + \frac{1}{n_1} - 1 \right) \frac{y^{n_2-2m_2+1}}{m_2 - x^{n_1-2} y^{n_2-2m_2}} \left(y^{m_2-2} D_x + \frac{x^{n_1-2}}{m_2} D_y \right)$$

(iii) $C > 0$.

Y $\alpha: f = (x^{n_1-m_1-1}, y^{n_2-m_2-1}) \quad \varphi = 1 - t^2 m_1 m_2 x^{2m_1-n_1} y^{2m_2-n_2}$

$-p_{\alpha}^{\text{st}}$

$$x^{n_1-m_1-1} (\rho - X_0) - c t y^{m_2} D_x - \frac{t^2}{\varphi} m_1 c x^{2m_1-n_1} \underbrace{(t m_2 y^{m_2-1} D_x + x^{n_1-m_1-1} D_y)}_{y^{2m_2-n_2+1}}$$

$$y^{n_2-m_2-1} (\rho - X_0) - \dots \quad \text{同様.}$$

$= p_{\alpha}^{\text{st}}$

$$(\rho - X_0 + c)(\rho - X_0) - \frac{t^2 m_1 m_2}{\varphi} \underbrace{x^{2m_1-n_1} y^{2m_2-n_2}}_{\varphi} \left\{ (2X_0 - X_1 - X_2 - c) \rho + X_1 X_2 - X_0^2 + X_0 c \right\}$$

$$M \quad \frac{x^{n_1}}{n_1} + \frac{y^{n_2}}{n_2} - tx^{n_1-2}y^{n_2-2} \quad C = 1 - 2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

Y型に含ませるが, 一般に主要部が色々々ある.

標準形は $(\rho - X_0 + C)(\rho - X_0) + \dots$

± 5 は $(\rho + (1 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2})(\rho - X_0)) + \dots$ と " ; 数々あるが,

$(\rho - \frac{n_1 n_2 - n_1 - n_2}{n_1 + n_2} X_0)(\rho - X_0) + \dots$ と " ; あり.

$$K^\# \quad \frac{x^{n_1}}{n_1} + \frac{y^{n_2}}{n_2} - tx^m y^m \quad \begin{array}{l} n_1 < n_2 \quad n_2 - 1 \geq m. \\ m = (n_2 - 1)n_1 + 1 \end{array}$$

$C > 0$ より $m > (1 - \frac{1}{n_1})n_2 > (n_1 - 1)(n_2 - m)$ となる.

$U: f = (y^{n_2-m} - mtx, y^{(n_1-2)(n_2-m)-1}) \ni x^{n_1-2}, x^{n_1-3}y^{n_2-m-1}, \dots$

一般論から $\rho^{n_1} + \dots$ は Z かつ n より $\pm C$ である.

Arnold K_{12} . K_{14} など. 2. Briangon と創りだ.

尚, $K_1 = > 1$ には別紙 添えよ.

Y' $m_1 \geq \frac{2}{3}n_1, \quad \frac{1}{2}n_2 > m_2 \geq \frac{1}{3}n_1.$

$U: (f) \cong (x^{2(n_1-m_1)-1}, x^{n_1-m_1-1}y^{n_2-2m_2-1}, y^{n_2-m_2-1}, x^{n_1-m_1-m_1}y^{m_2})$

$\varphi = 1 - m_1^2 m_2 x^{3m_1-2n_1} y^{3m_2-n_2} \approx 12$

$$\begin{aligned} & x^{2(n_1-m_1)-1}(\rho - X_0) - \frac{C}{\varphi} y^{3m_2-n_2+1} \{ y^{n_2-2m_2-1} (m_1 y^{m_2} + x^{n_1-m_1}) D_x + m_1^2 x^{n_1-1} D_y \} \\ & x^{n_1-m_1-1} y^{n_2-2m_2-1} (\rho - X_0) - \frac{C}{\varphi} \{ (y^{n_2-m_2-1} + m_1 m_2 x^{2n_1-n_1} y^{m_2-1}) D_x + m_1 x^{n_1-1} D_y \} \\ & y^{n_2-m_2-1} (\rho - X_0) - \frac{C}{\varphi} x^{3m_1-2n_1+1} \{ m_2 y^{m_2-1} (x^{n_1-m_1} + m_1 y^{m_2}) D_x + x^{2(n_1-m_1)-1} D_y \} \end{aligned}$$

$(x^{n_1-m_1-m_1} y^{m_2})(\rho - X_0) - C y^{m_2} x D_x$

= 階は省略して,

$\equiv$ 階

$$(1 - X_0 + 2c)(1 - X_0 + c)(1 - X_0) - \frac{x^{2m_1-2n_1} y^{2m_2-n_2}}{\varphi} (B_1 \rho^2 + B_2 \rho + B_3)$$

Y'' または対称に力2の, 4階までで済むことはわかる.

$$(1 - X_0 + 3c)(1 - X_0 + 2c)(1 - X_0 + c)(1 - X_0) + \dots$$

(iv) $c < 0$.

S

$$n_1 \geq 2m_1, \quad n_2 \geq 2m_2, \quad \mu = (m_1 - 1)n_2 + (m_2 - 1)n_1 + 1.$$

$$U: f = (x^{m_1-1}, y^{m_2-1}) \quad \varphi = 1 - \frac{x^{n_1-2m_1} y^{n_2-2m_2}}{t^{2m_1 m_2}}$$

$$x^{m_1-1}(1 - X_2) + \frac{c y^{n_2-m_2}}{t^{m_1 m_2}} D_x + \frac{c x^{n_1-2m_1} y^{n_2-2m_2}}{t^3 (m_1 m_2)^2 \varphi} (y^{n_2-m_2+1} D_x + t m_1 x^{m_1-1} D_y) \\ y^{m_2-1}(1 - X_1) + \dots$$

例によつて, D_x の係数 x^{m_1} と $y^{n_2-m_2}$ は X_2 に等しい ($t = 2$ の時)

$$\text{各 } \frac{m_1 m_2}{n_1 m_2} \text{ と } \frac{(n_1 - m_1)(n_2 - m_2)}{n_1 m_2} \text{ 乗. } y^{n_2-m_2} \text{ の方が高次.}$$

$$= \text{階} \quad (1 - X_1)(1 - X_2) - \frac{x^{n_1-2m_1} y^{n_2-2m_2}}{t^{2m_1 m_2} \varphi} ((X_1 + X_2 - 2X_0 + c)\rho + X_0^2 - X_0 c - X_1 X_2)$$

K^b

$$\begin{cases} \frac{x^{n_1}}{n_1} + \frac{y^{n_2}}{n_2} - t x y^{m_2} & c = \frac{1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} - 1 < 0, \quad m_2 > \frac{n_2}{2} \\ \left(\frac{x^{n_1}}{n_1} + \frac{y^{n_2}}{n_2} - t x^{m_1} y \right) & c = \frac{m_1}{n_1} + \frac{1}{n_2} - 1 < 0, \quad m_1 > \frac{n_1}{2} \end{cases}$$

この場合, 色々とやってみると ≤ 2 になる

また $2m_1 = n_1 + 1$ or $2m_2 = n_2 + 1$ のときは, (ii) L 型の

式で与えられるかのように, あるいは quasi-hom. になっている.

たとえば $x^3 + x y^2 + y^3$ のとき.

よって γ_4 は改訂 $\mathbb{L}$ に含まれる ≥ 2 である。

また $\gamma_1 = \gamma - n$ であるから $\gamma_1 = \gamma - n \geq 1$ である。

$$(1) \quad 3m_2 - 1 \leq 2n_2 \Rightarrow U: (f) = (x, y^{2m_2 - n_2 - 1})$$

(2) $3m_2 - 1 > 2n_2$: m or $m-1$ である $n_2 - m$ であるから ≥ 2 である。

$$a = \frac{m_2}{n_2 - m_2} - 1 \quad \text{or} \quad \frac{m_2 - 1}{n_2 - m_2} - 1. \quad \text{したがって } a = \left\lfloor \frac{m_2}{n_2 - m_2} \right\rfloor$$

$$\text{よって } U: (f) = (x^a, y^{2m_2 - n_2 - 1}, y^{n_2 - m_2 - m_2} x)$$

したがって、色々の場合 $\gamma_1 = \gamma - n$ であるから $\gamma_1 \geq 1$ である。

Arnold K_{13} . W_{13} は ∞ type である。

$$S' \quad \frac{2}{3}n_1 \geq m_1 > \frac{1}{2}n_1, \quad \frac{1}{3}n_2 \geq m_2.$$

$$U: f = (x^{m_1-1}, x^{2m_1-n_1-1}y^{m_2-1}, y^{2m_2-1}, x^{n_1-m_1-m_1}y^{m_2})$$

- P.S.

$$\begin{aligned} & x^{m_1-1}(\rho - X_2) + \frac{C}{\varphi} y^{n_2-3m_2+1} \left\{ y^{m_2-1} (x^{n_1-m_1} + m_1 y^{m_2}) D_x + \frac{x^{2n_1-2m_1-1}}{m_2} D_y \right\} \\ & x^{2m_1-n_1-1} y^{m_2-1} (\rho - X_1) + \frac{C}{\varphi} y^{n_2-2m_2-1} \left\{ \frac{1}{m_1} x^{n_1-m_1} y^{m_2} D_x + m_1 x^{m_1-1} D_y \right\} \\ & y^{2m_2-1} (\rho - X_1) + \frac{C}{\varphi} x^{2n_1-3m_1+1} \left\{ y^{m_2-1} (m_2 x^{2m_1-n_1} + \frac{y^{n_2-2m_2}}{m_1}) D_x + x^{m_1-1} D_y \right\} \end{aligned}$$

$$(x^{n_1-m_1} - m_1 y^{m_2})(\rho - X_1) - \frac{C}{m_1} x^{n_1-m_1} (x D_x)$$

$$\varphi = m_1^2 m_2 - x^{2n_1-3m_1} y^{n_2-3m_2}$$

$\equiv$ P.S. 2

$$(\rho - X_1 - \frac{n_1}{m_1} C)(\rho - X_2)(\rho - X_1) - \frac{x^{2n_1-3m_1} y^{n_2-3m_2}}{\varphi} (B_1 \rho^2 + B_2 \rho + B_3)$$

$$S'' \quad \frac{3}{4}n_1 \geq m_1 > \frac{2}{3}n_1, \quad \frac{1}{4}n_2 \geq m_2 \geq 1$$

色々複雑化するが、 ρ^4 で済む、 γ の作用も17.

$$(\rho - X_1 + 2\frac{n_1}{m_1}c)(\rho - X_1 + \frac{n_1}{m_1}c)(\rho - X_1)(\rho - X_2) + \dots$$

$$(V). \quad \text{一般に } S'_{2 \times 2}, \quad l_1 n_1 \geq (l_1 + l_2) m_1 \quad \text{と } l_1, l_2 \in \mathbb{N}, \quad \text{と } l_1 > 1, \\ l_2 n_2 \geq (l_1 + l_2) m_2$$

$$(\rho - X_1 + (l_1 - 1)\frac{n_1}{m_1}c) \dots (\rho - X_1)(\rho - X_2 + (l_2 - 1)\frac{n_2}{m_2}c) \dots (\rho - X_2)$$

も主要部と+2作れまるといふことができることと $l_1 = (2, 1, 2)$

$$X, \quad Y' \text{ など } l_1 n_1 \leq (l_1 + l_2) m_1 \quad \text{と } l_1, l_2 \text{ により} \\ l_2 n_2 \leq (l_1 + l_2) m_2$$

$$(\rho - X_0 + (l_1 + l_2 - 1)c) \dots (\rho - X_0) + \dots$$

と $l_1 > 1$ 3.

これの事情は以下 II, IV でも同様にあり、
くりかえし(あべ)とせず II, IV では S, Y, a 3
書"ておくので、他は類推せよ。

$$\text{II. } x \times \left(\frac{x^{n_1}}{n_1} + \frac{y^{n_2}}{n_2} - x^{m_1} y^{m_2} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Y}_{\text{II}} \quad m_1 &\geq \frac{n_1}{2} \quad m_2 \geq \frac{n_2}{2} \quad \mu = (n_1+1)(n_2-1)+1 \\ \text{U: } f &= (x^{n_1-m_1}, y^{n_2-m_2-1}) \\ X_0 &= \frac{1}{(n_1+1)n_2} (n_2 x D_x + n_1 y D_y) \quad -R = \frac{(m_1+1)n_2-m_2}{n_2} \\ c &= \frac{1}{(n_1+1)n_2} (m_1 m_2 - (n_1-m_1)(n_2-m_2)) \\ \varphi &= 1 - R x^{2m_1-n_1} y^{2m_2-n_2} \end{aligned}$$

—P管

$$\begin{aligned} x^{n_1-m_1} (x - X_0) - \frac{c}{\varphi} \left\{ m_2 x^{2m_1-n_1+1} y^{m_2-1} D_x + (x^{m_1} + k x y^{2m_2-m_2-1}) D_y \right\} \\ y^{n_2-m_2-1} (y - X_0) - \frac{c}{\varphi} y^{m_2} \left\{ x y^{n_2-m_2-1} D_x - (R x^{m_1-1} + k' y^{n_2-m_2}) \right\} \\ = P_{\text{管}} \quad k' = \frac{1}{n_2 m_2} ((m_1+1)^2 n_2 + m_2^2 - (m_1+1)m_2 n_2) \end{aligned}$$

$$(y - X_0 + c)(y - X_0) - \frac{k}{\varphi} x^{2m_1-n_1} y^{2m_2-n_2} \left\{ (2X_0 - X_1 - X_2 - c)y + X_1 X_2 - X_0^2 + X_0 c \right\}$$

$$\mu: x^i y^j \quad \begin{matrix} 0 \leq i \leq n_1 \\ 0 \leq j \leq n_2-2 \end{matrix} \quad \geq y^{n_2-1} \quad \text{と } x^{n_1} \quad \cup \quad \text{U}_{\text{管}} \text{ 代表.}$$

$$\begin{aligned} \text{例 2 (2)} \quad f &= \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{6} x y^6 + x^2 y^4, \quad \mu=26 \quad \text{U: } f=(x^2, y) \quad \text{U} \geq \mu \\ h(s) &= (s+1) \cdot (s+\frac{1}{3}) (s+\frac{2}{3}) (s+1) (s+\frac{4}{3}) (s+\frac{3}{5}) (s+\frac{4}{5}) (s+\frac{6}{5}) (s+\frac{7}{5}) \\ &\quad (s+\frac{7}{15}) (s+\frac{8}{15}) (s+\frac{11}{15}) (s+\frac{13}{15}) (s+\frac{14}{15}) (s+\frac{16}{15}) (s+\frac{17}{15}) (s+\frac{19}{15}) (s+\frac{25}{15}) \end{aligned}$$

○さうして $T = 0$ の時、図 1 の式で z の値が $z=0$ になる。 (さうとき z は、
あまり変な値をとりだしてはならない。

$$S_{II} \quad m_1 \leq \frac{n_1}{2}, \quad m_2 \leq \frac{n_2}{2} \quad \mu = n_1(m_2+1) + n_2(m_1+1)$$

$$U: f = (x^{m_1}, y^{m_2-1})$$

$$X_1 = \frac{1}{(m_1+1)n_2 - m_2} ((n_2 - m_2)x D_x + m_1 y D_y)$$

$$X_2 = \frac{1}{(n_1+1)m_2} (m_2 x D_x + (n_1 - m_1) y D_y)$$

$$-I \quad x^m (\rho - X_2) + \dots, \quad y^{m_2-1} (\rho - X_1) + \dots$$

$$=PI \quad (\rho - X_1)(\rho - X_2) + x^{n_1-m_1} y^{n_2-2m_2} (\dots)$$

これは我々の予想と一致する。したがって、 $\langle \cdot \rangle \subset \mathbb{C}^n$ である。

$$III. \quad xy (x^{n_1} + y^{n_2} - x^{m_1} y^{m_2})$$

$$Y_{III}. \quad m_1 \geq \frac{n_1}{2}, \quad m_2 \geq \frac{n_2}{2} \quad \mu = (n_1+1)(n_2+1)$$

$$U: f = (x^{n_1-m_1}, y^{n_2-m_2}) \quad X_0 = \frac{1}{(n_1+1)(n_2+1)-1} (n_2 x D_x + n_1 y D_y)$$

$$c = \frac{m_1 m_2 - (n_1 - m_1)(n_2 - m_2)}{(n_1+1)(n_2+1)-1}$$

$$x^{n_1-m_1} (\rho - X_0) + \dots, \quad y^{n_2-m_2} (\rho - X_0) + \dots$$

$$(\rho - X_0 + c)(\rho - X_0) + \dots$$

$$S_{III}. \quad m_1 \leq \frac{n_1}{2}, \quad m_2 \leq \frac{n_2}{2} \quad \mu = n_1(m_2+1) + n_2(m_1+1) + 1$$

$$U: f = (x^{m_1}, y^{m_2})$$

$$X_1 = \frac{1}{(m_1+1)(n_2+1) - (m_2+1)} ((n_2 - m_2)x D_x + m_1 y D_y)$$

$$X_2 = \frac{1}{(m_2+1)(n_1+1) - (m_1+1)} (m_2 x D_x + (n_1 - m_1) y D_y)$$

$$x^{m_1} (\rho - X_2) + \dots, \quad y^{m_2} (\rho - X_1) + \dots$$

$$(\rho - X_1)(\rho - X_2) + \dots$$

まとめ

$$C = \frac{n_1 m_2 + n_2 m_1 - n_1 n_2}{n_1 n_2 + \Delta} \quad \Delta = 0 \quad \begin{array}{cc} \text{I} & \text{II} \\ & +m_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{III} \\ +n_1 + n_2 \end{array}$$

Minor # $\left(\begin{array}{c} 2, X_0 = \frac{1}{n_1 n_2 + \Delta} (n_2 X_0 X + n_1 Y_0 Y) \end{array} \right)$

$$\begin{array}{l} C > 0 \quad n_1 n_2 + 1 + \square \\ C < 0 \quad n_1 m_2 + n_2 m_1 + 1 + \square \end{array} \quad \square = -n_1 - n_2 \quad \begin{array}{cc} -n_1 + n_2 - 1 & +n_1 + n_2 \end{array}$$

$$X_0 = \frac{1}{n_1 n_2 + \Delta} ((n_2 - m_2) X_0 X + m_1 Y_0 Y) \quad 0 \quad \begin{array}{cc} n_2 - m_2 & n_1 + (n_2 - m_2) \end{array}$$

$$X_2 = \frac{1}{m_2 n_1 + \Delta} (m_2 X_0 X + (n_1 - m_1) Y_0 Y) \quad 0 \quad \begin{array}{cc} m_2 & (n_1 - m_1) + m_2 \end{array}$$

$$(n: \mathbb{F}) \left\{ \begin{array}{l} Y_{i \in \mathbb{F}} \quad (x^{n_1 - m_1 - 1}, y^{n_2 - m_2 - 1}) (x^{n_1 - m_1}, y^{n_2 - m_2 - 1}) (x^{n_1 - m_1}, y^{n_2 - m_2}) \\ S_{i \in \mathbb{F}} \quad (x^{m_1 - 1}, y^{m_2 - 1}), (x^{m_1}, y^{m_2 - 1}), (x^{m_1}, y^{m_2}) \end{array} \right.$$

2変数. 色々な link の $b(a)$

2変数では $\{f=0\} \cap S^2$ が一般に link になっている。 f が既約ならば torus knot 一つであるが、これは別として、ここは torus knot の link の代表的な n type の $b(a)$ を考える。

$$\text{I } (x^m + y^n)(x^\mu + y^\nu) \quad \text{II } x(x^m + y^n)(x^\mu + y^\nu) \quad \text{III } xy(x^m + y^n)(x^\mu + y^\nu)$$

尚、 $(m, n) = 1$ などとは仮定しないが、I でも成分は3以上かきしめる。表示式がこれ以上 factor を含むと非常に複雑になる。

Notations

$$c = n\mu - \nu m$$

$$\Theta = \nu x D_x + \mu y D_y, \quad \Psi = n x D_x + m y D_y.$$

0. 概説.

$c > 0$ $c < 0$ によって、支配している作用素はたまたまわかる。 Θ と Ψ をある数でかけたものである。 γ は個々の場合に γ べておき、あとでまとめる。

すべて $\exists p^l + \dots \in f[S]$ である。 l は評価可能。

$$\text{Milnor \#} = (m-1)(n+\nu) + (\nu-1)(m+\mu) + 1 \quad \text{IS} \quad \text{などと} \\ \text{すべてわかっている。}$$

重要な事例については

I. $(x^m + y^n)(x^\mu + y^\nu)$

X_1	X_2	Y_1	Y_2	C_{X_1}	C_{X_2}	C_{Y_1}	C_{Y_2}
Ψ	Θ	Θ	Ψ	C	$-C$	C	$-C$
$m(n+\nu)$	$\mu(n+\nu)$	$\nu(m+\mu)$	$n(m+\mu)$	$m(n+\nu)$	$\mu(n+\nu)$	$\nu(m+\mu)$	$n(m+\mu)$

(1) type S^* $m \leq \mu, n \geq \nu$ ($C > 0$) $\dim_{\mathbb{C}} S^* = \frac{(m-1)(n+\nu)}{+ (\nu-1)(m+\mu)} + 1$.

- PDE $x^{m-1}(m(\rho - Y_1) - \mu x^{\mu-m} y^{n-\nu}(\rho - Y_2)) + C y^n D_x$
 $y^{\nu-1}(\nu(\rho - X_1) - n x^{\mu-m} y^{n-\nu}(\rho - X_2)) + C x^\mu D_y$

= PDE $(\rho - X_1)(\rho - Y_1) - \frac{n\mu}{m\nu} x^{\mu-m} y^{n-\nu}(\rho - X_2)(\rho - Y_2)$

これから計算すると、固有値は下記の 5 系列である。

(i) 重根. $(m, \nu) = d \geq 2$ α と β の d 重根, $m = d m', \nu = d \nu'$ とする

$\boxed{d m' - 1, d \nu' - 1}$ は主項と対角成分 $\boxed{-\frac{t}{d}}$ nilpotent と d 重根
 $1 \leq t \leq d-1$.

(ii) 独立 $\boxed{m-1, \nu-1} \rightarrow \boxed{-1}$

(iii) $\boxed{i, j}$ $0 \leq i \leq m-2$
 $0 \leq j \leq \nu-2$ $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{-\frac{\nu(i+1) + \mu(j+1)}{\nu(\mu+m)}} \\ \boxed{-\frac{n(i+1) + m(j+1)}{\mu(n+\nu)}} \end{array} \right.$ ($T = T^*(i) + \text{系列}$)
 両方 $\neq 0$ となる場合

(iv) $\boxed{i, j}$ $m-1 \leq i \leq m+\nu-1$
 $0 \leq j \leq \nu-2$ $\rightarrow \boxed{-\frac{\nu(i+1) + \mu(j+1)}{\nu(\mu+m)}}$

(v) $\boxed{i, j}$ $0 \leq i \leq m-2$
 $\nu-1 \leq j \leq n+\nu-1$ $\rightarrow \boxed{-\frac{n(i+1) + m(j+1)}{m(n+\nu)}}$

* S と i, j の $g-h$ の deformation, type S_I と同じ (analytic)

2 重根 $\Rightarrow$ 2 重根 i, j . 従って $\Rightarrow$ 場合

尚, 厳密な固有函数を求めよとすることは可能である.

$$(x^m + y^n)(x^n + y^m) \quad m \leq n \quad \text{に對し,}$$

$$S_{jk} = - \frac{n(j+1) + m(k+1)}{m(m+n)} \quad \text{に属する固有函数は次の如き}$$

として求むべきである. (佐藤幹夫)

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a(a-1)\cdots(a-b+1) \quad [a] = a(a+1)\cdots(a+b-1)$$

$$\Delta_{jk}^{ik} = \sum_{\nu \geq 0} C_{\nu}^{ik} \begin{bmatrix} j - \nu(n-m), k - \nu(n-m) \end{bmatrix}$$

$$C_{\nu}^{ik} = \begin{bmatrix} j \\ \nu(n-m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ \nu(n-m) \end{bmatrix} \frac{[S_{jk}]_{\nu} \left[\frac{j+1}{m} \right]_{\nu}}{\nu! \left[1 + \frac{j-k}{n+m} \right]_{\nu}}$$

$0 \leq j < m-1, 0 \leq k < n-1$ のとき $j=k=n-1$ として Δ_{jk}^{ik} 自身.

その他では $j \neq k$ に

$$\Phi_{jk}^{ik} = \sum_{\mu \geq 0} e_{\mu}^{ik} \Delta_{j+\mu m, k-\mu n}^{ik}, \quad e_{\mu}^{ik} = (-1)^{(n-m-\mu)\mu} \frac{\begin{bmatrix} k \\ \mu n \end{bmatrix} \left[\frac{j+1}{m} \right]_{\mu}}{\begin{bmatrix} j+1 \end{bmatrix}_{\mu m} \left[1 + \frac{j-k}{n+m} \right]_{\mu}}$$

$$\left(-1 + \frac{k-j}{n+m} \neq 0, 1, \dots, \left[\frac{\min(k,j)}{n-m} \right] \right)$$

と表わせばよい.

$h(\rho)$ はこれから求まる. 特に, local monodromy の固有表現が,

$$\frac{t^{m(n+\nu)} - 1}{t^{(n+\nu)} - 1} \cdot \frac{t^{n(m+\mu)} - 1}{t^{(m+\mu)} - 1} (t-1)$$

と考へて, 求めるべきことは明らか, これは link theory と一致する.

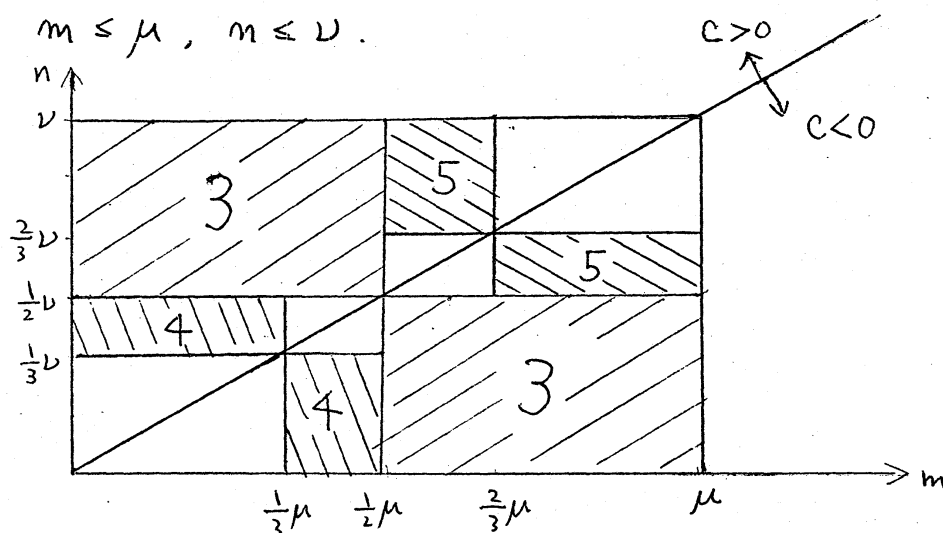
又, 我々の方法で, 最も単純な double factor がわかればよい.

$(m, \nu) = d \geq 2$ のとき

$$h(\rho) = (\rho+1) \cdot \prod_{t=1}^{d-1} \left(\rho + \frac{t}{d} \right)^2 \cdot (\dots)$$

(ii) $m \geq \mu$, $n \leq \nu$ ($C < 0$) (i) と同様.

(iii) $m \leq \mu$, $n \leq \nu$.



上図は, m, n のとり方の図示である. 対角線より上が $C > 0$. 下が $C < 0$. 参考のために入れた数字は,
 $\exists a^L + \dots \in \mathcal{J}[S]$ とする への評価を示す.

① $C > 0$. $\frac{\mu}{m} > \frac{b}{a} > \frac{\nu}{n}$ とする有理数 $\frac{b}{a}$ で,
 $\hookrightarrow c_{x_1}, c_{y_1} > 0$

$a+b$ が最小のものとして, $a+b=L$ とすれば,

$$P_X = (a - x_1 + (a-1)c_{x_1})(a - x_1 + (a-2)c_{x_1}) \cdots (a - x_1)$$

$$P_Y = (a - y_1 + (b-1)c_{y_1}) \cdots (a - y_1 + c_{y_1})(a - y_1)$$

$$P(a) = P_X \cdot P_Y + \cdots \in \mathcal{J}[S].$$

② $C < 0$. $\frac{\mu}{m} < \frac{b}{a} < \frac{\nu}{n}$ と同様にすると,
 $\hookrightarrow c_{x_2}, c_{y_2} > 0$

$$Q_X = (a - x_2 + (b-1)c_{x_2}) \cdots (a - x_2)$$

$$Q_Y = (a - y_2 + (a-1)c_{y_2}) \cdots (a - y_2)$$

$$Q(a) = Q_X \cdot Q_Y + \cdots \in \mathcal{J}[S].$$

たとえば $\mu \leq 2m, 2n \leq \nu$ とせよ. ($C_{X_2} > 0$)

$$(1 - X_2 + C_{X_2})(1 - X_2)(1 - Y_2) + X^{2m-\mu} Y^{\nu-2n}(\dots)$$

= べき乗の和として, 不十分でないが,

$$X^{\mu-m}(1 - X_2)(1 - Y_2) + \dots, Y^n(1 - X_2)(1 - Y_2) + \dots$$

- べき乗として, やはり不十分だが

$$X^{\mu-1}(1 - Y_2) + \dots, X^{\mu-m-1} Y^n(1 - X_2) + \dots, Y^{\nu}(1 - X_2) + \dots$$

などがわかってゐる。

ただしこの場合など, $1^2 + \dots$ ではすまぬ, と証明したわけではない。

書きかておこう,

$$\begin{aligned} C > 0 &\Rightarrow \text{Milnor \#} = (m-1)(n+\nu) + (\nu-1)(m+\mu) + 1 \\ C < 0 &\Rightarrow \quad \quad = (\mu-1)(n+\nu) + (n-1)(m+\mu) + 1. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} C > 0 \\ C < 0 \end{aligned}} \right\} (*)$$

(iv) $m \geq \mu, n \geq \nu$. (iii) と同様。

(v) または, Milnor # は C の正負により, 上の (*) で与えられる。

$C > 0$ のときは X_1, Y_1 が

$C < 0$ のときは X_2, Y_2 が登場する。

$C > 0$ のとき, $X^m Y^{\nu}$ は $X^{m+\mu} + Y^{n+\nu}$ に対して恒次. γ は S のときは sweep out して, $X^{\mu} Y^n$ がなくなる. γ の他の場合は $X^{\mu} Y^n$ が登場するから, simplex type ではない。

$$\text{II. } x(x^m + y^n)(x^\mu + y^\nu)$$

$$\begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & Y_1 & Y_2 \\ \hline \Psi & \Theta & \Theta & \Psi \\ m(n+\nu)+n & \mu(n+\nu)+\nu & \nu(m+\mu)+\nu & n(m+\mu)+n \end{array}$$

$(X_1 = \frac{c}{m(n+\nu)+n}$ etc も I と同様に見える。
式自体, x, y に因 (対称でないから, 分母で加える数は
 $m, \nu \leq 4$ で m, μ が出てくることに注意せよ。

$$(i) \quad \mu \geq m, \quad n \geq \nu. \quad S_{\text{II}}.$$

$$\text{Milnor} \# = (m+1)(n+\nu) + \binom{\nu-1}{2}(m+\mu)$$

$$U: f = (x^m, y^{\nu-1})$$

$$m' = m + \mu + 1 \text{ だと}$$

$$\begin{aligned} -\text{階} \quad & x^m(\rho - Y_1) - \frac{n\mu}{\nu m} x^\mu y^{n-\nu} \left\{ (\rho - X_1) - \frac{c^2 y D_y}{n\mu\nu m' (m(n+\nu)+n)} \right\} \\ & + \frac{c y^n}{(m(n+\nu)+n)\nu m'} \left\{ (n+\nu) x D_x - m (y D_y) \right\} \\ & - \frac{(\mu(n+\nu)+\nu)}{(m(n+\nu)+n) m \nu^2 D_1/2} \frac{c^2}{\psi} \frac{x^{\mu-m} y^{2(n-\nu)}}{\psi} \left\{ \nu y^\nu (x D_x) - (\nu(m+\nu)^\nu + (x^\mu) y D_y) \right\} \end{aligned}$$

$$y^{\nu-1}(\rho - X_1) - \frac{n(\mu(n+\nu)+\nu)}{\nu(m(n+\nu)+n)} x^{\mu-m} y^{n-\nu} \left(\rho - \frac{Y_1}{\frac{n\mu}{\nu} + 1} \right) + \frac{c x^\mu D_y}{\nu(m(n+\nu)+n)}$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad & x^m(\rho - Y_1) - \frac{n\mu}{m\nu} x^\mu y^{n-\nu} (\rho - X_1) + \frac{c y^n}{(m(n+\nu)+n)\nu m'} ((n+\nu) x D_x - m y D_y) \\ & + \frac{c^2}{(m(n+\nu)+n) m \nu^2 m'} x^\mu y^{n-\nu} (y D_y) - \frac{c(\mu(n+\nu)+\nu) x^{\mu-m} y^{2n-\nu}}{m \nu^2 m' (m(n+\nu)+n)} (\rho - Y_1) \end{aligned}$$

$$\text{結局} \quad x^m(\rho - Y_1) - \frac{c y^n}{m \nu m'} (\rho - x D_x) - \frac{n\mu}{m\nu} x^\mu y^{n-\nu} (\rho - X_1) \\ \neq \text{便利.}$$

$$\psi = m(n+\nu)+n - (\mu(n+\nu)+\nu) x^{\mu-m} y^{n-\nu}$$

$= P_{\text{E}}$

$$(\rho - X_1)(\rho - Y_1) - \frac{n(\mu(n+\nu)+\nu)}{\nu(m(n+\nu)+n)} x^{\mu-m} y^{n-\nu} (\rho - X_2)(\rho - Y_2)$$

作用素を π として (i) (ii) (iii) に, double は出た。い。

I を π 作用素 (ii) (iii) (iv) を π 作用素で表す。略す。

この S_{I} 212, monodromy, 12) 有数項式

$$(t^{m(\nu+n)+n} - 1) \frac{(t^{\nu(m+\mu+1)} - 1)}{t^{m+\mu+1} - 1} (t-1) \text{ と表すことができる。}$$

III. $xy(x^m + y^n)(x^\mu + y^\nu)$

X_1	X_2	Y_1	Y_2
Ψ	Θ	Θ	Ψ
$m(n+\nu) + m+n$	$\mu(n+\nu) + \mu+\nu$	$\nu(\mu+n) + \mu+\nu$	$n(m+\mu) + m+n$

$$C_{X_1} = \frac{C}{m(n+\nu) + m+n} \quad \text{などとも同様。}$$

$S_{\text{III}}. \mu \geq m, n \geq \nu$

$$\text{Milnor} \# = (m+1)(n+\nu) + (\nu+1)(m+\mu) + 1.$$

$$U: f = (x^m, y^\nu)$$

補助的な作用素 X_0 を用いる.

$$X_0 = \frac{1}{(m+\mu+1)(n+\nu+1)-1} \{ (n+\nu)x D_x + (m+\mu)y D_y \}$$

$$C_{X_0} = \frac{C}{(m+\mu+1)(n+\nu+1)-1}$$

1st

$$x^m(\rho - Y_1) - \frac{C_{Y_1}}{C_{X_0} y^\nu} y^{n-\nu} (y^\nu \rho + x^\mu Y_1 - (x^\mu + y^\nu) X_0)$$

$$y^\nu(\rho - X_1) - \frac{C_{X_1}}{C_{X_0} x^\mu} x^{\mu-m} (x^m \rho + y^n X_1 - (x^m + y^n) X_0)$$

$\rho = 1$ の $y^\nu \rho$, $x^m \rho$ は Y の X の互いに代入して x^m , y^ν で再び $<<$ とすれば可. ややこしくなるのでここには記さない.

2nd

$$(\rho - X_1)(\rho - Y_1) - \frac{C_{X_1} C_{Y_1}}{C_{X_2} C_{Y_2}} x^{\mu-m} y^{n-\nu} (\rho - X_2)(\rho - Y_2)$$

$$\text{or. } (\rho - X_1)(\rho - Y_1) - \frac{C_{X_1} C_{X_2}}{C_{X_0}} \frac{x^{\mu-m} y^{n-\nu}}{1 - x^{\mu-m} y^{n-\nu}} \rho (\rho - X_0)$$

$\rho(\rho)$ は容易にもとめられる. この場合も,
 $(m+1, \nu+1) = d \geq 2$ であれば, $m+1 = dm'$, $\nu+1 = d\nu'$ とし,

$$\boxed{t^{m'-1}, t^{\nu'-1}} \longrightarrow \boxed{-\frac{t}{d}} \quad \text{nilpotent } \rightarrow \text{ double.}$$

$t = 1, \dots, d-1.$

その他詳細は略す. S_E と容易にせよ. 変例は

$\# \in \mathcal{X}_1$

$$\Theta = \nu x D_x + \mu y D_y, \quad \Psi = h x D_x + m y D_y.$$

	X_1	X_2	Y_1	Y_2	$C = h\mu - m\nu$ $\int \left[\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{t} \right]$
I	$\frac{\Psi}{m(n+\nu)}$	$\frac{\Theta}{\mu(n+\nu)}$	$\frac{\Theta}{\nu(m+\mu)}$	$\frac{\Psi}{h(m+\mu)}$	$x^{m-1}, y^{\nu-1}$
II	$\frac{\Psi}{m(n+\nu)+h}$	$\frac{\Theta}{\mu(n+\nu)+\nu}$	$\frac{\Theta}{\nu(m+\mu)+\nu}$	$\frac{\Psi}{h(m+\mu)+h}$	$x^m, y^{\nu-1}$
III	$\frac{\Psi}{m(n+\nu)+m+h}$	$\frac{\Theta}{\mu(n+\nu)+\mu+\nu}$	$\frac{\Theta}{\nu(m+\mu)+\mu+\nu}$	$\frac{\Psi}{h(m+\mu)+m+h}$	x^m, y^ν

$$C > 0 \Rightarrow X_1, Y_1$$

$$C < 0 \Rightarrow X_2, Y_2$$

$|C > 0|$

Milnor #

$$\text{I} \quad (m-1)(n+\nu) + (\nu-1)(m+\mu) + 1$$

$$\text{II} \quad (m+1)(n+\nu) + \overset{(\nu-1)}{\nu}(m+\mu)$$

$$\text{III} \quad (m+1)(n+\nu) + (\nu+1)(m+\mu) + 1$$

Alexander polynomial. (m, n, \nu, \mu \in \mathbb{Z})

$$\frac{t^{m(n+\nu)} - 1}{t^{h+\nu} - 1} \cdot \frac{t^{\nu(m+\mu)} - 1}{t^{h+m\mu} - 1} (t-1)$$

$$(t^{m(n+\nu)+h} - 1) \frac{(t^{\nu(m+\mu)+1} - 1)}{t^{h+m\mu+1} - 1} (t-1)$$

$$(t^{m(n+\nu)+m+h} - 1) \frac{(t^{\nu(m+\mu)+\mu+\nu} - 1)}{t^{h+m\mu+\mu+\nu} - 1} (t-1)$$

§4. §2.3 に關する諸例.

§2. §3 で述べた一般論に即して, 以下の主要な状況を理解していただくために, いくつかの具体例について, 詳しく調べてみた. 特徴あるものをとりこんでみる.

1. $\frac{1}{5}(x^5+y^5) + \frac{1}{3}x^4y^3$.
type M.

μ -de family でも $h(s)$ の変化が $\mathbb{Z}$ を初めて三輪分指輪した例.

2. $x^n(x+ay) - y^n$
type K.

ch. index = 1. しかし, $\rho^{l+\dots} \in \mathcal{H}$ とする $l=n-2$ ではないか? という, 柏原が注目した例.

3. $(x^3+y^5)(x^5+y^3)$
link IS

佐藤により計算された系列の一つで, monodromy の最小多項式は 2 つの double root が有り, $h(s)$ でもきまに符号は出てくる.

4. M.C. Grima の例.
I (iii) ①, ②

monodromy matrix が 0 になる例で変換 h が 2 つの link に h が, $h(s)$ は h が h である.

5. $x^2(x+y^2)(x^2+y)$
III §

Trivial knot 4 ⑩) にすぎない h は 最小多項式に double が出, $h(s)$ でも h ($h=1$) である.

6. $\frac{x^{10}}{10} + \frac{y^3}{3} + \frac{1}{7}x^7y$.
K#

Briançon という人が, 何かの理由で注出した具体例. 特徴を計算すると, $L(h)=2$ となる. 固有値が h である, h も h である.

$$\frac{1}{5}(x^5 + y^5) + \frac{1}{3}x^2y^3. \quad \mu = 16. \quad \Omega \geq m^7.$$

一般に $a \geq 1$ のとき $b \geq 1$ となる c を紹介しておく。

$$f(s) = (x_D - x, y_D - y, s^2 - A - B)$$

$$\begin{cases} X = \frac{x}{\varphi} X_0 + \frac{ty^2}{15\varphi^2} (-yD_x + tx^2D_y) \\ Y = \frac{y}{\varphi} X_0 + \frac{tx^2}{15\varphi^2} (ty^2D_x - xD_y) \end{cases} \quad \begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{5} (x\partial_x + y\partial_y) \\ \varphi &= 1 - t^2xy \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} A &= -\frac{3}{5} + x_0 + \frac{t^2(1+t^2x_2)}{15(1-t^2x_2)} x_2 & \left\{ \begin{aligned} a_{11} &= (3-2t^2x_2)x_2^3 \\ a_{22} &= (3-2t^2x_2)x^3 \end{aligned} \right. \\ B &= \frac{3}{5}x_0 + \frac{t}{15^2\varphi_2} \left\{ 15\lambda(1-\frac{7}{3}t^2x_2)x_2x_0 - \sum_{i,j} a_{ij}D_iD_j \right\} & a_{11} &= -t(7-5t^2x_2)x_2^3 \end{aligned} \right.$$

$$A^2 - A A - B = (A + \frac{3}{5})(A - X_0) + \frac{1}{5}(\dots)$$

一般偏析: 由下列得: $(\rho - X_0 + \frac{1}{J})(\rho - X_0) + \dots$

$$\text{従って } \pm j_1 = (\rho - \frac{3}{2}X_0)(\rho - X_0) + \dots \quad \pm 1; \quad \pm 2.$$

こゝより、主部が全解状にみえたとれるのは、 $U:f=m$ であるため、一個の作用素をずいせば $\pm 2\pi$ になる (二重言 $(\frac{p}{f})$ か $(\frac{3}{f})$ ならぬ) ことに一つの原因がある。

$\lambda \neq 0$: $\begin{pmatrix} \boxed{0} \\ -\frac{2}{5} \boxed{0} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \boxed{10} \\ -\frac{2}{5} \boxed{0} \end{pmatrix}$ s" eigenvector $= z_3$.

$$f(s) = (s+1)(s+\frac{2}{5})(s+\frac{3}{5}) \dots (s+\frac{7}{5})$$

$t = 0$ 7.12 33 5.1 $s + \frac{8}{5}$ 5.2 $2T = 41$

$$h_{t=0}(n) = (n+1) \left(n+\frac{2}{5}\right) \left(n+\frac{3}{5}\right) \dots \left(n+\frac{7}{5}\right) \left(n+\frac{8}{5}\right)$$

$$-1/3 \leq x^n + y^n - t x^m y^m \quad n > m > \frac{n}{2}.$$

$$b_{t \neq 0}(0) = (0+1) \prod_{2 \leq k \leq n+m-1} (0 + \frac{k}{n})$$

$$h_{t=0}(s) = (1+t) \prod_{2 \leq k \leq 2n-2} \left(s + \frac{k}{n} \right)$$

2. $K: x^n(x+ay) - y^n \quad \mu = n(n-1).$
 (特に $n=3$ のとき, $\Gamma(0,1)=3$ 個の K 理論的) $a=0$ である μ -de family.
 $\Omega \geq m^{2n-2}$. $\Omega: f = ((n+1)x+ny, x^{n-3}) \geq m^{n-3}$.

-P.S. $\{(n+1)x+nay\}(\rho-X_0) + \frac{ay}{n(n+1)} x D_x$

$$x^{n-3}(\rho-X_0) - \frac{1}{1 + \frac{(-n)^{n-2}}{(n+1)^{n-1}} a^n x} \left\{ g(x,y) D_x - \frac{(-n)^{n-2}}{(n+1)^n} (ax)^{n-1} (aD_x - (n+1)D_y) \right\}$$

$$= 1 = g(x,y) = \sum_{v=1}^{n-2} x^{n-2-v} \left(\frac{-nay}{n+1} \right)^v.$$

$$X_0 = \frac{1}{n+1} x D_x + \frac{1}{n} y D_y.$$

=P.S. -142 に かなり やや = して なる? $f=0$ である rational

curve で ($a=1 \times 12$) parametrization

$$x = \frac{t^n}{1+t}, \quad y = \frac{t^{n+1}}{1+t} \quad \text{と } t \text{ は } 0 \text{ から } \infty \text{ まで変化する.}$$

ideal m — 見 る こと になる. t は 0 から ∞ まで変化する.

$$x^{n+2} y^{n-2} = \left\{ (n^3 - 2n^2 - n + 1)x^n + n(n-1)^2 x^{n-1} y + n(n^2 - n + 1)y^{n-1} + x y^{n-2} \right\} f$$

$$- \frac{1}{n^2} \left\{ (n-1)^3 x f_x^2 + (n-1)(n(n-1)y - (n^2 - n + 2)x) f_x f_y - (x + n(n^2 - n + 1)y) f_y^2 \right\}$$

なること; 関係が成立し, $\mathbb{C} f^2 + \Omega f + \Omega^2 \ni x^{n+2} y^{n-1}$ なること.

-142 の $m=1$ である, $\Omega^{n-2} + \dots \neq 0$ であること (証明)

$n=4$. $f = x^5 + x^4 y - y^4 \quad \mu=12 \quad \Omega \geq m^6 \quad \Omega: (f) = m.$
 $X_0 = \frac{1}{5} x D_x + \frac{1}{4} y D_y. \quad \varphi = 1 + \frac{4^2}{5^3} x$

-P.S. $x(\rho-X_0) + \frac{4}{100} (x - \frac{4}{5} y) D_x + \frac{1}{100} \varphi \left\{ \frac{4}{5^2} (y^2 - \frac{4}{5} x y + x^2) x D_x - \frac{4}{5} x^3 D_y \right\}$

$$y(\rho-X_0) + \frac{4^2}{100} D_x + \frac{1}{100} \varphi \left\{ \frac{4}{5} (\frac{1}{5} x y - x^2 - \frac{4}{5^2} y^2) x D_x + x^3 D_y \right\}$$

$\boxed{1.1}$ $0 \leq i \leq 3$ $0 \leq j \leq 2$ $\rightarrow$ $\boxed{1.2}$ $\rightarrow$ 主項と $\mathbb{Z}$ の固有ベクトルを
 与えたり $\boxed{1.0}$ から 2 つ出る。計算して見れば、 $\boxed{1.0.0}$ から出る
 べき factor は $(s + \frac{9}{20})(s + \frac{11}{20})$ でありべきだとなる。
 一方、一般項により

$$(s - x_0 + \frac{3}{20})(s - x_0 + \frac{1}{10})(s - x_0 + \frac{1}{20})(s - x_0) + \dots \in \mathbb{Z}[s].$$

通常するところまででは、二階作用素は 2 つ出さず 2 つ
 の factor をとけばよい。ところが今の場合、後 3 つ 3 つが
 出てくる！ $\rightarrow$ べき $\frac{11}{20}$ が出る。

これは考えても、この系列は一般に複雑なことにあてはまり
 べきと納得せねばならない。

尚 $n=4$ として 前出 $x^{n+2}y^{n-2}$ の x 倍 x^7y^2 と

$$(f - x_0 f)^2 = c^2 x^8 y^2 \text{ とおき } = \text{二階作用素を出し} \text{ する。}^*$$

$$\downarrow \text{ parametrization } x = \frac{t^n}{1+t} \quad y = \frac{t^{n+1}}{1+t}.$$

$\downarrow$ (尚), Irreducible curve であり、 $\mathbb{F}_q$ 上の monodromy は 非
 semisimple である。Theorem 2 より $\Delta(t) = \frac{(t^{n(n+1)} - 1)(t - 1)}{(t^{n+1} - 1)(t^n - 1)} \neq 1$,

$$x^{n+1} - y^n \neq 0 \text{ であり } n=2 \text{ に注意せよ。}$$

$$h(0) \text{ として } n=4 \text{ のとき, } (s+1) \cdot (s+\frac{9}{20})(s+\frac{11}{20})(s+\frac{13}{20}) \dots (s+\frac{13}{10})$$

$$\text{より, } x^{n+1} - y^n \text{ の } (s+1)(s+\frac{9}{20})(s+\frac{13}{20}) \dots (s+\frac{7}{10})(s+\frac{31}{20})$$

$$\text{より, } 31/20 \equiv 11/20 \pmod{\mathbb{Z}}.$$

$\uparrow \boxed{1.2}$

* 二階作用素について、次頁を参照。

二階の作用素. 非常に奇妙ともいえるが, 又自然なものがともあった. かつ, 2 通りある可能性は有る.

$$Q_1(\lambda) = x \{ 933(\lambda - x_1) - 720(\lambda - x_0) + 13xD_y \} + \frac{1}{4}yD_x$$

$$Q_2 = 27(xD_x)^2 + 6x(6y - 7x)DxD_y - x(x + 52y)D_y^2$$

$$Q(\lambda) = (\lambda - 1)Q_1 - \frac{x}{4^2}Q_2$$

$$R(\lambda) = \frac{x}{4^2} \{ -1079(\lambda - x_1) - 3200(\lambda - x_0) - 156xD_y \} + \frac{3}{4^2}yD_x$$

$$(Q(\lambda) + R(\lambda) + 25(\lambda - 1)(\lambda - x_0) + \frac{75}{4}(\lambda - x_0)f')f' = \lambda(\lambda - 1)x^2y^2f'^{1-2}.$$

$$\therefore \left(\frac{15}{4^2}\lambda - x_0 + \frac{21}{4^3 \cdot 5} \right) (\lambda - x_0) - \frac{1}{20^2} (Q(\lambda) + R(\lambda)) \in f[5].$$

$$\text{i.e. } \left(\lambda - \frac{16}{15}x_0 + \frac{7}{100} \right) (\lambda - x_0) - \frac{1}{3 \cdot 5^3} (Q(\lambda) + R(\lambda)) \in f[5].$$

$$\text{よって } \boxed{00} \rightarrow \frac{9}{20}, \frac{11}{20} \text{ がわかる.}$$

ともかく (5) は分岐させている. yD_x が主因子,

weight が ± 2 higher order.

(17) にしよるかわかる.

$$\text{よって } (17) \text{ に } x^2y^2 \notin U \cup \{f\}, x^2y^2 \in U \cup \{f\}.$$

$$3. (x^3 + ty^5)(tx^5 + y^3) \quad \text{link I S}$$

$$\mu = 33. \quad \text{For } \alpha = \text{integer} \text{ is } \alpha \neq 12, \quad g(t) = \frac{t^{24}-1}{t^8-1}(t^2-1)$$

2"あり, $\exp(\pm \frac{2}{3}\pi i)$ is double.

$$\varphi = 1 - \frac{25}{9}t^2x^2y^2.$$

$$x^2\rho - X \quad X = \frac{1}{\varphi} \left\{ x^2X_1 - \frac{t}{9}(15tx^4y^2X_1 + 2y^5D_x) \right\}$$

$$y^2\rho - Y \quad Y = \frac{1}{\varphi} \left\{ y^2X_1 - \frac{t}{9}(15tx^2y^4X_1 + 2x^5D_y) \right\}$$

$$X_1 = \frac{1}{24}(5xD_x + 3yD_y), \quad Y_1 = \frac{1}{24}(3xD_x + 5yD_y)$$

$$\Delta^2 - \rho A - B \quad A = X_1 + X_2 - \frac{t^2x^2y^2}{9\varphi}(X_1 + X_2) + \dots$$

$$B = -X_1X_2 - \frac{16t^2x^2y^2}{9\varphi}X_1X_2 - \dots$$

$$\Delta^2 - \rho A - B = (\rho - X_1)(\rho - X_2) - \frac{t^2x^2y^2}{9\varphi}(\dots).$$

$\text{Hom}(M, B_{\text{pt}})$ の表現行列を e_1, e_2, e_3 と,

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & & & \\ & -\frac{1}{3} & & & \\ & & -\frac{2}{3} & 1 & \\ & & & -\frac{2}{3} & \\ & & & & -\frac{11}{24} & \ddots & \\ & & & & & & -\frac{17}{12} \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{11}{24} \end{pmatrix}$$

$$\dots \quad e_{33} = \begin{pmatrix} 17 + 280 \cdot 42 \\ -\frac{17}{12} \cdot 17 + \dots \end{pmatrix}$$

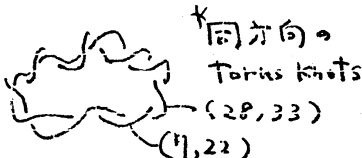
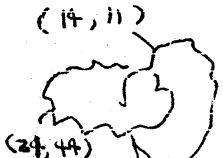
$$h(\rho) = (\rho+1) \cdot \left(\rho+\frac{1}{3}\right)^2 \left(\rho+\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\rho+\frac{5}{6}\right) \left(\rho+\frac{7}{6}\right) \cdot \left(\rho+\frac{2}{12}\right) \cdot \left(\rho+\frac{17}{12}\right)$$

$$\begin{matrix} (\rho+1) \cdot \left(\rho+\frac{11}{24}\right) \dots \left(\rho+\frac{31}{24}\right) \\ \uparrow \\ \boxed{24} \end{matrix}$$

とすると, 最小多項式と完全に一致する。

4. M. C. Grima's examples.

下記 G_1 と G_2 の local monodromy の matrix は,
 $\mathbb{Q}$ 成分行列で互いに同値となる $\lambda = \lambda_0$ を, M. C. Grima が
 証明した, $\lambda = A'(\text{Campa 1711})$. (unpublished) 我々の $h(\lambda)$
 は, ちがって $\lambda = \lambda_0$ である.

	G_1	G_2
f	$(x^7 + y^{22})(x^{28} + y^{33})$	$(x^{14} + y^{11})(x^{21} + y^{44})$
	どちらも $x^{35} + y^{55}$ の 2-parameter (deformation)	
singularity.	 * 同方向の torus knots	 * 交差した torus knots.
$C =$	$5 \cdot 7 \cdot 10 > 0$	$-5 \cdot 7 \cdot 11 < 0$
type	I (iii) ① 3	I (iii) ② 3
作用素	$X_1 = \frac{1}{7 \cdot 55} (22x D_x + 7y D_y)$ $Y_1 = \frac{1}{33 \cdot 35} (33x D_x + 28y D_y)$ $C_{Y_1} = \frac{1}{3}$	$X_2 = \frac{1}{21 \cdot 55} (44x D_x + 21y D_y)$ $Y_2 = \frac{1}{11 \cdot 35} (11x D_x + 14y D_y)$ $C_{Y_2} = \frac{1}{3}$
Milnor #	$= 1451$	$= 1451$
Alex. poly.	$\frac{t^{5 \cdot 7 \cdot 11} - 1}{t^{55} - 1} \cdot \frac{t^{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} - 1}{t^{35} - 1} t^{-1}$	$\frac{t^{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} - 1}{t^{55} - 1} \cdot \frac{t^{5 \cdot 7 \cdot 11} - 1}{t^{35} - 1} t^{-1}$
$b(\lambda)$	$(\lambda + 1) \cdot (\lambda + \frac{61}{1155}) \cdots (\lambda + 1) \cdots$ $\uparrow$ (10, 0) $\uparrow$ (6, 32)	$(\lambda + 1) \cdot (\lambda + \frac{65}{1155}) \cdots (\lambda + 1) \cdots$ $\uparrow$ (10, 9) $\uparrow$ (20, 10)
	double factor あり.	double factor あり.

* 二つの表現は違っている, どの辺を引いたか... 等.

$$5. \quad f = xy(x+y^2)(x^2+y) \quad \mu = 13 \quad \text{type link II S}$$

$$n \geq m^7 \quad \mu \text{ 代表 } x^i y^j \quad 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 2. \quad x^3, x^2 y, y^3, xy^3.$$

For a link, $\text{Alex. poly}(t_x \rightarrow t) = X$.

$$\text{最小多項式 } g \text{ 是 } x^6 - 1 \quad X = (t-1)(t^6-1)^2$$

$$t = -1 \text{ is double} \rightarrow g = (t+1)(t^6-1)$$

$$X_1 = \frac{1}{3} x D_x + \frac{1}{6} y D_y, \quad Y_1 = \frac{1}{6} x D_x + \frac{1}{3} y D_y$$

link III S $\rightarrow$ 判定条件上 $(1+1, 1+1) = 2$ $\therefore h(1) \neq$

double factor $(5 + \frac{1}{2})^2$ $\therefore t \rightarrow Y \rightarrow 1 \text{ 也 } t \rightarrow 2 \text{ 也 } t \rightarrow 3$.

$$X^3 Y^2 = \frac{5}{(4-13xy+9x^2y^2)} \left\{ \frac{(2+3xy)}{15} x(-xf_x + 4yf_y) - \frac{y^2}{3} (4xf_x - yf_y) \right\}$$

$$\begin{cases} x(A - Y_1) = \frac{y}{30(4-13xy+9x^2y^2)} \{ (7x^2-40y-9x^3y)x D_x + 2(14x^2+5y+18x^3y)y D_y \} \\ y(A - X_1) = \dots \end{cases}$$

$$A^2 - \rho A - B, \quad A = \frac{1 - \frac{1}{10}xy}{2(1 - \frac{5}{4}xy)} \langle x, D \rangle, \quad B = -\frac{1-xy}{1 - \frac{5}{4}xy} X_1 Y_1$$

$$A^2 - \rho A - B = (\rho - X_1)(\rho - Y_1) + \dots$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow -\frac{1}{2} \text{ double} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow -\frac{2}{3} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow -1, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow -\frac{5}{6}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow -1 \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow -\frac{7}{6}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow -\frac{4}{3}.$$

$$\text{⑤ 有多項式} = \cancel{(x+1)^2} \cdot (x+\frac{1}{2})^2 (x+\frac{2}{3})^2 (x+\frac{5}{6})^2 (x+1)^3 (x+\frac{7}{6})^2 (x+\frac{4}{3})^2$$

$$h(s) = (s+1) \cdot (s+\frac{1}{2})^2 (s+\frac{2}{3})^2 (s+\frac{5}{6})^2 (s+1)^3 (s+\frac{7}{6})^2 (s+\frac{4}{3})^2$$

§. 5. より複雑な場合について.

§. 2. 3 において, さませる場合をしるべしとはいへ, いずれも, 簡単な場合だといふこともできよう. 既知の場合では, 興味ある問題は $\text{ch. index} \geq 2$ であるといふし, 以上では, § 3 の形にかけたりする, 成るつ多り場合をしるべし必要がある.

現在の手法では, いろいろ計算はかり困難であるが, いずれ, いろいろについても明らかになるであろう. としかく現段階においては, 2 つの事例によって, いろいろ複雑さを, かりまきることとした. いろいろの場合, かなりでいふところの, simplex type と事実的にいふべきのは, 非常にややこしくなる. (もっとも, § 3 の S 型以外は non-simplex type ではないが, できた).

$$1. \quad (x^3 - y^2)^2 - x^2 y^3 \quad (\text{佐藤 稔夫}). \quad \text{ch. index} = 2.$$

$$S(2, 3)$$

blo は Alexander poly と
いふべき. 作用素がわきま (31).

$$2. \quad (x^2 + y^3)(x^2 y^2 + x^6 + y^6) \quad \chi(t) = t^{10} - 1 \quad \text{といふ}$$

factor があり, いろいろと
る作用素に原因するものか,
現在のところ不明である.

$$2. \quad (x^2 + y^3)(x^2y^2 + x^6 + y^6)$$

$A'Camp_0 = \text{よければ}$ $\chi(t) = (t-1)(t^8-1)(t^9-1)(t^{10}-1)$
 これでは、どう考えても $\mathbb{A}^3 + \dots$ まで必要である。
 $\mathbb{A}^2 + \dots$ だとおとほおよく考えて $T=1$.

美は、計算は実行中であって、まだできていない。

= 1例でも, Newton polygonは $1, 2, 2, 2, 2$, non-simplex type であり, $\rightarrow$ または $\leftarrow$ の faces に対応する operators は

$$\frac{2}{9}x_{R1} + \frac{2}{9}x_{R2}, \quad \frac{3}{16}x_{D1} + \frac{1}{8}x_{D2}, \quad \frac{1}{8}x_{D1} + \frac{1}{4}x_{D2} \quad \rightarrow 73.$$

$$\begin{aligned} 5, 7, \quad \frac{2}{9}x D_x + \frac{1}{9}y D_y &\rightarrow (t^9 - 1) \\ \frac{1}{8}x D_x + \frac{1}{4}y D_y &\rightarrow (t^8 - 1) \end{aligned}$$

しかし、 $(t^0 - 1)$ は何だ？

x^2y^6 と x^4y^2 を x と y の係数に分解して,

$$\frac{1}{5}x\partial_x + \frac{1}{10}y\partial_y$$

ト、 (t^0-1) から t^0 までの間に、 q は t^0 をこたない。

1分1, x^2y^6 は $x^2y^5 = y^3 \times x^2y^2$ の積であるから、

よんをたがきしてくるといふも、変な話である。

$$\therefore \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{2}{9} x dx + \frac{1}{9} y dy \right) = \frac{1}{5} x dx + \frac{1}{10} y dy \quad \text{2x, 2y} \quad \text{9がよ!!}$$

2変数の場合, 既約でなくとも, *isolated sing* になる。

「事情も、あるいは反映してりかもしれないが、」

十 π^2 とでもすれば既約になるから、 γ_j も亦もこの形。

ともかく、事情は複雑である。

第三章. Simplex type polynomials.

一般的に予想 K が成立し, 又 $b(x)$ の計算もやりやすい
多項式の系列に, 標記のものがある. この場合は, $b(x)$ も,
 $f(x)$ の Newton polyhedron と ideal 達を Δ と Γ だけで,
かなりわかる. 計算されている変例は, 殆どこのタイプに
属する. ただし, 本章では $f(x)$ は non-isolated でもよい.

§. 1. 準備. $\mathbb{N}_0^n$ の subset について.

$m^{(j)} = (m_1^{(j)}, \dots, m_n^{(j)}) \in \mathbb{N}_0^n$. $j=1, \dots, J$ point と vector とも思ふ.
 $M = \{m^{(1)}, \dots, m^{(J)}\}$ set とも, complex とも思ふ. $m^{(j)} \neq 0$

Def. 1 $m \rightarrow m'$ とは, $\forall i, m_i \leq m'_i$.

M が sweepable であるとは, $j_1 \neq j_2, m^{(j_1)} \rightarrow m^{(j_2)}$
このより $m^{(j_2)} \in M$ かつすべて $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ に対し, 3 番目の
集合を $\tilde{M}$ (swept M) とし, 上の $m^{(j_2)}$ は,
 $m^{(j_1)}$ によって sweep out された元 といふ.

Def. 2 $\tilde{M}$ が n -simplex であるとき, M は
simplex type といふ.

Theorem. 3 M : simplex type ならば, canonical な分割

$$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \text{ があり, } M_1 = \{m^{(0)}, \dots, m^{(k-1)}\}$$

$$M_2 = \{m^{(k)}, \dots, m^{(n)}\} \quad M_3 = \{m^{(k)}, \dots, m^{(n)}\} \quad 1 \leq i \leq k-1,$$

$$\exists l_0, \dots, l_{k-1} \in \mathbb{N}_0 \text{ s.t.}$$

$$\textcircled{1} \quad l_0 + \dots + l_{k-1} = l_k + \dots + l_{k-1} \quad (= l \geq 1)$$

$$\textcircled{2} \quad l_0 m^{(0)} + \dots + l_{k-1} m^{(k-1)} \prec l_k m^{(k)} + \dots + l_{k-1} m^{(k-1)}.$$

(i) $\tilde{M}$ が n -simplex となるように, vector として

$$\alpha_0 m^{(0)} + \dots + \alpha_{k-1} m^{(k-1)} = 0 \quad \text{--- (4)} \quad \alpha_i \neq 0$$

とし, relation が成り立つ, しかも (4) は mod. $\mathbb{Q}^*$

で unique. γ として $\alpha_i = 0$ とする $m^{(i)}$ は

M_3 に属する. これを $m^{(k)} \dots m^{(n)}$ とする.

次に α 達を同符号の α として置く

$$-(\alpha_0 m^{(0)} + \dots + \alpha_{k-1} m^{(k-1)}) = \alpha_k m^{(k)} + \dots + \alpha_n m^{(n)}$$

$$\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1} < 0, \quad \alpha_k, \dots, \alpha_n > 0 \quad \text{とする.}$$

$$\text{ここで } -(\alpha_0 + \dots + \alpha_{k-1}) > (\alpha_k + \dots + \alpha_n) \quad \text{と (5)}$$

も (5) として, 番号をつけかえる. (= 再び

hyperplane 上に置く). ここで, $-\alpha_0, \dots, -\alpha_{k-1} (2)$ を

各々適当に小さくして (1) (2) (3) (4) $\beta_0, \dots, \beta_{k-1}$ とし

$$\beta_0 + \dots + \beta_{k-1} = \alpha_k + \dots + \alpha_n \quad \text{とする.}$$

すると当然

$$\beta_0 m^{(0)} + \dots + \beta_{k-1} m^{(k-1)} \prec \alpha_k m^{(k)} + \dots + \alpha_n m^{(n)}$$

ここで, β のとり方は, この式を定理の ② の形に

かきかえる, i.e. 分母を 1 としておいたときに, ① の値

がなるべく小さくなるようにとるべきである. ■

Def.7 $\tilde{M} = M$ であるとき, strict simplex type 211).
 Y の典型的例は.

$$\textcircled{a} \quad T(n); (m) : \quad \begin{aligned} m^{(0)} &= (m_1, \dots, m_n) & m_i < n_i \\ m^{(i)} &= (0, \dots, \underbrace{n_i}_{\text{at } i}, \dots, 0) & i=1, \dots, n. \end{aligned}$$

Prop.8 $T(n); (m)$ に対しては, Theorem に代けて λ によって
 $\lambda \leq \min_i (N_i) \quad N_i = n_1 \cdots \check{n}_i \cdots n_n$.

証明は, Theorem のやり方と似て (異なるが, 要すに
 induction. 細かい省略する。

Def.9 Theorem に代えて $M_3 = \emptyset$ であり,
 $\#M_1 = 1$ のとき type $\triangle$
 $\#M_2 = 1$ のとき type ∇ となづけらる。

この場合, 番号づけには特別な約束をもしける。

$\#M_1 = 1$ の場合は Theorem と同じく M_1 の元を $m^{(0)}$.

$\#M_2 = 1$ の場合は特に, M_2 の元を $m^{(0)}$ とする。

例: $T(n); (m)$ では $C = \sum \frac{m_i}{n_i} - 1$ に対して.

$$C < 0 \Rightarrow \text{type } \triangle$$

$$C > 0 \Rightarrow \text{type } \nabla$$

§. 2. simplex type polynomial と予想 K .

$f(x)$: polynomial (一般に hol. fn でもよい) $f(0)=0$.

$f(x)$ に表われる monomial の中の multi-index 全体を
集合を M_f とし, §. 1 の結果を逐々適用する。

Def. 10. M_f : simplex type γ とし, f $\in$ simplex type γ とし.

$\widetilde{M}_f$ に対応する monomial γ を選んだ多項式を

$\widetilde{f}(x)$ とし, swept f とし.

★ 実質座標変換 $x=x(X)$ により, $f(x(X))=g(X)\widetilde{f}(X)$ $g(0)\neq 0$ とできる. ★

以下, M_f γ と monomial を同一視し, $\widetilde{f}(x)=\sum_{i=0}^n a_i m_i^{(\gamma)}$

などとかく. たとえば Def 5 は $C_j = \frac{x_j m_j^{(\gamma)}}{m_j^{(\gamma)}} - 1$.

Theorem 11. f : simplex type. $\widetilde{f}$ の monomials は

Theorem 3 の i に番号づけられているとする.

n とし, $\exists \rho_1 + \dots \in f[S]$ 人際で,

γ の主要部は

$$P_j(x, D) = (s - X_j + (l_j - 1)C_j) \cdots (s - X_j + C_j X_j s - X_j)$$

$$\text{と}, \quad P_k(x, D) = P_k(x, D), \dots, P_{k-1}(x, D) \quad \text{である.}$$

Lemma 12. f : simplex type とすれば,

$$\exists L_j(x, x, xD) = (s - X_j) + (\dots \text{higher order})$$

こゝに L_j は x, D に係りて整理し, (きは X_j が s 構成される) 主要部が $s - X_j$ である一階の作用素.

により

$$L_j(s, x, xD) f^{\rho} = a_j C_j m_j^{(\gamma)} s f^{\rho-1}.$$

$$\text{但し} \quad \widetilde{f}(x) = \sum_{j=0}^n a_j m_j^{(\gamma)}$$

$$\begin{aligned} \therefore) \quad f - X_j f &= \alpha_j c_j m^{(j)} + \sum_k \varphi_k^j m^{(k)} \quad \varphi_k^j \in m. \\ &= \text{すなわち, } m^{(j)} \text{ は } \text{一次方程式の組に属する.} \\ \alpha_j c_j m^{(j)} &= (f - X_j f) + \sum_k \psi_k^j (f - X_k f) \quad \psi_k^j \in m. \\ &= \text{この右辺の } j \text{ に関する項は } L_j \text{ に含まれる.} \quad \square \end{aligned}$$

よって, 第一章の Prop. p.13 を用いることに,

$$\begin{aligned} Q_j(\rho) &= L_j(\rho - (l_j - 1), \lambda, x_0 - (l_j - 1)m^{(j)}) \cdots L_j(\rho - 1, \lambda, x_0 - m^{(j)}) L_j(\rho, \lambda, x_0) \\ &= \text{すなわち, } m^{(j)} \text{ は multi index } \lambda \text{ に対して } \lambda_j = 0 \text{ である.} \\ X_j m^{(j)} &= (c_j + 1) m^{(j)} \text{ である.} \end{aligned}$$

$$Q_j(\rho) = (\rho - X_j + (l_j - 1)c_j) \cdots (\rho - X_j + c_j)(\rho - X_j) + (\cdots)$$

$$\begin{aligned} \text{よって, Prop. より } Q_j(\rho) f^\rho &= (\alpha_j c_j)^{l_j} (m^{(j)})^{l_j} \rho^{(l_j)} f^{\rho - l_j} \\ \rho^{(a)} &= \rho(\rho - 1) \cdots (\rho - a + 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{他の } Q_k(\rho) \text{ も同様である. } X_k m^{(j)} &= m^{(j)} \quad k \neq j \\ &= \text{注意する.} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} Q_0(\rho) Q_1(\rho) \cdots Q_{k-1}(\rho) f^\rho = \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha_j c_j)^{l_j} (m^{(j)})^{l_j} \rho^{(l_0 + \cdots + l_{k-1})} f^{\rho - l} \\ Q_k(\rho) \cdots Q_{K-1}(\rho) f^\rho = \prod_{k}^{K-1} (\alpha_j c_j)^{l_j} (m^{(j)})^{l_j} \rho^{(l)} f^{\rho - l} \end{cases}$$

定理 3 より

$$\prod_{j=0}^{k-1} (m^{(j)})^{l_j} \mid \prod_{k}^{K-1} (m^{(j)})^{l_j}$$

$$\begin{aligned} \therefore Q_k(\rho) \cdots Q_{K-1}(\rho) &= \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha_j c_j)^{l_j}}{\prod_{j=0}^{K-1} (\alpha_j c_j)^{l_j}} \cdot \frac{\prod_{j=0}^{K-1} (m^{(j)})^{l_j}}{\prod_{j=0}^{k-1} (m^{(j)})^{l_j}} Q_0(\rho) \cdots Q_{k-1}(\rho) \\ &= f[s]. \end{aligned}$$

定理の証明 $\square$

Fr. 11 でわかるように, $X_{\text{最}}, \dots, X_{k-1}$ が事象を支配
 しており, Prop. 6 の成否は, 大変重要である。

これについて, 本は不都合と云ふけれども ~~矛盾~~ 例がある。

Ψ については, Non-isolated case 参照のこと。

§ 3. $T(n); (m)$ (217 $N T(n); (m)$)

$$NT(\vec{n}); (\vec{m}) = \frac{1}{n_1} x_1^{n_1} + \dots + \frac{1}{n_N} x_N^{n_N} - t x_1^{m_1} \dots x_N^{m_N}$$

$$C = \sum \frac{m_i}{n_i} - 1. \quad \begin{cases} C < 0 & \tau \text{ type } \Delta \\ C > 0 & \tau \text{ type } \nabla \\ C = 0 & \text{is weighted hom } (\frac{1}{n_1}, \dots, \frac{1}{n_N}) \end{cases} \quad \mu = \prod (n_i - 1)$$

Prop. 8 (= 4').

Prop. 13. $NT(\vec{n}); (\vec{m})$ is for (217, $L(f) \leq m_i n(N_i)$
 $N_i = n_1 \dots n_i \dots n_N$.

$$X_0 = \sum \frac{1}{n_i} x_i D_i \quad X_j = X_0 - \frac{C}{m_j} x_j D_j$$

Theorem 11 17, $\dots$ $\pm 8 \frac{C}{m_j} = 2 + t_j$ is 2.

$$C_j = -\frac{n_j}{m_j} C \quad \tau \text{ type } \nabla, \quad > 0 \text{ if type } \Delta \text{ (i.e. } C < 0)$$

Theorem 14. $NT(\vec{n}); (\vec{m})$ is τ , $\underline{l = \min(N_i)}$ is 412,

$$C > 0. \quad \exists p(\rho) \text{ l.p.s. } \in \mathcal{G}[S] \text{ s.t.}$$

$$P(\rho) = \prod_{k=0}^{l-1} (\rho - X_0 + kC) + \dots$$

$$C < 0. \quad P_j(\rho) = \prod_{\nu=0}^{l_j-1} (\rho - X_j + \nu C_j) \in 17,$$

$$P(\rho) = \prod_{j=1}^N P_j(\rho) + \dots \quad \sum l_j = l.$$

一般に, $\min(N_i)$ 以下で上のことを示すことが 17,

(1) までが 11. γ の簡単な判別法を紹介した。

$L(f)$ の判定法

$$(i) \quad n \geq Nm \quad (\text{i.e. } n_i \geq Nm_i \forall i) \Rightarrow L(f) \leq N.$$

$$(1-X_1)(1-X_2)\cdots(1-X_N) + \cdots \in f[S].$$

$$(ii) \quad n < Nm \Rightarrow, \quad n < N'm \text{ とする, 最小の } N' \text{ をとる,}$$

$$L(f) \leq N' \quad \text{これは, } m \geq n \text{ より成り立つ.}$$

$$(iii) \quad (i) \text{ 以外の場合には, } n_i \leq \nu_i m_i \text{ とする. 最小自然数 } \nu_i \text{ をとる.}$$

$$(m_i = 0 \text{ のときは, } \nu_i = \infty \text{ とおく}) \text{ 今, } \nu_1 \leq \nu_2 \leq \cdots \text{ と仮定する}$$

$$\text{このとき, } \nu_1 \leq \nu_2 \leq \cdots \leq \nu_l = l \text{ とする. } l \text{ が存在すれば,}$$

$$f \text{ の和が } l \text{ をとる.} \quad L(f) \leq l.$$

example $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}z^5 - x^2y^2z^3$ に対して, (i) (ii) が成り立つ.

したがって, (iii) によって, $l = 2$ とする. 実際.

$$(1-x_0+c)(1-x_0)+\cdots \text{ が成り立つ.}$$

$$\frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{9}y^9 + \frac{1}{6}z^8 - x^3y^3z^2 \text{ は, 上の簡易判定法で}$$

$$\text{はかめである. } C > 0 \text{ とすると, Th. 11 はこの場合,}$$

$$(1-x_0+3C)(1-x_0+2C)(1-x_0+C)(1-x_0)+\cdots$$

で与えられる.

Th. 14 の $\min(N_i)$ というのは, (i) においてある.

$$C > 0 \text{ のときは } \mu = \prod (n_i - 1)$$

$$C < 0 \text{ のときは 複雑だが } \mu \sim \text{cte}(\max N_i) \text{ という order.}$$

いずれにせよ, 明確な定理から symbol で表わす.

$$L'(f) \leq \mu \text{ という評価とれる.}$$

$$n_1 = \dots = n_N = n, \quad m_1 = \dots = m_N = m \quad (17'')$$

色々なること、比較的よくわかる。

$$t = 2 \text{ 以上} \quad \mathcal{O} \ni x_1^{m-1} x_2^{2m-1} \dots x_N^{Nm-1} \text{ など. if } c < 0.$$

example. $3T(n; m) = \frac{1}{n} (x^n + y^n + z^n) - \frac{1}{m} (xyz)^m$

$$n < 3m \Rightarrow (\rho - X_0 + 2c)(\rho - X_0 + c)(\rho - X_0) + \dots$$

$$n = 3m \Rightarrow \text{homogeneous order } m. (\rho - X_0) f^m = 0.$$

$$n > 3m. \Rightarrow (\rho - X_1)(\rho - X_2)(\rho - X_3) + \dots$$

ideal 達を決定して、 $n \pm 1$ に含めしめる。と 17, 21 をきりしめる。

$$\underline{m \geq 5m-2}$$

$$f_x = x^{n-1} - x^{m-1}(yz)^m \text{ etc.}$$

$$\mathcal{O} \ni x^{m-1} y^{2m-1} z^{3m-1}, x^{2m-1} y^{m+m-1}, x^{n+2m-1} y^{m-1}, x^{2n+m-1}, \dots$$

$$\mathcal{O}:(f) = (x^{m-1} y^{2m-1}, \dots, x^{n-m} - (yz)^m, \dots)$$

すべて cyclic. symmetric.

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{O}/\mathcal{O}:(f) &= (2m-1)^3 + 3(m-1)^2(n-3m+1) \\ &= 3(m-1)^2 n - (m-1)(m^2 - 8m + 1) + 1 \end{aligned}$$

$\eta^{\pm}$

$$\text{特に } m=2 \text{ のときは } 1 \text{ だけ。 } \Rightarrow \text{ 2 だけ。}$$

§ 4. 特に $T_{n;2}$ について. 予想 S , KS の反例.

予想 S , KS は, 当初成立するものでいともなわれていた. これは, 微分作用素の *leaf* が, 非可換であるにもかかわらず, 色々と美しい性質をもつことが, 偏微分方程式論において知られていたからである. 予想 KS については, 一時, 難解な証明も存在した. イヤ誤りが三輪により見おされ, 成りは危まれたが, まづ S に反例がみられ, さらに予想 KS も不成立となった. 以下 $T_{n;2}$ が反例となることを示す.

$n \geq 8$ が条件としてつく. $n=7$ は, 特殊な状況であり, さうと別な意味もあるが, ここにはしなない. 又, 次元を4次元以上に ~~すると, 同様である. 条件は $n \geq 4$ である.~~ 以下 $n \geq 4$ としておく. 以下 $n \geq 4$ としておく. 以下 $n \geq 4$ としておく.

微分作用素で与えられるに不都合があるから, 擬微分作用素にすべてをもちこむべきかもしれない. (この時 KS も不成立では—)

反例は, 次のようにしてつくられる.

$$\exists p_2(\rho, x, \xi) \quad (\rho, \xi \mapsto \pm 2) \text{ s.t. } p_2(f, x, df) = 0.$$

$$\exists P_2(\rho, x, D) \text{ s.t. } \sigma(P_2) = p_2 \text{ and}$$

$$P_2(\rho) f^\rho = \rho (xy)^{n-2} f^{\rho-1}.$$

しかるに $(xy)^{n-2} \notin \mathcal{R} + \mathcal{I}$. 故に 第一章 Prop 5 より 予想 S は不成立. さら, もし予想 KS が成立するならば, 十分大きな λ をとれば $\xi^\lambda p_2(\rho, x, \xi)$ ($\xi \in \partial x$) を主部とするような, $\lambda+2$ 階の作用素 $D_x^\lambda P_2(\rho, x, D) + Q_{\lambda+1}(\rho)$ が存在するはずである. しかるにこれは不可能であることがわかり, 予想 KS もくずれ. 計算はくわしくかいてある.

尚, 参考のため, $T_{8;2}$ の μ の代表元,

$\mathcal{G}_{\mu+f}$ の代表元の表を Appendix 5 としてつけておいた.

$$T_{n,2} \quad \frac{1}{n}(x^n + y^n + z^n) - \frac{1}{2}(xyz)^2$$

$2 \leq n \leq 5$. strict simplex type

$n = 6$. homogeneous polynomial.

$n = 7$ } strict simplex type Δ

$n \geq 8$ $n = 7$. ≥ 8 以上 z^2 は, ideal 等々 $\leq n$ が変る.

以下 $\underline{n \geq 8}$ とする. $C = -\frac{n-6}{n} < 0$.

$$\mu = 3n(n+1) - 1$$

1. ideals.

① $\mathcal{O} \ni xy^3z^5, xy^{n+3}, x^3y^{n+1}, x^{2n+1}, x^{n-1}xy^2z^2, \dots$ cyclic symmetric.

② $\mathcal{O}: f = (x^{n-2}-y^2z^2, \dots, xy^3, \dots)$ cyclic symmetric.
 $\ni x^{n+1}, x^{n-2}y, \dots$ $\dim \mathcal{O}/\mathcal{O}:f = 3n+12$

③ $\mathcal{O}: f^2 = m$

④ $\mathbb{C}f + \mathcal{O} \ni x^n, y^n, z^n, (xyz)^2, \dots$

⑤ $\mathcal{O} + (\frac{f}{2}) \ni x^{n-1}y^{n-2}, x^{n-2}y^{n-1}, (xz)^{n-2}z, \dots$ but $\nexists (xy)^{n-2}$

⑥ $\mathcal{O}^2 + \mathcal{O}f: f^2 / \mathcal{O}: f = (x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx)$

⑦ $\mathcal{O}^3 + \mathcal{O}^2f + \mathcal{O}f^2 \ni f^3$.

($n=7$ z^2 ① $\leq z^2$ は z^2 ⑥ は不明)

2. operators.

$[i,j,k]$ は δ 函数 z^k は否, $[i,j,k]f = x^i y^j z^k z^2 z^3$
 $- P$ の微分作用素 z^2 にかた. $\mathcal{O}, \varphi = 1 - (xyz)^{n-6}$.

$$(i) \quad \textcircled{315} \rightarrow \frac{-1}{4} (y^{n-3}z D_x + xz^3 D_y + x^{n-3}y^{n-5} D_z)$$

$$\textcircled{n+1, 0, 3} = \frac{-1}{4} \{ (y^{n-2} + y^{n-5}(xz)^{n-4} - x^2z^2) z D_x + x y z^3 D_y + x^{n-3} y^{n-5} D_z \}$$

$$\textcircled{n+3, 1, 0} = \frac{-1}{4} \{ (-x^4 + x^{n-2}(yz)^{n-6} + y^{n-4}z^{n-6}) y D_x + x z^{n-4} D_y + x^3 y z D_z \}$$

$$D_x f = x^{n-1} - x y^2 z^2$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{5} \rightarrow X_0 &= \frac{1}{h}(xD_x + yD_y + zD_z) \\
 X_1 &= \frac{h-4}{2h}xD_x + \frac{1}{h}yD_y + \frac{1}{h}zD_z, X_2 = \dots \\
 f - X_0f &= \frac{c}{2}(xyz)^2, \quad f - X_1f = \frac{c}{2}x^h, \dots \\
 x^{h-2}y^{h-1} &= x^{h-2}D_y + \frac{2}{c}yz^2(f - X_1f), \dots \\
 (xyz)^{h-2}z &= x^{h-5}y^{h-7}z^{h-6}\boxed{135}f - (xyz)^{h-4}fz \\
 &= \frac{2}{c}(xyz)^{h-6}z^{h-3}(f - X_0f) - (xyz)^{h-4}fz.
 \end{aligned}$$

$U+f = (x^{h-1}-xy^2z^2, y^{h-1}-x^2yz^2, z^{h-1}-x^2y^2z, x^2y^2z^2)$ に注意
 すると $z=0$ と $x=y=z=0$ は $(xyz)^{h-2} \notin U+f$ となる。

(ii) $f[s]$ 生成元を決定。

$$\begin{aligned}
 - \text{PB.} \quad xy^3(\rho - X_3) &= \frac{c}{2}z^{h-5}\boxed{135} \\
 x^3y(\rho - X_3) &= \frac{c}{2}z^{h-5}\boxed{315} \\
 (x^{h-2}-y^2z^2)(\rho - X_1) &= \frac{c}{2}x^{h-2}(xD_x) = (x^{h-2}y^2z^2)(\rho - X_0) - \frac{c}{2}y^2z^4(xD_x)
 \end{aligned}$$

$\equiv$ 階は色々奇妙な等式が成り立つ、 $z=0$ と $x=y=z=0$ は z を含む。

$$\equiv \text{PB.} \quad (\rho - X_1)(\rho - X_2)(\rho - X_3) + \frac{c}{6}(xyz)^{h-6}(B_1\rho^2 + B_2\rho + B_3)$$

$$B_1 = \frac{1}{2}\langle x, D \rangle - 3$$

$$B_2 = -\frac{1}{h}\left(S_2' + \frac{h-2}{4}S_2 - 5\langle x, D \rangle - 2(h-6)\right)$$

$$B_3 = \frac{1}{2h^2}\left\{S_2' + \frac{h-4}{2}S_2 - 6\langle x, D \rangle - 4(h-6)\langle x, D \rangle + \frac{(h-6)^2}{4}xyz^2D_xD_yD_z\right\}$$

$$\text{ここは } S_2 = xyzD_xD_y + yzD_yD_z + zxD_zD_x, \quad S_2' = (xD_x)^2 + (yD_y)^2 + (zD_z)^2$$

$\equiv$ 階 $\geq -\text{PB}$ の作用系を用いて, $B_1 = B_2 = 0$ となり、 $z=0$ と $x=y=z=0$ は z を含む。

又, $\mathcal{P}$ の拡大して得た $\mathcal{Q}$ と $\mathcal{R}$ とは, まづ

$$\left(\frac{z}{c}\right)^2 D_z Q \neq^0 = \frac{(n-6)\rho}{\varphi^2} (xy)^{2n-8} z^{n-11} \neq^{\rho-1} + \frac{\rho(\rho-1)}{\varphi} z \left\{ (xy)^{n-2} - (xy)^n \right\} \neq^{\rho-2}$$

となる (→ 2) であるから, 次のように $\mathcal{R}$ を定めよう,

$$R = \frac{z}{\varphi} \left\{ \frac{(n-6)\rho}{2\varphi} (xy)^{n-8} (\rho - X_2) + (xy)^{n-6} (\rho - X_0 + cX\rho - X_0) - (\rho - X_1)(\rho - X_2) \right\}$$

$$\boxed{D_z Q - R \in \mathcal{J}[\mathcal{S}]} \quad \text{i.e.} \quad (D_z z^2 + z)\rho^2 + B'_1 \rho + B'_2 \in \mathcal{J}[\mathcal{S}].$$

$$\text{尚 } n \geq 10 \text{ として } R' = \left(\frac{c}{2\varphi}\right)^2 (n-6) x^{2n-13} y^{2n-11} z^{n-8} \boxed{531} -$$

$$+ \frac{z}{\varphi} \left\{ (\rho - X_1)(\rho - X_2) - \left(\frac{c}{2}\right)^2 (xy)^{n-10} \left(\boxed{1135} \boxed{521} + \frac{z}{\varphi} (5y^{n-6} z \boxed{251} + \right.$$

$$\left. \left. 2z \boxed{531} + y^{n-6} \boxed{n+130} \right) \right\} \quad \text{として}$$

$$D_z Q - R' \in \mathcal{J}[\mathcal{S}].$$

これで, $D_x Q + \delta \in \mathcal{J}[\mathcal{S}]$? だろうか. 実は,
 δ をどこかに大きくしても, $D_x^l Q + \delta$ の形の作用素は
 とかならないことがわかる. 以下で示す,

予想 $KS_{\mathcal{S}}$ は反例. を示す. さて証明.

$$P_2(\rho) = \varphi \left(\frac{z}{c}\right)^2 Q \quad \text{とすると,}$$

$$P_2(\rho) \neq^0 = \rho (xy)^{n-2} \neq^{\rho-1}.$$

今 l (, $\exists l$, 修正項 $Q_{l+1}(\rho)$ (total order $l+1$ 以下) により

$$(D_x^l P_2(\rho) + Q_{l+1}(\rho)) \neq^0 = 0 \quad \text{になるように}.$$

修正項の作用した分は

$$\rho(\rho-1)\cdots(\rho-l)(xy)^{n-2} \neq_x^l \neq^{\rho-1-l} + (\text{S により } l \geq 2 \text{ 以下})$$

修正項の作用は

$$\rho(\rho-1)\cdots(\rho-l) \left[(n+l+1)^{l+1} \rho \right] \neq^{\rho-1-l} + (\text{S により } l \geq 2 \text{ 以下})$$

よって, $(xy)^{n-2} \neq_x^l \in (O(\rho))^{l+1}$ である (これは必ずしも成り立たない).

(これは, 注意は平方根 ρ による.)

$$f_K = X^{h-1} - X y^2 z^2, \quad N+f = (X^{h-1}, y^{h-1}, z^{h-1}, X y^2 z^2)$$

$$f, z \quad z = 0 \text{ と } \pm 1, \pm 2,$$

$$(X y)^{h-2} X^{(h-1)l} \in (X^{h-1}, y^{h-1})^{l+1} \text{ であることが示される.}$$

$$\text{よって} \quad \parallel \quad X^{(h-1)(l+1)-1} y^{h-2} \quad \text{であり, } \parallel \text{ から } l=0 \text{ としても}$$

$$\text{かよ } j \text{ なる } z \text{ は存在する. } D_x^{l_1} D_y^{l_2} p_2(z) + \dots \text{ は}$$

$$X^{(h-1)(l_1+1)-1} y^{(h-1)(l_2+1)-1} \in (X^{h-1}, y^{h-1})^{l_1+l_2+1} ?$$

と示すか, これも示さず l_1, l_2 を適当に選べばよい.

$$\text{よって, } z^2 \rho^2 + \dots \text{ は } P \otimes f[5] \text{ 中に存在する.}$$

しかし, $z \neq 0$ では存在しない (これは D_2 -symbol)

global=12,

±7, $X y, y z, z x$ について示さなければならない.

今までの $m=8$ がよく出てきていて結構よい感じが,

$$y z (\rho - X_1)(\rho - Y_1 + C) + \left(\frac{C}{2}\right)^2 X^{h-2} D_y D_z - \left(\frac{C}{2}\right)^2 X^{h-8} (y z)^{h-7} \boxed{351} \boxed{915} \\ + \frac{C^2}{49} X^{h-8} (y z)^{h-7} \left\{ (3z + 5(X y)^2) \boxed{135} + (X y)^{h-4} \boxed{315} \right\}$$

$$= 1 = Y_1 = \frac{1}{h} X D_X + \frac{h-4}{2h} y D_y + \frac{h-4}{2h} z D_z = X_0 - \frac{C}{2} (y D_y + z D_z)$$

どうもキミユーなるものが出てくる. $C < 0$ に注意スベシ.

尚, 本より意味するが, $(X y z)^2 \rho^2 + \dots$ という項は, 主要部はわかるが, 残りの項は,

$$(X y z)^2 (\rho - X_0 + C)(\rho - X_0) + \dots$$

$$(X y z)^2 \left(\rho - \frac{1}{6} \langle X, D \rangle \right) (\rho - X_0) + \dots$$

などと, もっともよい感じがする. (しかし $X y z \rho^2$ については)

$$X y z \left\{ \rho^2 - \left(\frac{h-2}{2h} \langle X, D \rangle + \frac{h-6}{h} \right) \rho + \frac{h-6}{h^2} \left(\frac{1}{2} \langle X, D \rangle - \frac{h-3}{3} \right) \langle X, D \rangle + \frac{2}{3} S_2 \right\} + \dots$$

話が前後するが, $z^2 \rho^2 + \dots$ を修正して $y z^2 \rho^2 + \dots$ を求めてみれば次のようになる。

$$\begin{aligned} y \rho \rho^A &= \left(\frac{c}{2}\right)^2 \frac{1}{\varphi} x^{n-2} y^{n-1} \rho^{A-1} \\ &= \left(\frac{c}{2}\right)^2 \frac{1}{\varphi} \left(x^{n-2} D_y \rho + \frac{2}{c} y z^2 (\rho - X_1) \right) \rho^A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore y \rho &= \frac{c}{2} y z^2 (\rho - X_1) - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \frac{1}{\varphi} \left(x^{n-2} D_y \rho + \frac{2}{c} x^{n-6} y^{n-5} z^{n-4} (\rho - X_1) \right) \\ &= y z^2 (\rho - X_1) (\rho - X_2 - \frac{c}{2}) - \frac{c^2}{2^3} (xy)^{n-8} (\boxed{1351} \boxed{531} + \boxed{531} \boxed{1351}) \\ &\quad - \frac{3c^2 n A}{2^3 \varphi} x^{n-6} y^{n-5} z^{n-4} - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \frac{1}{\varphi} (xy)^{n-6} z^{n-7} \left\{ x \left(\frac{13}{2} + \frac{2n}{7} \right) \boxed{127} - \frac{3}{2} y z^4 D_z \right\} \\ &\quad - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \frac{1}{\varphi} \left(x^{n-2} D_y \rho + \frac{2}{c} x^{n-6} y^{n-5} z^{n-4} (\rho - X_1) \right) \in \mathcal{J}[S]. \end{aligned}$$

対称的に $x z^2 (\rho - X_1 - \frac{c}{2}) (\rho - X_2) + \dots \in \mathcal{J}[S]$.

つまりこの $y z^2 (\rho - X_1) (\rho - X_2 + c) + \dots$ の z 倍と z 差 (ひき),
 $y z^2 (\rho - X_1) (z D_z - 3c) + \dots \in \mathcal{J}[S]$. 同様にして

として, 基本予想との gap は 45 局-2 のようになる。

$$\begin{aligned} \exists \quad & z^2 (\rho - X_1) (\rho - X_2) - \frac{c^2}{2^3} (xy)^{n-8} (\boxed{1351} \boxed{531} + \boxed{531} \boxed{1351}) + \dots \\ \text{but } \mathcal{J}[S] \ni & \begin{cases} z^3 (\rho - X_1) (\rho - X_2) - \frac{c^2}{2^3} (xy)^{n-8} z (\quad) + \dots \\ y z^2 (\rho - X_1) (\rho - X_2 - \frac{c}{2}) - \frac{c^2}{2^3} x^{n-8} y^{n-7} (\quad) + \dots \\ x z^2 (\rho - X_1 - \frac{c}{2}) (\rho - X_2) - \frac{c^2}{2^3} x^{n-7} y^{n-8} (\quad) + \dots \\ (D_z z^2 + z) (\rho - X_1 X_2) - \frac{c^2}{2^3} (xy)^{n-8} D_z (\quad) + \dots \end{cases} \end{aligned}$$

即ち, x, y, z, D_z を乗ずれば, $j \neq k$ とれる。

3. まとめ.

$$\text{一階} \quad xy^3(\rho - X_3) + \dots, \quad x^3y(\rho - X_3) + \dots \\ (x^{n-2}y^2z^2X(\rho - X_1) - \frac{C}{2}x^{n-2}(xD_x) = (x^{n-2}y^2z^2)(\rho - X_0) - \frac{C}{2}y^2z^2(xD_x))$$

$$\text{二階} \quad yz^2(\rho - X_1)(\rho - Y_1 + C) + \dots \\ z^3(\rho - X_1)(\rho - X_2) + \dots, \quad yz^2(\rho - X_1)(\rho - X_2 - \frac{C}{2}) + \dots \\ xz^2(\rho - X_1 - \frac{C}{2})(\rho - X_2) + \dots, \quad (D_x z^2 + z)(\rho - X_1)(\rho - X_2) + \dots \\ (z^2D^2 + \dots \text{はとけず}, Y_1 \text{が}, D_x^2 z^2 D^2 + \dots, D_x^2 D_y^2 z^2 D^2 + \dots \text{とけず})$$

$$\text{三階} \quad (\rho - X_1)(\rho - X_2)(\rho - X_3) + \dots$$

$$\text{こゝに} \quad \left\{ \begin{array}{l} X_0 = \frac{1}{n}(xD_x + yD_y + zD_z) \quad C = -\frac{n-6}{n} \\ X_1 = X_0 - \frac{C}{2}xD_x = \frac{n-4}{2n}xD_x + \frac{1}{n}yD_y + \frac{1}{n}zD_z \quad \text{etc.} \\ Y_1 = X_0 - \frac{C}{2}(yD_y + zD_z) = \frac{1}{n}xD_x + \frac{n-4}{2n}yD_y + \frac{n-4}{2n}zD_z \quad \text{etc.} \end{array} \right.$$

4. 生成函数.

二階におけるごたごたもあり, より慎重な検討を行ふべきであるが,

$$\boxed{000} \rightarrow (s + \frac{1}{2})^3, \quad \boxed{111} \rightarrow (s+1)^2$$

などは確実.

monodromy の固有多項式 $n: \text{odd} \neq n: \text{even}$ である) とおもわれる。(表示法が)

$$n: \text{even} \Rightarrow \frac{(t^n - 1)^{3(n+1)}}{t-1} \quad \text{である}.$$

$$-H^2 =, \quad a(x) \in \mathbb{F}^b: \mathbb{F}^{b-1}(1 + \mathbb{F}^{b-2}x^2 + \dots + x^{b-1})$$

i.e. $\exists p_b(a, x, \mathbb{F}) = a(x)x^b + \dots, \quad p_b(f, x, df) = 0$
 (かつ, p_b is principal symbol かつ $\int \mathbb{F}$ is 元 σ なる, $\mathbb{F}$ is $\mathbb{F}$,
 " $\exists a(x) = 1$ かつ, $\mathbb{F}$ is $\mathbb{F}$ の $S_{\mathbb{F}}$ の 反例 を 与える) といふ.

$$N T_{h; m} \quad \frac{1}{n} (x_1^n + \dots + x_N^n) - \frac{1}{m} (x_1 \dots x_N)^m.$$

$$n > Nm \text{ (type D)} \quad N \geq 3, \quad m \geq 2 \quad \text{と仮定}$$

$$l(f) = L(f) = N \quad (\text{---})$$

$$\boxed{n \geq (2N-1)m-2} \text{ かつ, } x_1^{2m-2} (x_2 \dots x_{N-2})^{Nm-2} = 1 \text{ かつ, } 2 \text{ P の } S_{\mathbb{F}} \text{ の 反例 を 与える.}$$

$$\boxed{n \geq \frac{1}{2}(N-1)\{(N+2)m-2\}} \text{ かつ, } x_1^{(N-1)(m-1)} = 1 \text{ かつ, } N-1 \text{ P の } S_{\mathbb{F}} \text{ の 反例 を 与える.}$$

$2 < n < N-1$ かつ n は 2 の べき乗 である, n の 大きさ によって,
 色んな $\mathbb{F}$ の 反例 が 与えられる.

$$\text{又, } \boxed{n \geq (N+2)m-2} \text{ かつ, } x_1^{2m-2} (x_2 \dots x_{N-2})^{(N+2)m-2} = 1 \text{ かつ, } 2 \text{ P の 反例 を 与える. etc. ...}$$

かつ $\dots$ といふ 色んな 場合 がある.

$$N=3 \text{ かつ, } \text{より かつ } (\text{---}) \text{ である.}$$

$$3 T_{h; m} \quad \frac{1}{n} (x^n + y^n + z^n) - \frac{1}{m} (xyz)^m \quad \boxed{n \geq 5m-2}$$

$$(i) \quad U \rightarrow x^{m-1} y^{2m-1} z^{3m-1}, x^{2m-1} y^{n+m-1}, x^{n+2m-1} y^{m-1}, x^{2n+m-1}, \dots$$

$$U: f = (x^{m-1} y^{2m-1}, \dots, x^{n-m} (yz)^m, \dots) \quad \leftarrow \text{---} \text{---} \text{---} (n \geq 3m+1)$$

$$\dim \mathcal{O}/U = 3n^2(m-1) + 3n-1$$

$$\dim \mathcal{O}/U: f = 3n(m-1)^2 - (m-1)(m^2 - 8m + 1) + 1.$$

$$m \geq 5m-2 \Rightarrow (n^2 + n + 1)^2 / n = (x^{2m-2}, (xy)^{m-1}, \dots)$$

$$(ii) \quad X_0 = \frac{1}{n} (x D_x + y D_y + z D_z) \quad C = \frac{3m}{n} - 1$$

$$X_1 = X_0 - \frac{C}{n} x D_x = \left(\frac{1}{n} - \frac{C}{n}\right) x D_x + \frac{1}{n} (y D_y + z D_z) \quad \text{etc.}$$

$(i, j, k) \in 1, 2, 3 \rightarrow \text{permutation of } 1, 2,$

$\boxed{i j k} \in 1, 2, \quad \boxed{i j k} \neq = x^{i m-1} y^{j m-1} z^{k m-1} \in \text{vector field.}$

$$\boxed{1 2 3} = \frac{-1}{\varphi} (y^{m-1} z^{2m-1} D_x + x^{n-m-1} z^{m-1} D_y + x^{n-2m-1} y^{n-m-1} D_z)$$

$$\varphi = 1 - (xyz)^{n-3m}$$

(iii) - $P_{\overline{13}}$

$$x^{m-1} y^{2m-1} (\rho - X_3) - \frac{C}{m} (x^m y^{2m-1} D_x + z \boxed{2 3 1})$$

$$(x^{n-m} - (yz)^m) (\rho - X_1) - \frac{C}{m} x^{n-m} (x D_x) \quad \text{etc.}$$

(iv) $\equiv P_{\overline{13}}$

$$(\rho - X_1)(\rho - X_2)(\rho - X_3) - (xyz)^{n-3m} (\rho - X_0 + z) (\rho - X_0 + c) (\rho - X_0)$$

$m \geq 5m-2 \in 1, 2, \quad (\rho - X_1)(\rho - X_2)(\rho - X_3) + (\rho - X_0 + z) (\rho - X_0 + c) (\rho - X_0) \in 1, 2, 3.$

(v) $\equiv P_{\overline{13}}$

$$Q = \boxed{1 2 3} \boxed{1 3 2} + \frac{1}{\varphi} x^{n-3m-1} y^{2m-1} z^{m-1} \{ (3m-1) \boxed{3 1 2} + (2m-1) y^{n-3m} \boxed{2 3 1} \}$$

$$P_2(\rho) = x^{2m-2} (\rho - X_2)(\rho - X_3) - \left(\frac{C}{m}\right)^2 (yz)^{n-5m+2} Q \quad \in 1, 2, 3$$

$$P_2(\rho) \neq \rho = \left(\frac{C}{m}\right)^2 \frac{m-1}{\varphi} x^{m-2} (yz)^{n-m} \rho \neq \rho^{-1}$$

$$Q + (f) = (x^{n-1} - x^{m-1} (yz)^m, \dots, (xyz)^n) \neq 1, \quad S_{\overline{13}} \text{ is valid.}$$

これに等しい $1=1, 2, \quad x, y^{m-1}, z^{m-1}, \quad D_x \in 1, 2, 3$

OK. 是等しい $1=1, 2,$

$$y^{m-1} \left\{ x^{2m-2} \left(\rho - X_2 - \frac{(m-1)C}{m\varphi} \right) (\rho - X_3) - \left(\frac{C}{m}\right)^2 (yz)^{n-5m+2} Q \right\} - \left(\frac{C}{m}\right)^2 \frac{m-1}{\varphi} x^{m-2} z^{n-m} D_y$$

$$a^{(b)} = a(a-1)\cdots(a-b+1) \quad z.12,$$

$$S_{m-2} = \sum_{j=1}^{m-1} (m-1)^{(j)} D_x^{m-1-j} \frac{1}{\varphi} x^{m-1-j} \quad (e.g. \quad S_0 = \frac{m-1}{\varphi})$$

$$z.11, \quad m-2 \text{ 以上 } 0 \leq 2 \rightarrow 1 \neq 1 \neq 2 \neq 1,$$

$$\Psi = S_{m-2} \cdot x^{m-1}$$

$$R(\rho) = S_{m-2} \cdot (xy^2)^{n-4m} \left\{ (\rho - X_0 + c)(\rho - X_0) + \left(\frac{c}{m}\right)^2 \frac{n-3m}{\varphi} y^{n-2m+1} z^{n-3m+1} \boxed{123} \right\}$$

$$z \neq 1, \quad R(\rho) \text{ かつ } 1) =, \quad m \geq 5m-1 \quad z.12$$

$$R = \left(\frac{c}{m}\right)^2 S_{m-2} \cdot x^{n-4m} (y^2)^{n-5m+1} \left[\frac{n-3m}{\varphi} y^{n-m} z^{n-2m} \boxed{123} + \right.$$

$$\left. \left\{ xy^2 \boxed{123} \boxed{321} + \frac{x^{2m}}{\varphi} \left((3m-1) y^m \boxed{123} + x^{n-4m} ((2m-1)(xz) + (m-1)y^{n-m}) \boxed{321} \right) \right\} \right\}$$

$$z \neq 1, \quad z,$$

$$\left\{ (D_x^{m-1} x^{2m-2} + \Psi)(\rho - X_2)(\rho - X_3) - D_x^{m-1} \left(\frac{c}{m}\right)^2 (y^2)^{n-5m+2} Q \right\} = R(\rho)$$

$$\text{or} \quad \left\{ \quad \quad \quad \right\} = R.$$

$$D_y, D_z \text{ に対して修正する必要がある.}$$

$$(xy)^{m-1} (\rho - X_3)(\rho - Y_3 + c) + \left(\frac{c}{m}\right)^2 z^{n-m} D_x D_y + \left(\frac{c}{m}\right)^2 T$$

$$Y_3 = X_0 - \frac{c}{m} (x D_x + y D_y)$$

$$T = (xy)^{n-4m+1} z^{n-5m+2} \boxed{123} \boxed{321} + \frac{1}{\varphi} \left\{ (xy)^{n-4m} z^{n-4m+1} \left((3m-1)(xz)^m + \right. \right.$$

$$\left. (3m-2)x^{n-m} \right) \boxed{321} + (m-1)x^{2n-3m-1} y^{n-3m} z^{n-4m} D_y \left. \right\}$$

$$z.11, \quad z \neq 1, \quad (xy)^{m-1} = \text{etc.}$$

$$z.12 \Rightarrow \quad \underline{NTh_{1,2}} \quad 1 \rightarrow \dots \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow j.$$

$$NTh_{1,2} \quad \frac{1}{N} (x_1^N + \dots + x_N^N) - \frac{1}{2} (x_1 \cdots x_N)^2 \quad (N \geq 4)$$

$$\varphi = 1 - (x_1 \cdots x_N)^{N-2N}$$

§5. simplex type function に対する例.

2変数のものを考えるとしてあげれば, §2 にはすべて simplex type である. §3 では type S のような simplex type である. Simplex type であることは, type S の計算は参考であった. しかし link をとけば, 一般に simplex type であるにせよ, exact duplex type とでもいえるべきもので, 与えられることができた.

$(x^2+y^3)(x^2y^2+x^6+y^6)$ は, simplex type である. しかし, 下へつぎ出していじりやうしい典型である. 与えられるかもしれない.

本章においても, §3, §4 に simplex type の典型例をあげたが, §4 のようは一見簡単なものでも, 非常に複雑なことがあることを示した通りである.

3 $T_{(p,q,r)}; (1,1,1)$ は 第4章 §2 の $T_{p,q,r}$ にある. これはかなり複雑なものである.

1. $\frac{1}{4}(x^4+y^4+z^4) - x^2y^2$. 計算の初まの初期に, double の出ることがある. 矢野の計算は太島利雄氏が福達し, 移書があった.
 $T_{(4)}; (1)$
2. $\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)z + \frac{z^3}{2}$ T 型とよばれる simplex type.
3. $\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3) - x^2y^2$ y^3 に対する face の positivity を満たさない. (しかしもしやるとなるといい.)
4. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{3}z^3 - x^2y^2z^2$
type ∇

$$1. \quad \frac{1}{4}(x^4 + y^4 + z^4) - xyz^2$$

$$\mu=11. \quad n \geq m^5 \quad n: f = m. \quad c = -\frac{1}{f}. \quad \varphi = 1 - xyz.$$

$$X_1 = \frac{1}{4}(2xD_x + yD_y + zD_z), \quad X_2 = \frac{1}{4}(xD_x + 2yD_y + zD_z), \quad X_3 = \frac{1}{4}(xD_x + yD_y + 2zD_z)$$

$$X_0 = \frac{1}{4}(xD_x + yD_y + zD_z)$$

$$-P45. \quad x(\rho - X_3) - \frac{z^2}{4\varphi}(y^2D_x + zD_y + x^2yD_z)$$

$$y(\rho - X_1) - \frac{x^2}{4\varphi}(y^2zD_x + z^2D_y + xD_z)$$

$$z(\rho - X_2) - \frac{y^2}{4\varphi}(yD_x + z^2D_y + x^2D_z)$$

$$= P45. \quad - \text{船場から}, \quad (1 - \frac{1}{4}(x,0) + \frac{1}{4}) (1 - \frac{1}{3}(x,0)) + \dots$$

$$L(1, -2, 1) \text{ は } - \text{見かけ} = (1, 1, 1) \text{ である。}$$

$$A^2 - A - B = 17, \quad \begin{cases} A = -\frac{5}{4} + \frac{3xz^2}{4\varphi^2} \\ B = (\frac{5}{3} - \frac{(1+xyz)xz}{12\varphi^2})X_0 - \frac{1}{16\varphi^2} \sum a_{ij}D_iD_j \end{cases}$$

$$= \text{このとき}, \quad \text{主成分}$$

$$\text{分解できる。}$$

$$(a_{11} = (xyz - 2)y^2z^2, \dots$$

$$(a_{23} = \frac{1}{3} \{ (2x^2yz + y^2z^2 - 5x^2)x - 4xyz \} \dots$$

$$A^2 - A - B = A^2 - (X_0 - \frac{5}{4})A - \frac{5}{3}X_0 - \frac{1}{12} \{ (yD_y)(zD_z) + (xD_x)(xD_x) + (xD_x)(yD_y) \} + \dots$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{5}{4} & 100 \end{pmatrix}, \dots, \quad e_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -\frac{7}{2} & 240 \end{pmatrix}, \dots$$

$$e_9 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 6 & 0 & 1 \\ -\frac{7}{4} & (\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 1) \end{pmatrix}, \dots, \quad \text{と}, \quad \rho \sim \frac{1}{6} \text{ 程度} \quad \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -\frac{1}{4} & & 0 \\ & & & -\frac{3}{2} & \\ 0 & & & & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

$$A(\rho) = (\rho+1) \cdot (\rho+1)^2 (\rho+\frac{1}{4}) (\rho+\frac{3}{2}) (\rho+\frac{7}{4})$$

これは、三次元で $A(\rho) = \text{double} - \rho^2$, である。このとき ρ^2 は ρ の二乗である。

2. $f = \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)z + \frac{z^3}{3}$
simplex type.

$$X_0 = \frac{1}{3}(xD_x + yD_y + zD_z) \quad X_3 = \frac{1}{4}(xD_x + yD_y) + \frac{1}{2}zD_z$$

$$X_1 = \frac{1}{6}xD_x + \frac{1}{3}yD_y + \frac{1}{3}zD_z \quad X_2 = \frac{1}{3}xD_x + \frac{1}{6}yD_y + \frac{1}{3}zD_z$$

$$Y' = -\frac{1}{2}xD_x + \frac{1}{2}yD_y + zD_z \quad Y'' = \frac{1}{2}xD_x - \frac{1}{2}yD_y + zD_z$$

$$Y''' = xD_x + yD_y$$

-P5.
$$X(\rho - X_3) = \frac{z}{6(1-z)} (XY' + zD_x)$$

$$Y(\rho - X_3) = \frac{z}{6(1-z)} (yY'' + zD_y)$$

$$z(\rho - X_0) = \frac{1}{12(1-z)} \{ (x^2Y' + y^2Y'') + z^2Y''' \}$$

=P5.
$$(\rho - X_0)(\rho - X_3) = \frac{z}{1-z} \left\{ \left(\frac{1}{12}xD_x + \frac{1}{12}yD_y + \frac{1}{6}zD_z \right) \rho - B \right\}$$

$$B = \frac{1}{36}((xD_x)^2 + (yD_y)^2) + \frac{1}{18}(zD_z)^2 + \frac{1}{36}x y D_x D_y + \frac{1}{12}(y z D_y D_z + z x D_z D_x)$$

※ = 15 2-a 2-p 12, -P5 5-7 7 微分作用素にかか2

□ 5 is double factor $(s+1)^2$ is in 3.

$$h(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+1)^2} (s+\frac{4}{3})(s+\frac{5}{3})(s+\frac{3}{2})(s+2)(s+\frac{5}{4})(s+\frac{7}{4})$$

③ 有理化式 2" 12, 25 12 $(s+\frac{5}{4})(s+\frac{7}{4})$ 5" 17 2.

$$3. \quad \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - x^2yz^2$$

type ∇ であり associated operators を 4 つと,

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{3}(xD_x + yD_y + zD_z) \\ X_1 &= \frac{1}{3}(yD_y + zD_z) \\ X_2 &= \frac{1}{3}(xD_x - yD_y + zD_z) \\ X_3 &= \frac{1}{3}(xD_x + yD_y) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{となることも分かるが,} \\ &X_2 \text{ について, 係数} \\ &\text{も出てきている.} \\ &\text{これは } z = z \text{ であり} \\ &\text{だから正しい事情である.} \end{aligned}$$

しかしこの例の場合, X_0 の支配下には必ずしも支配することはないはずである. (実際, 不用な associated operators に negative coeff. が出てくるなど, 11 (c) でもある)

実はこの polynomial は quasi-hom. である!

$$f = X_0 f + \frac{2yz^2}{3(1-4xyz^2)}(fx + 2xyzf_z)$$

つまり, positivity 不成立というものは, 左に計算する
 かつこうして (1) だけ, (1) だけ quasi-hom. 1 = 2, 2
 (1) だけである. して 2 2 2, positivity は 2 2
 かるりむつかしい. ことなるかもしめる.

$$4. \quad \frac{1}{7}x^4 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}z^5 - xy^5z^3 \quad \text{type } \nabla.$$

$$c = \frac{73}{180} > 0. \quad \mu = 96. \quad Q: f = (x^2, y^3, z)$$

$$X_0 = \frac{1}{4}x D_x + \frac{1}{4}y D_y + \frac{1}{5}z D_z. \quad \varphi = 1 - 15x^2y^2z$$

$$Q = \frac{1}{\varphi}(z D_y + 5xy^4 D_z) \quad Q' = \frac{1}{\varphi}(3xz^2 D_y + y^3 D_z)$$

$$\begin{aligned} -\text{pf}_5. \quad & x^2(\lambda - X_0) - cy^2z^3 \{ y^3 D_x + z^2 Q \} \\ & y^3(\lambda - X_0) - cxz^2 Q \\ & z(\lambda - X_0) - cxy^2 Q' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \text{pf}_5 \quad & (\lambda - X_0 + c)(\lambda - X_0) - \frac{x^2y^3}{\varphi} c^2 (3y D_y + 5z D_z - 9) Q' \\ & + \frac{x^2y^2z^2}{\varphi} c^2 D_y D_z. \end{aligned}$$

$$\boxed{000} \rightarrow \frac{101}{180} \text{ \& } \frac{229}{30} \quad \boxed{010} \rightarrow \frac{121}{180} \text{ \& } \frac{97}{90} \text{ etc.}$$

$$\begin{aligned} b(\lambda) = (\lambda+1) \cdot \left(\lambda + \frac{101}{180} \right) \left(\lambda + \frac{121}{180} \right) \cdots \cdots \\ \left(\lambda + \frac{2}{90} \right) \cdots \cdots \end{aligned}$$

§6. non-simplex type function $g(h)$ について.

non-simplex type の代表的なものは、第二章 §3 の S 型以外の link である。しかし、この場合は, duplex といっても, 合同な simplex をかきかたよりる形であり, 又 結表示の 特殊性 もあつて, γ によって示したように, 作用を決定している。§5 の 佐藤 による ch. index 2 の 実例は, やはり non-simplex であり, (simplex type の def をよくよ. カッコウが simplex とい) えてはならない) γ による大変な計算になる。そして, A'Campo の例は  といふ感じに下へ張り出してきていて, まことに, ややこしいであつてと 批判される。

simplex type においては, 結果が 2 である。

“ $f(x)$ の lower Newton polyhedron faces に associate した operators でこゝがすむ”

といふわけだが, 上の 2 例とも, γ ではないといふことは, γ でのべた通りである。つまり, 一般には, Newton polyhedron 程度, 知るものでは何もわからない, simplex type であり, complementary operators などか何故表われないかは, まだ満足な説明がない。

ここでは, non-simplex type であり, 対称性をわたす比較的好くいうた例をしるしておく。

$$x^3 + y^3 + (x^2 + y^2)z + z^4$$

Arnold の P_4 に x^3 を加えたものである。

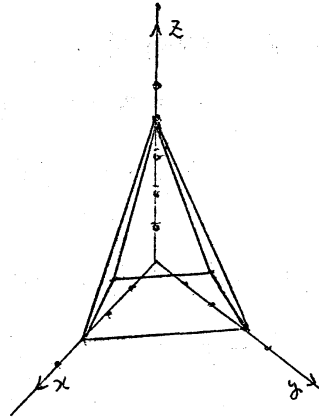
$$\frac{1}{3}(x^3+y^3) + \frac{1}{2}(x^2+y^2)z + \frac{1}{4}\beta z^4$$

$U \geq m^5$ (z と x, y の $4=2$ monomial 12 $U_1 = \lambda z$)

$m=9$. 1. $x, y, z, x^2, y^2, z^2, x^3, y^3, z^3$ or x^2y etc.

$$\begin{cases} X_0 = \frac{1}{3}(xD_x + yD_y) + \frac{1}{4}zD_z \\ X_2 = \frac{3}{8}(xD_x + yD_y) + \frac{1}{4}zD_z \\ X_3 = \frac{1}{3}(xD_x + yD_y + zD_z) \end{cases}$$

さうが恒等式になるが, 2階ですわ



— p. 15. $\varphi = 1 + \beta z$ $\varphi_2 = 1 + 2\beta z$ $\begin{cases} Y_1 = -\frac{1}{2}(D_x + D_y) + D_z \\ Y_2 = yD_x + xD_y \end{cases}$

$$\boxed{112} = \frac{1}{\varphi} (xyY_1 + \frac{1}{2}zY_2)$$

$$\boxed{302} = \frac{2}{\varphi_2} \left\{ x^3Y_1 + \frac{1}{2}(x^2+xy-y^2)zD_x + \frac{1}{2}z\boxed{112} \right\}$$

$$\begin{aligned} & x(1-X_3) + \frac{\beta}{12} \left\{ z^2(z-x)D_x + \boxed{302} \right\} \\ & y(1-X_3) + \frac{\beta}{12} \left\{ z^2(z-y)D_y + \boxed{032} \right\} \\ & z(1-X_2) + \frac{1}{12\varphi_2} Q \end{aligned}$$

$$Q = \beta z^2(xD_x + yD_y) - \beta z^3(D_x + D_y) + (x+y)D_z + \frac{1}{\varphi} (xyY_1 - \frac{1}{2}\beta z^2(yD_x + xD_y))$$

= p. 15.

$$(1-X_2)(1-X_3) = \frac{\beta}{2 \cdot 12^2} (x^3+y^3)z^4 \quad n(n-1) \neq n-2.$$

$$(x^3+y^3)z^4 = (x^2+y^2)z \cdot (x+y)z^3 - xy z^2 \cdot (x+y)z^2 \quad \text{と } \nabla z,$$

$$R(n) = 24 \left(\frac{Q}{\varphi_2} - z^2 Y_1 \right) (1-X_0) + \boxed{112} (12(1-X_3) + Y_1) \quad \text{と } \nabla r.$$

$$P(n) = (1-X_2)(1-X_3) - \frac{\beta}{12^2} R \quad \text{と } \nabla t,$$

$$(1-X_2) P(n) \neq n = \nabla \neq n-1.$$

★ に因りて, 非常にややこしい修正項 (以下書く
なければ, 四行程りり) がもたらされ, γ を $S(\lambda)$ と
すると, (もちろん $S(\lambda) - p(\lambda)$)

$$P(\lambda) - S(\lambda) \in \mathcal{O}[\lambda].$$

としかく, この場合は, ややこしいにせよ修正項がとれる
のであから, γ はよりましと見えてよい。

尚, $\beta \in \mathbb{C}^4$, β parameter β を λ としておいた $\beta=0$
のとき, $x=y=0$ は singularity として, non-isolated にな
るので, (ただし homogeneous degree 3) γ のこの関数は意味
がなくなってしまう。

$$b(\lambda) = (\lambda+1) \cdot (\lambda+1)^2 \left(\lambda+\frac{4}{3}\right) \left(\lambda+\frac{5}{3}\right) \left(\lambda+\frac{5}{4}\right) \left(\lambda+\frac{3}{2}\right) \left(\lambda+\frac{7}{4}\right)$$

$$(固有値は $\lambda=1$ は $(\lambda+\frac{4}{3})(\lambda+\frac{5}{3})$ だけ)$$

結局考察はしたもので, $b(\lambda)$ は P_q と同じ。

尚 A'Campo は [3] で, この monodromy を計算して,

$$\frac{1}{(t-1)} (t^3-1)^2 (t^4-1) \quad \text{を得ている。}$$

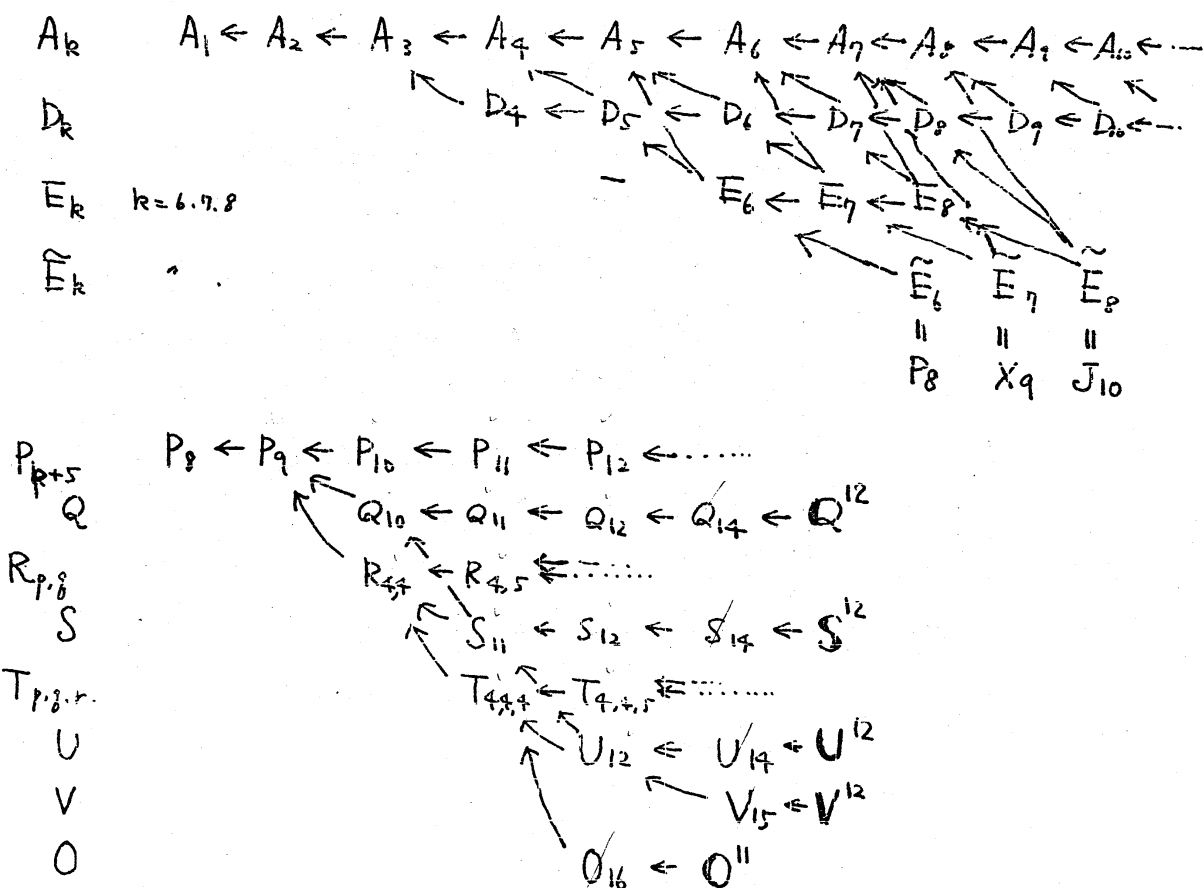
第四章 Elementary Singularity の $b(s)$

§1. Singularity の分類理論.

Thom, Mather, Arnold 等によつて, degenerate critical points における函数の標準形を決定する問題はある程度決着がついたといつてよい.

"simple" な germ A, D, E と, non-simple なものをいぢて dense になる "boundary case" $\tilde{E}$. $\tilde{E}$ にはこの boundary case を細かくみた P, X, J 等の系列が決定されてゐる. $\tilde{E}$ の germ の図は下に diagram で示される. ここで, $\tilde{E}$ の始点の germ の近傍に $\tilde{E}$ の終点の germ がある, i.e. deformation でいふことができることを示している.

詳細は Arnold Saito Duistermaat
等をみよ.



$$\begin{array}{l}
 X_{p+5} \\
 Y_{p+3} \\
 Z \\
 W \\
 N
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 X_9 \leftarrow X_{10} \leftarrow X_{11} \leftarrow X_{12} \leftarrow \cdots \\
 \quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \swarrow \\
 \quad \quad \quad Y_{5,5} \leftarrow Y_{5,6} \leftarrow \cdots \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \swarrow \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad Z_{11} \leftarrow Z_{12} \leftarrow Z_{13} \leftarrow Z_{15} \leftarrow Z^{13} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \swarrow \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad W_{12} \leftarrow W_{13} \leftarrow W_{15} \leftarrow W^{13} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \swarrow \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad N_{16} \leftarrow N^{13}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 J_{p+4} \\
 K
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 J_{10} \leftarrow J_{11} \leftarrow J_{12} \leftarrow J_{13} \leftarrow \\
 \quad \quad \quad \swarrow \\
 \quad \quad \quad K_{12} \leftarrow K_{13} \leftarrow K_{14} \leftarrow K_{16} \leftarrow K^{14}
 \end{array}$$

$\in \mathcal{H}$ の germ の標準形は次の通り。(この形は non-deg. quadratic form を加えると思っただけ)。簡単のため $\mathbb{C}$ 上の分類

simple germs.	$A_k:$	x^{k+1}	$k \geq 1$
	$D_k:$	$x^2y + y^{k-1}$	$k \geq 4$
	$E_6:$	$x^3 + y^4$	
	$E_7:$	$x^3 + xy^3$	
	$E_8:$	$x^3 + y^5$	
boundary case.	$\widetilde{E}_6:$	$x^3 + y^2z + g_1xz^2 + g_2z^3$	
	$\widetilde{E}_7:$	$x^3y + g_1xy^3 + g_2y^4$	
	$\widetilde{E}_8:$	$x^3 + g_1xy^4 + g_2y^6$	

$\frac{g_1^3}{(4g_1^3 + 27g_2^2)}$ は diffeomorphism invariant.

boundary case の他の標準形は次のとおり。この形はすべて weighted homogeneous polynomial である。

尚 Siersma の表との対応を示す(ただし)。

Siersma.	(2)	(3)	(4)	(5) ₄	(5) ₅	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	A_{k-1}	D_4	D_{2+1}	E_6	E_8	E_7	$\widetilde{E}_7$	$\widetilde{E}_6$	?	P_9 (後出)

(9) $xz^2 - y^3 \pm x^4$ は不明.

尚二こで、この)の分類理論にしばしば表われさうな
の量を定義しておく。標準形に non-deg. quad. form として、
 $n=2$ の germ とおく。 f は $\mathbb{A}^n$ ($U = (f_1, \dots, f_n) = f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$)

$$\text{codim } f \equiv \dim_{\mathbb{C}} M_f / \mathcal{O} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_f - 1 = \mu - 1.$$

- $\rho(f) \equiv \min \{ r; U \supset M_{r+1} \}$ ($\leq \text{codim } f$, $\text{codim } f \leq \binom{\rho+n}{n} - 1$)
- $\sigma(f) \equiv \min \{ s; f \text{ is right determined by } s\text{-jet} \}$

f は weighted homogeneous $(r; n_1, \dots, n_n)$ $n \neq 1 = 2 \pm 3$ に

- $r(f) \equiv \sum \frac{r_i}{r} = \text{Trace } X$. $X = \sum \frac{r_i}{r} x_i D_{x_i}$.
- $S(f) \equiv \max \{ d; d \geq \dim \mathcal{O}_f \text{ の基底} \}$
 $\equiv \max \{ \sum \frac{r_i}{r} d_i; x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n} \notin \mathcal{O}_f \}$ $2r + S = n$
- $1/\rho = \frac{1-S}{2}$ (i.e. $r = \frac{n-1}{2} + \frac{1}{\rho}$, $s = 1 - \frac{2}{\rho}$) Coxeter #.

2, $\frac{S}{2} (= \frac{n}{2} - r) = \frac{1}{2} - \rho^{-1}$ は Arnold の β と一致.

$$\int \exp\left(\frac{1}{h} i f\right) \varphi(x) dx = O(h^{\frac{n}{2} - \beta + \epsilon}) \quad \forall \epsilon > 0.$$

$$= O(h^{r+\epsilon})$$

	A_k	D_k	E_6	E_7	E_8	$\tilde{E}_6$	$\tilde{E}_7$	$\tilde{E}_8$
codim	$k-1$	$k-1$	5	6	7	7	8	9
ρ	$k-1$	$k-2$	3	4	4	3	4	6^* $\beta_1=0, \beta_2=5$
σ	$k+1$	$k-1$	4	4	5	3	4	6
S	$(k-1)/k+1$	$2(k-2)/2(k-1)$	$10/12$	$16/9$	$28/30$	1	1	1
r	$1/(k+1) + \dots$	$1/(2(k-1)) + \dots$	$1/12 + \dots$	$1/9 + \dots$	$1/30 + \dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots = \frac{n-1}{2}$

この中で、 β_1, β_2 の 2 つの値に $\beta_1 = 0, \beta_2 = 5$ の boundary case がある。

$$\tilde{E}_6 = P_9 : x^2 z + y^3 + \varepsilon y^2 z + a z^3 \quad a(4\varepsilon + 27a) \neq 0 \quad \varepsilon^3 = \varepsilon$$

$$\text{or. } x^3 + y^3 + z^3 + \mu x y z \quad \mu^6 / (\mu^3 + 27) \text{ は invariant.}$$

$$\tilde{E}_7 = X_9 : x^4 + \varepsilon x^2 y^2 + a y^4 \quad a(4a - \varepsilon^2) \neq 0 \quad \varepsilon^3 = \varepsilon.$$

$$\text{or. } x^4 + y^4 + z^2 + \mu x y z \quad (\mu^3 + 3 \cdot 64) / (104 - 64)^2 \text{ は invariant.}$$

$$\tilde{E}_8 = J_{10} : x^3 + \varepsilon x^2 y^2 + a y^6 \quad a(4\varepsilon + 27a) \neq 0 \quad \varepsilon^3 = \varepsilon$$

$$\text{or. } x^6 + y^3 + z^2 + \mu x y z \quad \mu^6 / (\mu^6 - 27 \cdot 16) \text{ は invariant.}$$

$$P_{p+5} : x^2z + y^3 + y^2z + az^p \quad a \neq 0 \quad p > 3.$$

$$R_{p,q} : x^3 + 3xyz + y^p + az^q \quad 4 \leq p \leq q \quad a \neq 0.$$

$$\mu = p + q + 2$$

$$T_{p,q,r} : axyz + x^p + y^q + z^r \quad 4 \leq p \leq q \leq r \quad a \neq 0$$

$$\mu = p + q + r - 1.$$

$$P_{p,q} \sim T_{2,3,p} \quad R_{p,q} \sim T_{3,p,q} \quad r \geq 3.$$

$$(J_{p,q} \sim T_{2,3,p})$$

$$Q_{10} : x^2z + y^3 + ay^2z^3 + z^4 \quad a \in \mathbb{C}.$$

$$Q_{11} : \quad \quad \quad + yz^3 + az^5 \quad \quad \quad \cdot$$

$$Q_{12} : \quad \quad \quad + ay^2z^4 + z^5 \quad \quad \quad \cdot$$

$$Q_{14} : \quad \quad \quad + yz^4 + az^6 + bz^7 \quad 27a^2 + 4 \neq 0.$$

$$S_{11} : x^2z + yz^2 + y^4 + ay^3z \quad a \in \mathbb{C}$$

$$S_{12} : \quad \quad \quad + xy^3 + ay^5 \quad \quad \quad \cdot$$

$$S_{14} : \quad \quad \quad + y^3z + ay^5 + by^6 \quad \cdot a \neq 0, 1/4.$$

$$U_{12} : x^3 + y^3 + z^4 + 3axyz^2 \quad a \in \mathbb{C}$$

$$U_{14} : \quad \quad \quad + 3xz^3 + 3ayz^3 + 9byz^4 \quad a^3 \neq 1.$$

$$V_{15} : x^2y + z^4 + x^2y^2 + ay^3z + by^4 + cy^4z \quad a(12b+1)\Delta(a,b) \neq 0.$$

$$O_{16} : x^3 + y^3 + z^3 + u^3 + (4x+by+(z+du)^2)cxzyu \quad \Delta(a,b,c,d) \neq 0.$$

$$X_{p+5} : x^4 + x^2y^2 + ay^p \quad a \neq 0 \quad p > 4.$$

$$Y_{p,q} : x^2y^2 + x^p + y^q \quad 5 \leq p \leq q \quad a \neq 0 \quad \mu = p + q + 1.$$

$$Z_{11} : x^3y + 3axy^4 + y^5 \quad a \in \mathbb{C}$$

$$Z_{12} : \quad \quad \quad + 3xy^4 + ay^6 \quad \quad \quad \cdot$$

$$Z_{13} : \quad \quad \quad + 3axy^5 + y^6 \quad \quad \quad \cdot$$

$$Z_{15} : \quad \quad \quad + 3xy^5 + ay^7 + by^8 \quad a^2 + 4 \neq 0.$$

$$W_{12} : x^4 + y^5 + 2ax^2y^3 \quad a \in \mathbb{C}$$

$$W_{13} : \quad \quad \quad + 4xy^4 + ay^6 \quad \quad \quad \cdot$$

$$W_{15} : \quad \quad \quad + 2x^2y^3 + ay^6 + by^7 \quad a^2 \neq a.$$

$$N_{16} : x^4y + ax^3y^2 + bx^2y^3 + xy^4 + cx^3y^3 \quad \Delta(a,b) \neq 0.$$

$$J_{p+4} : x^3 + \varepsilon x^2y^2 + az^p \quad a \neq 0, \varepsilon^2 = 1, p > 6.$$

$$K_{12} : x^3 + ay^5 + y^7 \quad a \in \mathbb{C}.$$

$$K_{13} : \quad \quad \quad + xy^5 + ay^8$$

$$K_{14} : \quad \quad \quad + axy^6 + y^8$$

$$K_{16} : \quad \quad \quad + xy^6 + ay^9 + by^{10} \quad 27a^2 + 4 \neq 0.$$

以上 //

§2. Singularity の分類における, 標準形に
対して $a, b(a)$ の計算.

1.

以下に示すのは, Arnold の分類 (p. 参照) による,
基本的な singularity に対して $a, b(a)$ の計算である.
標準形 $f + Q(x')$ ($\Rightarrow Q$ は quadratic form) に対して,
 f の $b(a)$ を計算する. $x_{l+1}^2 + \dots + x_n^2$ とおいた場合は,
 $(\lambda + d) \mapsto (\lambda + d + \frac{n-l}{2})$ とすればよい.

simple germs & boundary cases は weighted homogeneous.

1-parameter family T_5 はすべて non-quasi-hom.

2-parameter $Q_{14}, \Sigma_{14}, U_{14}, Z_{15}, W_{15}, K_{16}$ は, sweep out
すべし 2-parameter は 1-parameter によって sweep out され,
(かも swept f は weighted hom. 3-parameter の
 V_{15}, N_{16} も同様. よって, こゝでは weight α として
おく). O_{16} は計算が煩雑で大変なため, $a=b=c=d=0$
としておく.

又, singularity の立場からは $P_{p+5} \sim T_{3,2,p}, R_{p,8} \sim T_{3,p,8},$
 $X_{p+5} \sim T_{2,4,p}, Y_{p,8} \sim T_{2,p,8}, J_{p+4} \sim T_{2,2,p}$ であり, かつ,
無限系列に対しては $T_{p,q,r}$ の中でことたりるわけだが,
我々としては, 次元のちがひもあり, 式の表示により
作用がどのようになるのかも意味があるのですべて γ のまま
の形で計算をします.

X, Y, Z, W, K は二変数であって, 上の分類
の何型かを示しておく).

$$\begin{array}{ccccccccc} X_{p+5} & Y_{p,8} & Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & W_{12} & W_{13} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ S_I & S_I & K_I^\# & K_I^b & K_I^\# & Y_I & K_I^b & K_I^\# & K_I^b & K_I^\# \end{array}$$

本図表一頁は 4.(p.) にある.

2. weighted hom と $\#$ z ; h z $\neq$ 0 .

$$A_k: x^{k+1} \quad (k+1; 1)$$

$$D_k: x^2 y + y^{k+1} \quad (2(k+1); k+2, 2)$$

$$E_6: x^3 + y^4 \quad (12; 4, 3)$$

$$E_7: x^3 + x y^3 \quad (9; 3, 3)$$

$$E_8: x^3 + y^5 \quad (15; 5, 3)$$

$$P_9 = \widetilde{E}_9: x^3 + y^2 z + g_1 x z^2 + g_2 z^3 \quad (3; 1, 1, 1) \quad (\text{elliptic curve})$$

$$X_9 = \widetilde{E}_9: x^3 y + g_1 x y z + g_2 y z^2 \quad (4; 1, 1) \quad (\text{cross ratio})$$

$$J_{10} = \widetilde{E}_9: x^3 + g_1 x y^2 + g_2 y^3 \quad (6; 2, 1) \quad (3\text{-tangent parabolas})$$

sweep out z $w-h$ $1 = z^2 \neq 0$.

$$Q_{14}: x^2 z + y^3 + y z^2 + a z^6 + b z^7 \quad (5/2, 1/3, 1/6)$$

$$S_{14}: x^2 z + y z^2 + y^3 z + a y^5 + b y^6 \quad (3/10, 1/5, 2/5)$$

$$U_{14}: x^3 + y^3 + 3 x z^3 + 3 a y z^3 + 9 b y z^4 \quad (1/3, 1/3, 2/9)$$

$$V_{15}: x^2 y + z^2 + \frac{2 x^2 z^2}{y} + a y^3 z + b y^4 + c y^5 z \quad (3/8, 1/4, 1/4)$$

$$Z_{15}: x^3 y + 3 x y^5 + a y^7 + b y^8 \quad (2/7, 1/7, 1/7)$$

$$W_{15}: x^7 + 2 x^2 y^3 + a y^6 + b y^7 \quad (4/4, 1/6)$$

$$N_{16}: x^4 y + a x^3 y^2 + b x^2 y^3 + x y^4 + c x^3 y^4 \quad (1/5, 1/5)$$

$$K_{16}: x^3 + x y^6 + a y^9 + b y^{10} \quad (1/3, 1/4)$$

(h は z $w-h$ ではなく, 作用素を計算して z が必要はある. しかし, sweepout しても残った h non- $g-h$ であることも $T=5$ の方がより意味がある.)

3. 残りすべてについて.

ことごとく $\Omega(f) = ML$ となり, $\lambda^2 + \dots$ ですむ.

以下に作用素をかりていこう. すべて simplex type である.

$$(E_6) \quad P_{p+5} : x^2z + y^3 + y^2z + az^p \quad p \geq 4.$$

$$\mu = p+5. \quad 1. z, \dots, z^p, \quad x, y, xz, yz.$$

$$X_2 = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p})xDx + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p})yDy + \frac{1}{p}zDz$$

$$X_3 = \frac{1}{3}(xDx + yDy + zDz)$$

$$Q = 4^{-1}(1 + \frac{9}{4}apz^{p-3})^{-1} \{ (2z-3y)zDy + 9y(-\frac{1}{2}xDx + zDz) \}$$

$$-PB: \quad x(\rho - X_3) + \frac{p-3}{6}az^{p-1}Dx$$

$$y(\rho - X_3) + \frac{p-3}{3}az^{p-3}Q$$

$$z(\rho - X_2) + \frac{p-3}{2p}y(-\frac{1}{2}xDx + zDz) - \frac{p-3}{2}az^{p-3}Q$$

$$=PB: \quad X_2' = X_2 - \frac{p-3}{2p}yDz + \frac{p-3}{2}az^{p-4}Q \quad \text{と おいて,}$$

$$(\rho - X_3)(\rho - X_2') + \frac{(p-3)^2}{12p}az^{p-4}(xDx)Q.$$

$$p \geq 5 \text{ のときは } (\rho - X_3)(\rho - X_2) - \frac{(p-3)^2}{6p}az^{p-5}[Q'Q - 8Q''Q]$$

$$Q' = 2^{-1}(1 + \frac{9}{4}apz^{p-3})^{-1} \{ (y + \frac{3}{2}apz^{p-2})zDy - 3y(-\frac{1}{2}xDx + zDz) \}$$

$$Q''Q = 2^{-1}(\dots)^{-1} \{ Q - 9Q' - \frac{9pZ}{2(p-3)}(\rho - X_3) \}$$

$p=4$ になると (これは Siersma(10) で示された) yDz という項があらわれず、

“形”ばかりでとれず、 X_2 の weight では yDz は

0 次より高い。(この番目に yDz は 0 次とみても、

主部が分解が奇妙なことに気づく。

$$b(\rho) = (\rho+1) \cdot (\rho+1)^2 \left((\rho+\frac{4}{3})(\rho+\frac{5}{3})(\rho+1+\frac{1}{p}) - (\rho+1+\frac{p-1}{p}) \right)_{red}.$$

$\uparrow$
 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$Q_{10}: x^2 z + y^3 + a y z^3 + z^4.$$

$$\mu = 10. \quad x, y, z \in \mathbb{C} = \sum_{j=0}^3 z^j \quad j=0,1,2,3 \quad \text{8個}.$$

$$X_0 = \frac{3}{8} x D_x + \frac{1}{3} y D_y + \frac{1}{4} z D_z, \quad \theta = -\frac{1}{2} x D_x + z D_z.$$

$$Q = \frac{1}{4} \left\{ \left(-\frac{a}{4} z + \frac{3a^2}{4^2} y \right) \theta + z^2 D_y \right\}$$

$$\varphi = 1 + \frac{3a^3}{4^2} z$$

$$Q' = \frac{1}{4} \left\{ \left(y + \frac{a^2}{4} z^2 \right) \theta + a z^3 D_y \right\}$$

$$Q'' = \frac{1}{4} \left\{ \left(z - \frac{3a}{4} y \right) \theta + \frac{3a^2}{4} z^3 D_y \right\}$$

$$-P_5: \quad x(\rho - X_0) + \frac{1}{12} y z^2 D_x$$

$$y(\rho - X_0) + \frac{1}{36} Q$$

$$z(\rho - X_0) + \frac{1}{48} Q'$$

$$= P_5: \quad (\rho - X_0 + \frac{1}{12} X(\rho - X_0) + 10^8 a (z - X') Q''$$

$$= 1: \quad X' = \frac{7}{18} x D_x + \left(\frac{1}{3} y + \frac{1}{9} a z \right) D_y + \frac{2}{9} z D_z.$$

$$h(\rho) = (\rho+1) \cdot \underbrace{\left(\rho + \frac{4}{3}\right)}_{[100]} \underbrace{\left(\rho + \frac{5}{3}\right)}_{[110]} \underbrace{\left(\rho + \frac{21}{24}\right)}_{\begin{smallmatrix} \nearrow 2 \\ [000] \end{smallmatrix}} \underbrace{\left(\rho + \frac{25}{24}\right)}_{\begin{smallmatrix} \nearrow 2 \\ [000] \end{smallmatrix}} \underbrace{\left(\rho + \frac{29}{24}\right)}_{\begin{smallmatrix} \nearrow 2 \\ [000] \end{smallmatrix}}$$

$$\left(\rho + \frac{31}{24}\right) \left(\rho + \frac{35}{24}\right) \left(\rho + \frac{37}{24}\right) \left(\rho + \frac{41}{24}\right) \left(\rho + \frac{43}{24}\right).$$

$$Q_{11}: x^2 z + y^3 + y z^3 + a z^5$$

$$\mu=11. \quad 1. x \cdot x^2 \cdot y \cdot x y \cdot z \cdot z^2 \cdot z^3 \cdot y z \cdot y z^2 \cdot y z^3$$

$$\text{また } 1112 \quad y z^2, y z^3 \text{ などは } z^4, z^5.$$

$$X_0 = \frac{7}{18} x D_x + \frac{1}{3} y D_y + \frac{2}{9} z D_z$$

$$X_2 = \frac{2}{5} x D_x + \frac{2}{5} y D_y + \frac{1}{5} z D_z, \quad X_3 = \frac{2}{5} x D_x + \frac{1}{3} y D_y + \frac{1}{5} z D_z.$$

$$Q = \frac{1}{34} \left\{ (z + 5ay) \left(-\frac{x}{2} D_x + z D_z \right) - 5a z^3 D_y \right\}$$

$$Q' = \frac{1}{4} \left\{ \left(-y + \frac{5}{3} z^2 \right) \left(-\frac{x}{2} D_x + z D_z \right) + z^3 D_y \right\} \quad \varphi = 1 + \frac{5^2 a^2}{3} z$$

$$\begin{aligned} -P_E^* \quad & x(\rho - X_0) + \frac{a z^4}{18} D_x \\ & y(\rho - X_0) + \frac{a z}{9} Q \\ & z(\rho - X_0) + \frac{a}{9} Q' \end{aligned}$$

$$= P_E^* \quad X_0' = X_0 - \frac{a}{9} z^2 D_y \text{ など.}$$

$$\left(\rho - X_0 + \frac{1}{9} \right) (\rho - X_0') + \frac{5a^2}{3^2} \left\{ \left(Q - \frac{(z+5ay)}{\varphi} \right) (\rho - X_2) + \frac{a}{9\varphi} Q' \right\}$$

$$\text{or.} \quad \left(\rho - X_0' + \frac{1}{9} \right) (\rho - X_0') + \frac{5^2 a^2}{3} z (\rho - X_2) (\rho - X_3) - \frac{2a^2}{3^3} Q.$$

$$1. \text{ 等号は } \rho - X_0 + \frac{1}{9} \text{ となる.}$$

$$f(\rho) = (\rho+1) \cdot (\rho+\frac{17}{18}) \cdot 19 \cdot 23 \cdot 25 \cdot 29 \cdot 31$$

$$(\rho+\frac{7}{6}) (\rho+\frac{11}{6}) (\rho+\frac{4}{3}) (\rho+\frac{5}{3}) (\rho+2)$$

$$Q_{12}: x^2 z + y^3 + ay z^4 + z^5.$$

$$\mu=12$$

$$1. x \cdot y \cdot xy \cdot z \cdot z^2 z^3 z^4 \cdot y z \cdot y z^2 \cdot y z^3 \cdot y z^4.$$

$$X_0 = \frac{5}{12} x D_x + \frac{1}{3} y D_y + \frac{1}{6} z D_z$$

$$\theta = -\frac{x}{2} D_x + z D_z.$$

$$X_3 = \frac{2}{5} x D_x + \frac{1}{3} y D_y + \frac{1}{5} z D_z.$$

$$Q = \frac{1}{3\varphi} \left\{ \frac{a}{5} \left(\frac{4a}{5} y - z \right) \theta + z^2 D_y \right\}$$

$$\varphi = 1 + \frac{4^2 a^3}{3 \cdot 5^2} z^2$$

$$Q' = \frac{1}{15\varphi} \left\{ (3y + \frac{4a^2}{5} z) \theta - 4a z^2 D_y \right\}$$

—P.E.

$$x(\rho - X_3) + \frac{1}{15} ay z^3 D_x$$

$$y(\rho - X_3) + \frac{2}{15} az^2 Q$$

$$z(\rho - X_3) + \frac{2}{15} a Q'$$

=P.E.

$$\left(\rho - X_3 + \frac{2}{15} \right) (\rho - X_3) - \frac{2^3 a^2}{3 \cdot 5^2} z \left(Q - \frac{a(\frac{4}{5} ay - z)}{3\varphi} \right) (\rho - X_0)$$

$$h(h) = (h+1) \cdot (h + \frac{14}{15}) (h + \frac{16}{15}) \quad 19 \quad 22 \quad 23 \quad 26 \quad 28$$

$$(h + \frac{4}{3}) (h + \frac{1}{3})$$

$$(2) \text{ 両方 } h \text{ 式 } 7 \text{ 12 } \quad x (h + \frac{4}{3}) (h + \frac{5}{3})$$

$$S_{11}: x^2z + yz^2 + y^4 + ay^3z.$$

$$\mu=11. \quad 1^\circ \quad x \ y \ z \quad xy \ x^2y \ y^2y^3 \ y^2z \ y^2z \cdot y^3z.$$

$$X_0 = \frac{5}{16}x\partial_x + \frac{1}{4}y\partial_y + \frac{3}{8}z\partial_z \quad Y_1 = -\frac{1}{4}x\partial_x + \frac{1}{2}z\partial_z$$

$$Y_2 = \frac{1}{16}x\partial_x + \frac{1}{4}y\partial_y - \frac{1}{8}z\partial_z \quad (x^2z \cdot y^2z \cdot 0) \quad (y^4 \cdot x^2z \cdot 0)$$

$$Q = \frac{1}{4^2\psi} [-10ay^2Y_1 + (7^2 + 5a^2y)zY_2] \quad \psi = 1 + \frac{5^2a^3}{2 \cdot 4^3}z$$

$$Q' = \frac{1}{2\psi} [2y^2Y_1 + a(\frac{5a}{8}z - y)zY_2]$$

$$-P_{\text{B}}^{\text{B}} \quad x(\rho - X_0) + \frac{a}{8}y^3\partial_x$$

$$y(\rho - X_0) + \frac{a}{8}Q$$

$$z(\rho - X_0) + \frac{a}{8}Q'$$

$$=P_{\text{B}}^{\text{B}} \quad (\rho - X_0 + \frac{1}{8})(\rho - X_0) - \frac{5a^2y}{16}(\rho - X_2)(\rho - X_3)$$

$$X_2 = (\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \quad X_3 = (\frac{3}{16}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}) \quad \text{etc.}$$

$$(\rho - X_0 + \frac{1}{8})(\rho - X_0) - \frac{5a^2y}{16 - 5a^2y} \left\{ (2X_0 - X_2 - X_3 - \frac{1}{8})\rho + X_2X_3 - X_0^2 + \frac{1}{8}X_0 \right\}$$

$$b(\rho) = (\rho+1) \cdot (\rho+\frac{3}{2})(\rho+\frac{5}{4})(\rho+\frac{7}{4}) \cdot (\rho+\frac{15}{16})(\rho+\frac{17}{16})(\rho+\frac{19}{16})(\rho+\frac{21}{16})$$

$$(\rho+\frac{23}{16})(\rho+\frac{25}{16})(\rho+\frac{27}{16})(\rho+\frac{29}{16}) \quad \uparrow \quad \boxed{00}$$

$$S_{12}: x^2 z + y z^2 + x y^3 + a y^5$$

$$\mu=12. \quad 1. x \cdot x y \cdot x y^2 \cdot x y^3 \\ y \cdot y^2 \cdot y^3 \cdot y^4 \cdot z \cdot y z \cdot y^2 z.$$

$$X_0 = \frac{1}{13} (4x D_x + 3y D_y + 5z D_z), \quad Y_1 = x D_x + 4y D_y - 2z D_z \quad (x^2 z \cdot y z^2 \cdot \dots)$$

$$\Theta = z D_x - 2x D_y + 6y^2 D_z$$

$$(\text{cf } X_0 = 12) \text{ (just } \frac{1}{13} = 2)$$

$$X_2 = \frac{1}{5} (2x D_x + y D_y + z D_z) \quad X_3 = \frac{3}{10} x D_x + \frac{1}{5} y D_y + \frac{2}{5} z D_z.$$

$$Q = \frac{1}{13\varphi} \left\{ y Y_1 - \frac{20}{13} a (13y^3 D_x - 2x \Theta) \right\} \quad \varphi = 1 - \left(\frac{20a}{13} \right)^2 x$$

$$Q' = \frac{1}{13\varphi} \left\{ (13y^3 D_x - 2x \Theta) - \frac{20}{13} a x y Y_1 \right\}$$

$$Q'' = \frac{1}{13\varphi} \left\{ \Theta + \frac{10}{13} a y (Y_1 - 20 a y^2 D_x) \right\}$$

$$\text{--- P.E.} \quad x(\rho - X_0) + \frac{2a}{13} y Q, \quad y(\rho - X_0) + \frac{2a}{13} Q', \\ z(\rho - X_0) + \frac{2a}{13} y^2 Q''.$$

$$\text{--- P.E.} \quad X_0' = X_0 - \frac{2a}{13} y^2 D_x \quad \text{etc.},$$

$$(\rho - X_0' + \frac{2}{13})(\rho - X_0') - \left(\frac{20a}{13} \right)^2 x(\rho - X_2)(\rho - X_3) + \dots \\ + \left(\frac{2a}{13} \right)^2 \{ 10x\rho - (y^3 D_z + x X_3) \}$$

$$\text{主部 } 12 \quad (\rho - X_0 + \frac{2}{13})(\rho - X_0)$$

$$\mu(\rho) = (\rho+1) \cdot (\rho+\frac{12}{13}) (\rho+\frac{14}{13}) \cdots (\rho+\frac{24}{13})$$

$$\mu(\rho) > 0. \quad 24 < \mu(\rho) < 3.$$

$$T_{p,q,r} \quad f = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q + \frac{1}{r}z^r - axyz \quad p, q, r \geq 3.$$

$$R_{p,q} = T_{3,p,q} \quad \mu = p+q+r-1. \quad \left. \begin{array}{l} 1, x, \dots, x^{p-1} \\ y, \dots, y^{q-1} \\ z, \dots, z^{r-1} \end{array} \right\} \in xyz.$$

$$c = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1 < 0.$$

$$X_0 = \frac{1}{p}xDx + \frac{1}{q}yDy + \frac{1}{r}zDz \quad X = \frac{1}{3}(xDx + yDy + zDz)$$

$$X_1 = (1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{r})xDx + \frac{1}{q}yDy + \frac{1}{r}zDz \quad X_2, X_3 \in \langle X \rangle.$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}(X_2 + X_3) = \frac{1}{p}xDx + \frac{1}{2}\left\{\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right\}yDy + \frac{1}{2}\left\{\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right\}zDz.$$

$$\Phi_2, \Phi_3 \in \text{cyclic } 123. \quad \varphi = a^3 - x^{p-3}y^{q-3}z^{r-3}.$$

$$Q_x = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{p}\right)x^{p-3}\frac{1}{\varphi}(y^{q-3}z^{r-3}D_x + a^2xD_y + ay^{q-3}D_z)\frac{1}{\varphi}(y^{q-3}z^{r-3}D_x + a^2z^{r-3}D_y + a^3xD_z)$$

$$Q_y, Q_z \in \text{cyclic } 123. \quad Q = Q_x + Q_y + Q_z \in \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}.$$

$$\begin{aligned} -P_{\mathfrak{A}}^* \quad & x(\rho - \Phi_1) + \frac{c}{2\varphi} \left\{ 2y^{q-2}z^{r-2}D_x + z^{r-3}(a^2z^2 + x^{p-2}y^{q-2})D_y + y^{q-3}(a^2y^2 + x^{p-2}z^{r-2})D_z \right\} \\ & y(\rho - \Phi_2) + \frac{c}{2\varphi} \left\{ \dots \dots \dots \right. \\ & z(\rho - \Phi_3) + \frac{c}{2\varphi} \left\{ \dots \dots \dots \right. \end{aligned}$$

cyclic 123.

$$= P_{\mathfrak{A}}^* \quad (\rho - X_0 - c)(\rho - X) - \frac{2c}{\varphi} x^{p-3}y^{q-3}z^{r-3}(\rho - \frac{1}{2}(X_0 + X)) + aCQ$$

$$\boxed{000} \text{ s.s. double. } (\rho+1)^2$$

$$\boxed{i \dots 0} \text{ s-j } (1 \leq i \leq p-2) \quad 1 + \frac{c}{p} \quad \boxed{p-1, 00} + (-1)^{p+1} \frac{(p-1)!}{a} \boxed{011} \text{ s-j } 1 + \frac{p-1}{p} \text{ etc.}$$

$$L(\rho) = (\rho+1) \cdot (\rho+1)^2 \left(\prod_{1 \leq i \leq p-1} \left(s+1 + \frac{i}{p}\right) \prod_{1 \leq j \leq q-1} \left(s+1 + \frac{j}{q}\right) \prod_{1 \leq k \leq r-1} \left(s+1 + \frac{k}{r}\right) \right)_{\text{red.}}$$

$-P_{\mathfrak{A}}^* \mathfrak{z} = P_{\mathfrak{A}}^* \mathfrak{z}'' \quad \Phi \in X \quad \mathfrak{z} \text{ といふ } \mathfrak{A} \text{ にも } \mathfrak{z} \text{ が } \mathfrak{z} \text{ である。 } \mathfrak{z} \text{ といふ } \mathfrak{A} \text{ にも } \mathfrak{z} \text{ が } \mathfrak{z} \text{ である。}$

まず三階、作用までして、

$$(p - X_1)(p - X_2)(p - X_3) = a^{-3} x^{p-1} y^{1-3} z^{1-3} (p - X_0 + 2c)(p - X_0 + c)(p - X_0)$$

と 11 ; $\sim$ χ^2 と 4 3 . $\sim$ 4 5 ; X_1, X_2, X_3 $\in$ $\sim$ χ^2 と 11 3 .

しかし二階ですすには、少しづつうごきます。まず一階から。

$$\boxed{210} = \frac{1}{6} (y^{q-2} z^{r-3} D_x + a z^{r-2} D_y + a^2 x D_z) \quad \text{for } r \in \mathbb{Z},$$

$$\boxed{12a} = \frac{-1}{\varphi} (az^{r-2}D_x + x^{p-2}z^{r-3}D_y + a^2yD_z)$$

$$\begin{cases} y(p - x_1) - c x^{p-2} & \boxed{210} \\ z(p - x_2) - c y^{p-2} & \boxed{1021} \\ x(p - x_3) - c z^{p-2} & \boxed{1002} \end{cases} \quad \left(\text{or } \begin{cases} z(p - x_1) - c x^{p-2} & \boxed{201} \\ c y c l i c \end{cases} \right)$$

と、いふ形にとつてふき。

$$\begin{aligned} (\rho - X_1)(\rho - X_2) &= C \sqrt{\frac{x^{1-2} y^{1-3}}{(2 \cdot 10)(1 \cdot 20)}} = \frac{C x^{1-2} y^{1-3}}{6} (3\rho - X_2 + 2X_0) \\ (\rho - X_2)(\rho - X_3) &= \dots \\ (\rho - X_3)(\rho - X_1) &= \dots \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \neq 2'' \neq 4; \neq 4 \neq 2 \\ \end{array}$$

$$R_{p,q} = T_{3,p,q}.$$

$$b(p) = (p+1) \cdot (p+1)^2 \left(\prod_{1 \leq i \leq p-1} (s + \frac{i}{p}) \prod_{1 \leq j \leq p-1} (s+1 + \frac{j}{p}) \right)_{\text{red.}}$$

$$U_{12}: f = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}z^4 - axyz^2$$

$$\mu = 12. \quad 1. \quad x, y, z, xz, yz, z^2xz, yz^2, xyz, \dots, xyz^2$$

$$c = \frac{1}{4} > 0.$$

$$X_0 = \frac{1}{3}xDx + \frac{1}{3}yDy + \frac{1}{4}zDz, \quad \varphi = 1 - 2a^3z^2$$

$$Q_1 = \frac{a}{\varphi} \left\{ \frac{z}{a}Dx + 2axzDy + zDz \right\} \quad Q_2 = \frac{a}{\varphi} \left\{ 2axyzDx + \frac{z}{a}Dy + xDz \right\}$$

$$Q = Q_1Q_2 + Q_2Q_1$$

$$-P_{12}^* \quad x(\rho - X_0) - \frac{a}{6\varphi} z^2 (yDx + az^2Dy + a^2xzDz)$$

$$y(\rho - X_0) - \frac{a}{6\varphi} z^2 (az^2Dx + xDy + a^2yzDz)$$

$$z(\rho - X_0) - \frac{a}{6\varphi} \left\{ (axz^2 + y^2)azDx + (ayz^2 + x^2)azDy + xzDz \right\}$$

$$= P_{12}^* \quad (\rho - X_0 + c)(\rho - X_0) + \frac{a^2z^2}{6^2\varphi} (5\rho - (\frac{11}{6}(xDx + yDy) + \frac{1}{2}zDz)) - \frac{a^3z^2}{12} Q$$

$$\begin{array}{l} \boxed{000} \quad \frac{11}{12}, \frac{13}{12}, \quad \boxed{010} \quad \frac{5}{4}, \quad \boxed{110} \quad \frac{19}{12}, \quad \boxed{102} - a \frac{1020}{200} \quad \frac{7}{4}, \quad \boxed{001} \quad \frac{7}{6} \\ \boxed{011} \quad \frac{3}{2}, \quad \boxed{002} \quad \frac{17}{12}, \quad \boxed{111} + \frac{a}{3} \frac{1002}{200} \quad \frac{11}{6} \end{array}$$

$$\text{結局, } a=0 \text{ の場合 } xyz^2 \text{ からは } s + \frac{25}{12} \text{ が出て } 11411 = \boxed{000} \text{ からは } s + \frac{13}{12}.$$

$$\boxed{12} \text{ の因子は } (s + \frac{3}{2})^2 (s + \frac{5}{4})^2 (s + \frac{7}{4})^2 (s + \frac{7}{6}) (s + \frac{11}{6}) (s + \frac{11}{12}) (s + \frac{13}{12}) (s + \frac{17}{12}) (s + \frac{19}{12})$$

$$f(s) = (s+1) \cdot (s+\frac{3}{2}) (s+\frac{5}{4}) (s+\frac{7}{4}) (s+\frac{7}{6}) (s+\frac{11}{6}) (s+\frac{11}{12}) \cdots (s+\frac{19}{12}).$$

$$O_{16} : \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3 + u^3) - exyz u.$$

$$\mu=16. \quad 1. x. y. z. u. \quad \begin{matrix} x^2 & y^2 & z^2 & u^2 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ xy & yz & zu & ux \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ xz & yu & & \end{matrix} \quad \begin{matrix} x^2y & y^2z & z^2u & u^2x \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ xyz & yzu & zuu & uxx \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x^2z & y^2u & & \end{matrix}$$

$$c = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

$$X_0 = \frac{1}{3}(xDx + yDy + zDz + uDu), \quad X_1 = \frac{1}{3}(xDy + yDz + zDu) \text{ etc.}$$

$$Q_1 = \frac{1}{\varphi_4}(exuDy + yDz + e^2x^2zDu) \quad \varphi_1 = 1 - e^3x^3$$

$$Q_2 = \frac{1}{\varphi_4}(yDx + euuDy + e^2xu^2Dz) \quad \varphi_2 = 1 - e^3y^3$$

$$Q_3 = \frac{1}{\varphi_2}(eyuDx + xDz + e^2y^2zDu) \quad (\varphi_3 = 1 - e^3z^3)$$

$$Q_4 = \frac{1}{\varphi_1}(zDy + exuDz + e^2x^2yDu) \quad \varphi_4 = 1 - e^3u^3$$

$$Q_5 = \frac{1}{\varphi_2}(e^2y^2uDx + eyxDz + zDu)$$

$$\text{---P.E.} \quad x(\rho - X_0) - \frac{e}{3}zuQ_2 \quad (\text{本質的対称性項に(2.13)})$$

$$y(\rho - X_0) - \frac{e}{3}xuQ_4$$

$$z(\rho - X_0) - \frac{e}{3}yuQ_3$$

$$u(\rho - X_0) - \frac{e}{3}xyQ_5.$$

$$\text{---P.E.} \quad (\rho - X_0 + \frac{1}{3})(\rho - X_0) - e^2u^2Q_1Q_2 + \frac{e^2u^2}{\varphi_1}(euQ_3 + 2Q_4)$$

$$\boxed{\dots} \rightarrow \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \quad \boxed{0111} - \frac{e}{2}\boxed{2000} \rightarrow \frac{7}{3}.$$

$$\boxed{1000} \rightarrow \frac{5}{3}, \quad \boxed{1100} \rightarrow \frac{6}{3} = 2.$$

$$\text{同項式} = (\rho + \frac{4}{3})(\rho + \frac{5}{3})^5(\rho + \frac{7}{3})^4(\rho + 2)^6$$

$$f(\rho) = (\rho + 1) \cdot (\rho + \frac{4}{3})(\rho + \frac{5}{3})(\rho + \frac{6}{3})(\rho + \frac{7}{3})$$

この場合, $xyz u$ の 2 次項は $\frac{4}{3}$ である。 $\frac{5}{3}$ は ρ である。 5 つの ρ は,

$f(\rho)$ では 既約剰余類が, $\frac{7}{3}$ が $11 \equiv 10$ になってしまふ。

$$(E_7) \quad X_{p+5}: \quad \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + ay^4 \quad p \geq 5. \quad \text{type } S_I$$

$$\mu = p+5. \quad 1. x, x^2, x^3, y, y^2, \dots, y^p \mid xy \dots$$

$$\begin{cases} p: \text{odd} & (2, p-2) \text{ knot } \approx 2 \text{ (II)} \rightarrow \text{unknotted } S' \text{ a link.} \\ p: \text{even} & 4 \text{ (II)} \rightarrow \text{unknotted } S' \text{ a link.} \end{cases}$$

これは Σ の $\Upsilon_{p,1}$ は, $\langle \text{カノニカルな } S_I \text{ の } 2\text{ 本 } \rangle$,
作用する Σ の 10 の Σ である

$$h(p) = (p+1) \cdot (p+1)^2 \left(\prod_{\substack{1 \leq j \leq p-1 \\ j \neq \frac{p}{2}}} \left(s + \frac{p+2j}{2p} \right) \right)_{\text{red.}}$$

$$\Upsilon_{p,q}: \quad x^2y^2 + x^p + y^q. \quad 5 \leq p \leq q. \quad \text{type } S_I.$$

$$p=q=5 \text{ の } \Sigma \text{ は } A' \text{ Campa の } \Sigma \text{ の } (x^2+y^2)(x^3+y^3)$$

$$\begin{cases} p: \text{odd } q: \text{odd} & (2, p-2) \text{ knot } \approx (2, q-2) \text{ knot } \text{ a link.} \\ p: \text{odd } q: \text{even} & (2, p-2) \text{ knot } \approx 2 \text{ (II)} \rightarrow \text{unknotted } S' \text{ a link} \\ p: \text{even } q: \text{odd} & (2, q-2) \text{ knot } \approx \text{unknotted } S' \text{ a link} \\ p: \text{even } q: \text{even} & 4 \text{ (II)} \rightarrow \text{unknotted } S' \text{ a link.} \end{cases}$$

$$h(p) = (p+1) \cdot (p+1)^2 \left(\prod_{\substack{1 \leq i \leq p-1 \\ i \neq \frac{p}{2}}} \left(s + \frac{p+2i}{2p} \right) \prod_{\substack{1 \leq j \leq q-1 \\ j \neq \frac{q}{2}}} \left(s + \frac{q+2j}{2q} \right) \right)_{\text{red.}}$$

$\boxed{00} \xrightarrow{\uparrow} \boxed{10} \quad \boxed{10} \xrightarrow{\uparrow} \boxed{11} \rightarrow (s+1)$

$$\sum_{11} x^3 y + y^5 - a x y^4 \quad \text{type } K_{II}^{\#}$$

$$\mu=11. \quad x^i y^j \quad \begin{matrix} i=0,1 \\ 0 \leq j \leq 4 \end{matrix} \in x^2. \quad a \geq m^6, a, c = \frac{1}{15} > 0.$$

$$X_0 = \frac{4}{15} x D_x + \frac{1}{5} y D_y. \quad \theta = \frac{1}{3} y D_x - \frac{1}{3} x D_y.$$

$$Q = \frac{1}{15\varphi} \left\{ \left(\frac{11}{15} a^2 x + a y \right) \theta + 5 y^2 D_x \right\} \quad \varphi = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{11}{15} \right)^2 a^3 y$$

$$Q' = \frac{1}{15\varphi} \left\{ \left(3x + \frac{11}{15} a^2 y^2 \right) \theta + \frac{11}{3} a y^3 D_x \right\}$$

$$\begin{aligned} -P_5^{\text{ex}} \quad & x(\rho - X_0) + \frac{ay}{15} Q. \\ & y(\rho - X_0) + \frac{a}{15} Q' \end{aligned}$$

$$= P_5^{\text{ex}} \quad \left(\rho - X_0 + \frac{1}{15} \right) (\rho - X_0) - \frac{11a^2}{15^2} \left(Q - \frac{(\frac{11}{15}ax + y/a)}{3\varphi} \right) \left(\rho - \left(\frac{3}{11} x D_x + \frac{2}{11} y D_y \right) \right)$$

$$\begin{aligned} b(\rho) = & (\rho+1) \cdot (\rho+1) (\rho+\frac{2}{3}) (\rho+\frac{4}{3}) (\rho+\frac{7}{15}) (\rho+\frac{8}{15}) (\rho+\frac{11}{15}) (\rho+\frac{13}{15}) \\ & \quad \boxed{20} \quad \boxed{01} \quad \boxed{13} \quad \begin{matrix} \uparrow \downarrow \\ \boxed{00} \end{matrix} \\ & (\rho+\frac{14}{15}) (\rho+\frac{16}{15}) (\rho+\frac{17}{15}) (\rho+\frac{19}{15}). \end{aligned}$$

$$\Sigma_{12} \quad x^3 y + a y^6 - x y^4 \quad \text{type } K_{II}^b$$

$$\mu=12. \quad x^i y^j \quad \begin{matrix} i=0..1 \\ j=0..4 \end{matrix} \quad z = x^2 + \frac{1}{2} x^3. \quad n \geq m^7$$

$$X_2 = \frac{3}{11} x D_x + \frac{2}{11} y D_y, \quad X_0 = \frac{5}{11} x D_x + \frac{1}{11} y D_y, \quad \Theta = x D_x - 3 y D_y.$$

$$Q = \frac{1}{\varphi} \left\{ \frac{3}{11} (x + \frac{18}{11} y^4) \Theta - y^3 D_x \right\} \quad \varphi = 1 - 3 \left(\frac{18}{11} \right)^2 a y.$$

$$Q' = \frac{18}{11} \varphi \left\{ \left(\frac{18}{11} a x + \frac{y}{18} \right) \Theta - a y^3 D_x \right\}$$

$$\begin{aligned} -P_{II} \quad & x(\rho - X_2) + \frac{1}{11} a y Q' \\ & y(\rho - X_2) + \frac{1}{11} a Q. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = P_{II} \quad & \left(\rho - X_2 - \frac{y^2}{11} D_x + \frac{1}{11} \right) (\rho - X_2) - 3 \left(\frac{18}{11} \right)^2 a y \left(\rho - X_0 - \frac{1}{11} \right) (\rho - X_0) \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\rho) = & (\rho+1) \cdot (\rho+\frac{5}{11}) (\rho+\frac{6}{11}) (\rho+\frac{7}{11}) (\rho+\frac{8}{11}) (\rho+\frac{9}{11}) (\rho+\frac{10}{11}) (\rho+1) \\ & \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ & \quad \quad \quad \boxed{20} \quad \quad \quad \boxed{15} \quad \quad \quad \boxed{12} \quad \quad \quad \boxed{9} \quad \quad \quad \boxed{6} \quad \quad \quad \boxed{3} \quad \quad \quad \boxed{0} \\ & (\rho+\frac{12}{11}) (\rho+\frac{13}{11}) (\rho+\frac{14}{11}) (\rho+\frac{15}{11}) \leftarrow \boxed{10} \end{aligned}$$

$x y^4$ に対応しては, $\boxed{06}$ と $\boxed{14}$ の combination で eigenvector となる.
 したがって $\frac{17}{11}$ の代わりに $\frac{6}{11}$.

Σ_{13}

$$x^3y + y^6 - axy^5$$

$$\text{type } K_{II}^{\frac{4}{3}}$$

$$\mu = 13.$$

$$c = \frac{1}{9} > 0$$

$$X_0 = \frac{5}{18}x D_x + \frac{1}{6}y D_y \quad \theta = \frac{1}{2}(-x D_x + 3y D_y)$$

$$Q = \frac{1}{9\varphi} \left\{ \left(\frac{7}{9}ax + y \right) \theta + \frac{7^2 a^2}{3^3} y^4 D_x \right\} \quad \varphi = 1 - \frac{7^2 a^3}{3^5} y^2$$

$$Q' = \frac{1}{9\varphi} \left\{ \left(x + \frac{7a^2}{3^3} y^3 \right) \theta + \frac{7}{3} a y^4 D_x \right\}$$

$$Q'' = \frac{1}{3^3 \varphi} \left\{ \left(\frac{7}{9}ax + y \right) \theta + 9y^2 D_x \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{--P.E.} \quad x(\rho - X_0) &= \frac{1}{9} a y^2 Q'' \\ y(\rho - X_0) &= \frac{1}{9} a Q' \end{aligned}$$

$$\text{=P.E.} \quad (\rho - X_0 + \frac{1}{9})(\rho - X_0) = \frac{a^2}{9^2} \left\{ Q'' - \frac{7}{2 \cdot 9 \varphi} \left(\frac{7}{9}ax + y \right) \right\} Q$$

$$\begin{aligned} h(\rho) = & (\rho+1)(\rho+\frac{4}{9})(s+\frac{5}{9}) \quad 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ (\rho+\frac{11}{9}) \\ & (\rho+\frac{11}{9})(s+\frac{13}{9}) \quad 17 \ 19 \ 23 \ (\rho+\frac{25}{9}) \end{aligned}$$

$$W_{12} \quad x^4 + y^5 + ax^2y^3 \quad \text{type } Y_I.$$

$$\left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}y^5 - ax^2y^3 \sim \pi i (1 \pm 2z)\right)$$

$$\mu=12 \quad x^i y^j \quad \begin{matrix} i=0,1,2 \\ j=0,1,2,3 \end{matrix} \quad x^2 y^3 \sim \frac{\sigma}{n+(1/2)} \text{ 不適.}$$

$$X_0 = \frac{1}{4}x D_x + \frac{1}{5}y D_y. \quad \varphi = 1 - 6a^2 y$$

$$\begin{aligned} -\text{pfs.} \quad x(\rho - X_0) &= \frac{ay^2}{10\varphi} (y D_x + 2ax D_y) \\ y(\rho - X_0) &= \frac{ax}{10\varphi} (3ay^2 D_x + x D_y) \end{aligned}$$

$$= \text{pfs} \quad (\rho - X_0 + \frac{1}{10})(\rho - X_0) = 6a^2 y (\rho - X_1)(\rho - X_2)$$

$$X_1 = \frac{1}{5}x D_x + \frac{1}{5}y D_y. \quad X_2 = \frac{1}{4}x D_x + \frac{1}{6}y D_y. \quad \text{f'}$$

$$(\rho - X_0 + \frac{1}{10})(\rho - X_0) = \frac{6a^2 y}{\varphi} \left\{ (2X_0 - \frac{1}{10} - X_1 - X_2)\rho + X_1 X_2 - X_0^2 + \frac{1}{10} X_0 \right\}$$

これは全く典型的の Y_I である。

$$\begin{aligned} h(\rho) &= (\rho+1) \cdot (\rho+\frac{9}{20}) (\rho+\frac{11}{20}) (\rho+\frac{13}{20}) (\rho+\frac{7}{10}) (\rho+\frac{17}{20}) (\rho+\frac{9}{10}) \\ &\quad \underbrace{\quad}_{\frac{100}{100}} \\ &= (\rho+\frac{19}{20}) (\rho+\frac{21}{20}) (\rho+\frac{11}{10}) (\rho+\frac{23}{20}) (\rho+\frac{13}{10}) (\rho+\frac{27}{20}) \end{aligned}$$

既約な $\frac{\phi}{10}$ と $\frac{\psi}{20}$ が $\frac{1}{10}$ の set である。

$$W_{13}: \quad x^4 + xy^4 + ay^6 \quad \text{type } K_I^b \cap S_I'$$

$$\left(\frac{1}{4}x^4 - xy^4 + \frac{1}{6}ay^6, z(12)\right)$$

$$\mu=13. \quad 1, x, x^2, y, y^4, y^3, y^4, y^5, xy, x^2y^2, x^2y, x^2y^2, y^6$$

$$X_0 = \frac{1}{4}x D_x + \frac{1}{6}y D_y, \quad \varphi = 1 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 y.$$

$$X_2 = \frac{1}{4}x D_x + \frac{3}{16}y D_y.$$

$$\text{--PSE.} \quad \begin{aligned} x(\rho - X_2) &= \frac{ay^3}{4 \times 48 \varphi} \left\{ ay^3 D_x + \left(\frac{a}{4}x^2 + y^2\right) D_y \right\} \\ y(\rho - X_2) &= \frac{a}{4 \times 48 \varphi} \left\{ 4y^3 D_x + x\left(x + \frac{a}{4}y^2\right) D_y \right\} \end{aligned}$$

$$\text{=PSE} \quad \left(\rho - X_2 + \frac{1}{8}\right)\left(\rho - X_2 - \frac{ay^2}{48} D_x\right) - \left(\frac{a}{4}\right)^2 x\left(\rho - X_0 + \frac{1}{12}\right)(\rho - X_0) \pm y$$

$$f(\rho) = (\rho+1) \cdot \left(\rho + \frac{7}{16}\right) 9 \ 11 \ 13 \ 15 \ 17 \ 19 \ 21$$

$$\left(\rho + \frac{5}{8}\right) 7 \ 9 \ 11 \cdot (\rho+1)$$

$$(E_8) \quad J_{p+4} \quad x^3 + \varepsilon x^2 y^2 + a y^p \quad \varepsilon = 1 \quad p \geq 7.$$

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{p}y^p - \frac{1}{2}x^2 y^2 \in (2)\right) \quad c = \frac{6-p}{3p} < 0$$

$$\mu = p+4. \quad 1, y, \dots, y^{p-2}, x, xy, xy^2, xy^3, \dots, xy^{p-4} \\ \text{or } 1, y, \dots, y^{p-2}, y^{p-1}, y^p, x, xy, xy^2, \dots, xy^{p-4}.$$

$$X_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{p}\right)x \partial x + \frac{1}{p}y \partial y, \quad X_0 = \frac{1}{3}x \partial x + \frac{1}{p}y \partial y.$$

$$X_2 = \frac{1}{3}x \partial x + \frac{1}{6}y \partial y, \quad \varphi = 1 - a y^{p-6}$$

$$Q = \frac{-1}{\varphi} \left\{ (x + y^2)y \partial x + x \partial y \right\}$$

$$\begin{aligned} -p\text{th.} \quad x(p - X_2) - \frac{ca}{2}y^{p-5}Q \\ y(p - X_1) + \frac{c}{2}x \partial y - \frac{ca}{2}y^{p-6}Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = p\text{th.} \quad (p - X_1)(p - X_2) - \frac{ca}{2}y^{p-7}Q(p - X_0) \\ + \frac{ca}{\varphi} \left\{ y(2p - X_0 - X_1) + \frac{c}{2}Q \right\} \end{aligned}$$

後2項は $-p$ 番と -2 番の $p \geq 1$ の形に $\tau \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{\text{Z}} \text{ 項式} = \overset{\boxed{10}}{\downarrow} \overset{\boxed{10}}{\downarrow} \overset{\boxed{11}}{\downarrow} \overset{\boxed{12}}{\downarrow} \left(\rho + \frac{1}{2} \right)^2 \left(\rho + \frac{5}{6} \right) (\rho + 1) \left(\rho + \frac{7}{6} \right) \prod_{1 \leq j \leq p-1} \left(\rho + \frac{1}{2} + \frac{j}{p} \right)$$

$x^3 + \varepsilon x^2 y^2 + a y^p + z^2 \in T_{2,1,p}$ $x^3 + a x y z + y^p + z^2 \in \mathbb{Z}$
従って $\boxed{\text{Z}}$ 項式 ρ の中に $\exists$ singularity の状態は $\boxed{10}$ ("7"
不) と Arnold も注意している.

$$h(\rho) = (\rho + 1) \cdot \left(\rho + \frac{1}{2} \right)^2 \left(\left(\rho + \frac{5}{6} \right) (\rho + 1) \left(\rho + \frac{7}{6} \right) \prod_{1 \leq j \leq p-1} \left(\rho + \frac{1}{2} + \frac{j}{p} \right) \right)_{\text{red.}}$$

$$K_{12}: \quad x^3 + axy^5 + y^9 \quad \text{type } K_I^\#$$

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{9}y^9 - axy^5 z_{12} \right)$$

$$\mu = 12.$$

$$X_0 = \frac{1}{3}x D_x + \frac{1}{9}y D_y, \quad X_2 = \frac{1}{3}x D_x + \frac{2}{15}y D_y, \quad \varphi = 1 - 25a^3y$$

$$Q = \frac{1}{4} \{ y^3 D_x + a(5ax + y^2) D_y \}$$

$$Q' = \frac{1}{4} \{ 5ay^4 D_x + (x + 5a^2y^3) D_y \}$$

$$\begin{aligned} -P_5^5: \quad & x(1 - X_0) - \frac{a}{21} Q' \\ & y(1 - X_0) - \frac{a}{21} y^2 Q \end{aligned}$$

$$= P_5^5: \quad \left(1 - X_0 + \frac{1}{21} \right) (1 - X_0) - \frac{5}{21} \{ Q(1 - X_2) - \frac{7y}{4} (21 - X_0 - X_2) \}$$

$$f(w) = (w+1) \cdot \left(w + \frac{10}{21} \right) 11 \ 13 \ 16 \ 17 \ 19 \ 20 \ 22 \ 23 \ 25 \ 26 \ 29.$$

$$\frac{9}{21} \text{ one set.}$$

$$K_{13}: \quad x^3 + xy^5 + ay^8 \quad \text{type } K_I^b \cap S_I'$$

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}ay^8 - xy^5\right) z(2)$$

$$X_0 = \frac{1}{3}xDx + \frac{1}{8}yDy, \quad X_2 = \frac{1}{3}xDx + \frac{2}{15}yDy, \quad \varphi = 1 - \frac{a^2y}{5^2}.$$

$$Q = \frac{-1}{5\varphi} \left\{ ay^4 Dx + \left(\frac{ax}{5} + y^3\right) Dy \right\}, \quad Q' = \frac{-1}{5\varphi} \left\{ y^4 Dx + \left(\frac{1}{5}x + \frac{ay^3}{5^2}\right) Dy \right\}.$$

$$-P_{12}^+. \quad x(1 - X_2) + \frac{ay^2}{120} Q$$

$$y(1 - X_2) + \frac{a}{120} Q'$$

$$= P_{12}^+. \quad \left(1 - X_2 + \frac{1}{15}\right) \left(1 - X_2 - \frac{ay^2}{120} Dx\right) - \frac{a^2y}{5^2} \left(1 - X_0 - \frac{1}{24}\right) (1 - X_0)$$

K_{14}

$$x^3 + y^8 + axy^6$$

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}y^8 - axy^6\right) \cdot 212$$

 $K_I^\#$

$\mu = 14$

$c = \frac{1}{12} > 0$

$X_0 = \frac{1}{3}x D_x + \frac{1}{8}y D_y$

$\varphi = 1 - 6^2 a^3 y^2$

$X_2 = \frac{1}{3}x D_x + \frac{1}{9}y D_y$

$Q = \frac{1}{\varphi} \{ y^3 D_x + a(6ax + y^2) D_y \}$

$Q' = \frac{1}{\varphi} \{ 6ay^5 D_x + (1 + 6a^2 y^4) D_y \}$

$Q'' = \frac{1}{\varphi} \{ 6^2 a^2 y^5 D_x + (6ax + y^2) D_y \}$

$-P\mathbb{E} \quad x(\rho - X_0) - \frac{a}{12} y^3 Q$

$y(\rho - X_0) - \frac{a}{12} Q'$

$= P\mathbb{E} \quad (\rho - X_0 + \frac{1}{12})(\rho - X_0) - \frac{a^2}{2} (yQ - \frac{8a(6ax + y^2)}{\varphi})(\rho - X_2)$

$$\text{又由(12), } (\rho - X_0 + \frac{1}{12})(\rho - X_0) - \frac{a^2}{12^2} Q \cdot Q''$$

$$+ \frac{9a}{2\varphi} (6ax + y^2)(\rho - X_2)$$

$b(p) = (p+1) \cdot (p + \frac{11}{24}) \mid 13 \ 17 \ 19 \ 23 \ 25 \ 29 \ 31$

$(p + \frac{7}{12}) \mid 11 \ 13 \ 17 \ (p + \frac{5}{3}) \mid 7$

4. b 函数一覧表.

2. 3. に対する $b(n)$ の一覧表でありが、

$$h(n)/(n+1) = \prod (n+\alpha) \quad \alpha \text{ を記す. } \frac{b}{a} \cdot c \cdots \geq \frac{b}{a} \frac{c}{a} \cdots$$

(i) $w-h$.初めに書く n が $\square\square$ ($\square\square\square$) に対する固有値. $0, \Delta, \nabla$ をつけたものは, 固有方程式では γ の double , triple , quadruple .

$$A_k \quad \frac{1}{k+1}, \dots, \frac{k}{k+1}.$$

$$D_k \quad \frac{k-2}{2(k-1)} + \frac{1}{k-1}, \dots, \frac{k-2}{2(k-1)} + \frac{k-1}{k-1} ; 1$$

(k : even ならば, 初項 + 1/2 以外も 1 を出). $b(n)$ では $1/2 < \dots$)

$$E_6 \quad \frac{7}{12} \quad 11 \quad 13 \quad 17 ; \quad \frac{5}{6} \quad 7$$

$$E_7 \quad \frac{5}{9} \quad 7 \quad 8 \quad 10 \quad 11 \quad 13 ; \quad 1$$

$$E_8 \quad \frac{8}{15} \quad 11 \quad 13 \quad 14 \quad 16 \quad 17 \quad 19 \quad 22.$$

$$\tilde{E}_8 = P_8 \quad 1, 2 ; \quad \triangle_3 \quad \triangle_5.$$

$$\tilde{E}_7 = X_7 \quad \frac{1}{2} \cdot 3 ; \quad \triangle_3 \quad \triangle_5 ; \quad \triangle_1.$$

$$\tilde{E}_8 = J_{10} \quad \frac{1}{2} \cdot 3 ; \quad \triangle_5 \quad \triangle_7 ; \quad \frac{2}{3} \cdot 4 ; \quad \triangle_1$$

$$Q_{14} \quad \frac{11}{12} \quad 13 \quad \triangle_7 \quad \triangle_9 \quad 23 \quad 25 ; \quad \triangle_5 \quad \triangle_7 ; \quad \frac{4}{3} \quad 5.$$

$$S_{14} \quad \frac{9}{10} \quad 11 \quad \triangle_3 \quad \triangle_7 \quad 19 \quad 21 ; \quad \frac{6}{5} \quad 7 \quad 8 \quad 9 ; \quad \triangle_2$$

$$U_{14} \quad \frac{8}{9} \quad 10 \quad \triangle_1 \quad \triangle_3 \quad \triangle_4 \quad \triangle_6 \quad 17 \quad 19 ; \quad \frac{4}{3} \quad 5.$$

$$V_{15} \quad \frac{7}{8} \quad \triangle_1 \quad \triangle_3 \quad \triangle_5 \quad 17 ; \quad \frac{5}{4} \quad 7 ; \quad \frac{3}{2}.$$

$$Z_{15} \quad \frac{3}{7} \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 ; \quad \triangle_1$$

$$W_{15} \quad \frac{5}{12} \quad 7 \quad 9 \quad \triangle_1 \quad \triangle_3 \quad 15 \quad 17 \quad 19 ; \quad \frac{5}{6} \quad 7 ; \quad \frac{2}{3} \quad 4 ; \quad 1.$$

$$N_{16} \quad \frac{2}{5} \quad \triangle_3 \quad \triangle_4 \quad \triangle_6 \quad \triangle_7 \quad 8 ; \quad \nabla$$

$$K_{16} \quad \frac{4}{9} \quad 5 \quad \triangle_7 \quad \triangle_8 \quad \triangle_{10} \quad \triangle_{11} \quad 13 \quad 14 ; \quad \frac{2}{3} \quad 4 ; \quad \triangle_1$$

(ii) non-quasi-hom.

見方はおおむね同じ. $b(n)$ に double の n に 2 を $(n+1)^2$ などに明記する. γ は初めの 2 つが $\boxed{00}(\boxed{000})$ の j の固有値. 尚 $X_{p+s}, Y_{p,g}$ では, $(\)_{red}$ 内に $(s+1)$ が j の k が, γ には $b(n)$ で j は j とき, 固有値 s に対して red を s と, γ の j まで $s+1$. O_{16} は特別. $\bullet$ は固有値 shift 型.

$$P_{p+s} \quad (n+1)^2 \left((n+\frac{4}{3})^2 (n+\frac{5}{3})^2 \prod_{i=1}^{p-1} (s+1+\frac{i}{p}) \right)_{red}.$$

$$\bullet Q_{10} \quad \frac{23}{24} 25 29 31 35 37 41 43; \quad \frac{4}{3} 5.$$

$$\bullet Q_{11} \quad \frac{17}{18} 19 23 25 29 31; \quad \frac{7}{6} 11; \quad \frac{4}{3} 5; \quad \frac{3}{2}.$$

$$\bullet Q_{12} \quad \frac{14}{15} 16 17 19 22 23 26 28; \quad \left(\frac{4}{3}\right) (5).$$

$$\bullet S_{11} \quad \frac{15}{16} 17 19 21 23 25 27 29; \quad \frac{5}{4} 7; \quad \frac{3}{2}$$

$$\bullet S_{12} \quad \frac{12}{13} 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24.$$

$$T_{p,g,r} \quad (n+1)^2 \left(\prod_{i=1}^{p-1} (s+1+\frac{i}{p}) \prod_{j=1}^{g-1} (s+1+\frac{j}{g}) \prod_{k=1}^{r-1} (s+1+\frac{k}{r}) \right)_{red}.$$

$$\bullet U_{12} \quad \frac{11}{12} 13 17 19; \quad \frac{7}{6} 11; \quad \left(\frac{5}{4}\right) (7); \quad \left(\frac{3}{2}\right).$$

$$\bullet O_{16} \quad \frac{4}{3} 5^* 7^*; \quad 2^*. \quad (\text{固有値式} = (s+\frac{4}{3})(s+\frac{5}{3})^5 (s+2)^6 (s+\frac{7}{3})^4)$$

$$X_{p+s} \quad (n+1)^2 \left((n+\frac{4}{3})(s+1)^2 (s+\frac{5}{3}) \prod_{j=1}^{p-1} (s+\frac{p+j}{2p}) \right)_{red}.$$

$$Y_{p,g} \quad (n+1)^2 \left((s+1) \prod_{i=1}^{p-1} (s+\frac{p+i}{2p}) \prod_{j=1}^{g-1} (s+\frac{g+j}{2g}) \right)_{red}.$$

$$\bullet Z_{11} \quad \frac{7}{15} 8 11 13 14 16 17 19; \quad \frac{2}{3} 4; \quad 1.$$

$$\bullet Z_{12} \quad \frac{5}{11} 6 7 8 9 10 12 13 14 15; \quad 1.$$

$$\bullet Z_{13} \quad \frac{4}{9} 5 7 8 9 10 11; \quad \frac{11}{18} 13 17 19 23 25.$$

$$\bullet W_{12} \quad \frac{9}{20} 11 13 17 19 21 23 27; \quad \frac{7}{10} 9 11 13.$$

$$\bullet W_{13} \quad \frac{7}{16} 9 11 13 15 17 19 21; \quad \frac{5}{8} 7 9 11; \quad 1.$$

$$J_{p+s} \quad (n+\frac{1}{2})^2 \left((n+\frac{5}{6})(n+1)(n+\frac{7}{6}) \prod_{i=1}^{p-1} (s+\frac{1}{2}+\frac{i}{p}) \right)_{red}$$

$$\bullet K_{12} \quad \frac{10}{21} 11 13 16 17 19 20 22 23 25 26 29.$$

$$\bullet K_{13} \quad \frac{7}{15} 8 11 13 14 16 17 18; \quad \frac{3}{5} 4 6 7; \quad 1.$$

$$\bullet K_{14} \quad \frac{11}{24} 13 17 19 23 25 29 31; \quad \frac{7}{12} 11 13 17; \quad \frac{5}{3} 7.$$

(ii) 雑感.

quasi-hom なる一方では, 固有方程式でにぎやかに
double, triple N_{16} では $(s+1)^4$ などとなっている。

これに比べて, *non-quasi-hom* 一方ではめるりせぬ。

尚, 初めに述べたように, (ii) の複現系列の
 P, X, Y, J, R (←前頁でかきかした) はすべて $T_{p, b, r}$
 の特例の場合とみえていい。(丁は 3 変数) XYJ 2 変数)
 すべて $h(s)$ に *double factor* が一つずつ出ている。

O_{16} は, parameter をいじり *generic* な値にして
 やってやればきである。

S_{12} の 13 乗根. K_{12} の 21 乗根 の配列など
 4 点となるものである。 *quasi-hom* にしてしまえば, (i.e. この場合
 $a=0$ とおく) 2 番目に書いた固有値が j して j とんでいく。
 まことに, 見苦しくなる。 *quasi-hom* とは特解の状態に
 すぎず, *non-quasi* の方が, $h(s)$ が美しい。といふことは,
 おもしろいことである。

第五章 Non-isolated case

non-isolated も含む, 詳しい理論については参照のこと

singularity の strata $\{\Sigma\}$ には $i=2, \dots, n$

$b_i(\rho)$ を $\bigoplus_{\text{codim } \Sigma=i} \text{Hom}(M, B_\Sigma)$ の minimal polynomial $b_i(\omega) = \rho + 1$ とする,

$$\text{l.c.m.}(b_i) \mid b(\omega) \mid \prod_{i=1}^n b_i(\rho)$$

注目すべきことは, 次元の異なる strata Σ_i , $\rho + d \geq 1$ の factor が現れるとき, $b(\rho)$ で, ダブルになることは起きる, といいことである.

p. 107 ~ 115 に, 修補にふけるもの (を多少修正) (T2 もうをかける, p. 115 と p. 116 の間) に, 現在ふけていた non-isolated 図は $\rho = 2$ を示す.

1. $x^3 + y^2z + t^2z^4$, 2. cubic cones in $\mathbb{C}^3$ 3. $x^2 + y^2z$
4. $x^2 + y^2z^2$, 5. $x^3 + y^2z^2$, 6. $x^3 + y^2z^3$, 7. $x^4 + y^4z$
8. $x^4 + 2tx^2y^2 + y^4$

115 ~ 116. Non-isolated case 補遺.

I. $P(\rho) \neq \rho + 1 = b(\rho) \neq 2$ の $P(\omega)$ の構成について.

1. 一般的方法
2. Brieskorn polynomial.
3. $x^5 + y^5 + tx^3y^3$

II. Join Conjecture

1. Conjecture
2. $f(x, x) = \frac{1}{n}x^n + g(x)$

III. examples.

1. $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ 2. $x^n + y^l z^m$ 3. $x_1 x_2^{p_1} + \dots + x_{2k-1} x_{2k}^{p_k}$
4. $(x_1 x_2)^2 + \dots + (x_{2k-1} x_{2k})^2$ 5. $(xy)^n + (yz)^n + (zx)^n - (xyz)^m$

$$1. \quad x^3 + y^2 z + x z^4$$

$t \neq 0$. non-isolated. (unpert.) (佐藤)

$t \neq 0$ isolated g -hom. (24; 8, 9, 6) 4 jet is sufficient.

(i.e. ϕ is 5 jet 以上 $\rightarrow$ 1777, ϕ is 4 jet 変換 $\neq$ 43).

$$t=0. \quad Q = \frac{1}{24} D_x^3 - \frac{1}{4} D_y^2 D_z \in \mathcal{I},$$

$$P(s) = -\frac{1}{3} (s + \frac{5}{6}) D_x (xQ - \frac{2}{3} (s + \frac{5}{6}) D_x^2) + (s + \frac{5}{3}) D_z (zQ + \frac{1}{2} (s + \frac{5}{6}) D_y^2)$$

$$P(s) f^{s+1} = (s+1)! (s + \frac{5}{6}) (s + \frac{7}{6})! (s + \frac{4}{3}) (s + \frac{5}{3})$$

$\therefore$ 1 factor is non singular part ϕ ;

ϕ_2 is $(s + \frac{5}{6}) (s + \frac{7}{6})$ is ϕ ; $\therefore$ 1 is ϕ map ϕ ;

ϕ_3 is $(s + \frac{4}{3}) (s + \frac{5}{3})$ is ϕ ; $\therefore$ 1 is ϕ .

$$\text{また, } s+1 \text{ is } \delta(\frac{1}{2}) \quad s + \frac{5}{6} \text{ is } \frac{1}{\sqrt{2}} \delta(x) \delta(y)$$

$$s + \frac{7}{6} \text{ is } \frac{1}{\sqrt{2}} \delta'(x) \delta(y). \quad (s + \frac{4}{3}) \text{ is } f(x) f'(y) \delta(z)$$

$$s + \frac{5}{3} \text{ is } \delta'(x) \delta'(y) \delta(z)$$

$$(\xi, \eta, \zeta) \equiv \text{grad } \log f = \frac{S}{f} (3x^2 - 2yz, y^2) \in \mathcal{I},$$

$$W = \text{closure of } \{ (x, y, z; \frac{S}{f} (3x^2 - 2yz, y^2); S) \}$$

$\mathcal{I}$: defining ideal of W . ($\mathcal{I}$ is f の symbol ideal の radical)

$$-H^3 = -3272217$$

$$\mathcal{I} \text{ a generator: } \frac{1}{3} x \xi + z \zeta = 0, \frac{1}{2} \eta \zeta - z \zeta, \frac{1}{2} \eta^2 \zeta - x^2 \zeta, \frac{1}{3} \eta \zeta \zeta - \frac{1}{2} x^2 \eta$$

$$\mathcal{I} \quad : \quad \frac{1}{3} x D_x + z D_z = 0, \frac{1}{2} \eta D_z - z D_z, \frac{1}{2} \eta^2 D_x - x^2 D_z, \frac{1}{3} \eta \zeta D_x - \frac{1}{2} x^2 D_y.$$

この $\mathcal{I}$ の因子 γ は $\mathcal{I}$ の $\mathcal{I}$ である。Hasse diagram による。ある種の解法を、佐藤が与えている。

さて, $t \neq 0$ では $X_0 = \frac{1}{24}(8x_0x_1 + 9x_0y_2 + 6x_1y_2)$ $X_0 f = f$.
 $\chi_{t \neq 0}(A) = (s+1) \left\{ \left(s + \frac{23}{24}\right) \left(s + \frac{29}{24}\right) \left(s + \frac{31}{24}\right) \left(s + \frac{35}{24}\right) \left(s + \frac{37}{24}\right) \left(s + \frac{41}{24}\right) \right.$
 $\left. \cdot \left(s + \frac{43}{24}\right) \left(s + \frac{49}{24}\right) \right\} \left(s + \frac{4}{3}\right) \left(s + \frac{5}{3}\right)$

原は 24 番根に相当するものたすは, $\frac{25}{24}$ があつて,
 $\frac{49}{24}$ があつてゐる。もし太極の $\alpha = 2$ だと,

$x^3 + y^2z + tzy + axy^3$ とでもすれば, non-quasi-hom
 になり, ② 位置はすかてきて, $\frac{49}{24}$ があつたり, $\frac{25}{24}$ があつて*

ここで注目すべきは, $\left(s + \frac{4}{3}\right) \left(s + \frac{5}{3}\right)$ があつてゐる。

$s + \frac{4}{3}$ は $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ より, $s + \frac{5}{3}$ は $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ からあつて,

これは non-isolated のときと② (事情である)。

つまり, isolated のときも, specialize $t=0$ にして non-isol.
 とき, 原をからあつてゐるもの, いくつかは保つてゐる。

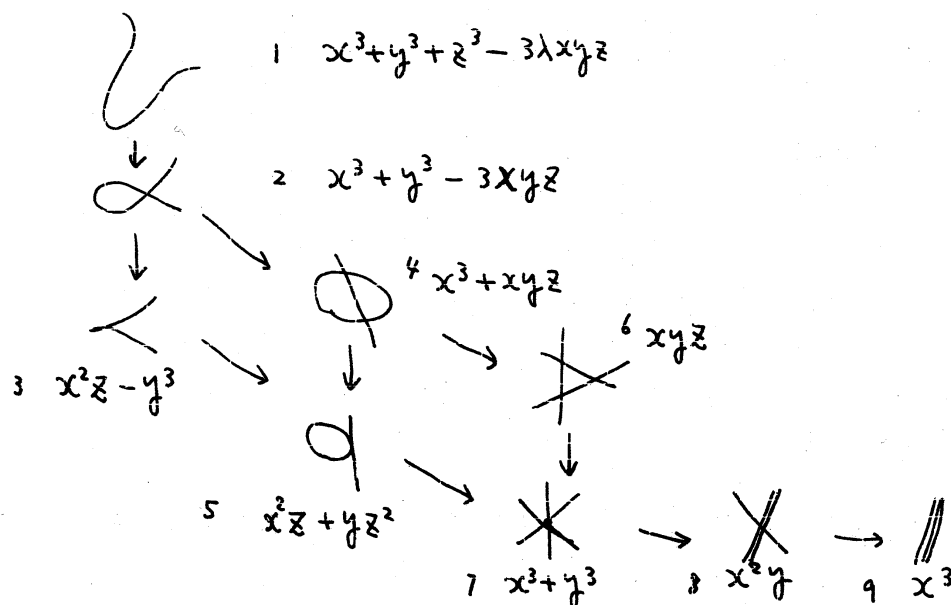
一般に, どういふことがあつたさうか?

* $X_0 \left(t \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{-49}{24} \left(t \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$

$X_0 \left(t \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = -\frac{41}{24} \left(t \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ となつてゐる。

この二つが B_{pt} であるとき, 太極をさす。 Ω^2 である

はあつてゐる。

2. cubic cones in $\mathbb{C}^3$ 

- | | |
|--------------------|---|
| 1. (isolated j-hm) | $(\rho+1)^2 \cdot (\rho+\frac{4}{3})(\rho+\frac{5}{3})(\rho+2)$ |
| 2. | $(\rho+1)^3 (\rho+\frac{4}{3})(\rho+\frac{5}{3})$ |
| 3. (1211) | $(\rho+1) (\rho+\frac{4}{3})(\rho+\frac{5}{3})(\rho+\frac{5}{6})(\rho+\frac{7}{6})$ |
| 4. | $(\rho+1)^3 (\rho+\frac{4}{3})(\rho+\frac{5}{3})$ |
| 5 | $(\rho+1)^2 (\rho+\frac{3}{4})(\rho+\frac{5}{4})$ |
| 6 | $(\rho+1)^3$ |
| 7 | $(\rho+1)^2 (\rho+\frac{2}{3})(\rho+\frac{4}{3})$ |
| 8 | $(\rho+1)^2 (\rho+\frac{1}{2})$ |
| 9 | $(\rho+1) (\rho+\frac{1}{3})(\rho+\frac{2}{3})$ |

1. 14317, $P(\rho) \neq 0 = h(\rho) \neq 0$ とする $P(\rho)$ を具体的に求めてある.
2. 4.5 は厳密に 11; 2, 上に書いた式を $h(\rho)$ がわく, 211; のてあるが, 211で正しいことは, ほぼ疑いがない.

$$4. \quad x^2 + y^2 z^2 \quad (\text{not } \#)$$

$$B = \left\{ \frac{1}{4}(s+1)z D_x^2 + \frac{1}{2}D_z \left(\frac{1}{4}z^2 D_x^2 + \frac{1}{4}D_y^2 \right) \right\} \simeq (7, \\ \left(\frac{1}{4}(s+1)(s+\frac{3}{2}) D_x^2 + \frac{1}{2}D_z B \right) \frac{d}{dt} = (s+1)^3 (s+\frac{3}{2}) \frac{d}{dt}$$

$$\left(\begin{array}{l} x^2 \simeq b - \hbar \quad (s+1)(s+\frac{1}{2}) \\ y^2 z^2 \simeq b - \hbar \quad (s+1)^2 (s+\frac{1}{2})^2 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 z^2 \text{ a Milnor fibering } \quad \mathbb{Z}_2 * (S^1 \cup S^1) \quad H_0 = \mathbb{C} \\ h_0 : H_0(F) \rightarrow H_0(F) \quad \underline{id.} \quad (t-1) \quad H_1 = \mathbb{C} \\ h_1 : H_1(F) \rightarrow H_1(F) \quad H_2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}. \\ \begin{array}{c} \widetilde{H}_0(\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{-1} \widetilde{H}_0(\mathbb{Z}_2) \quad \underline{id} \quad (t-1) \\ \otimes \\ \widetilde{H}_0(S^1 \cup S^1) \xrightarrow{-1} \widetilde{H}_0(S^1 \cup S^1) \end{array} \\ h_2 : H_2(F) \rightarrow H_2(F) \\ \begin{array}{c} \widetilde{H}_0(\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{-1} \widetilde{H}_0(\mathbb{Z}_2) \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (t^2-1) \\ \otimes \\ \widetilde{H}_1(S^1 \cup S^1) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \widetilde{H}_1(S^1 \cup S^1) \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{for, ch. poly. of } h &= (t-1)^3 (t+1) \\ h &= (s+1)^3 (s+\frac{3}{2}) \end{aligned}$$

$$5. \quad x^3 + y^2 z^2 \quad (\text{木公 7})$$

$$C = \left[\frac{1}{9} (s + \frac{5}{3})(s + \frac{7}{6}) D_x^2 + \frac{1}{2} D_z \left\{ \frac{1}{9} (s + \frac{5}{3}) z D_x^2 + \frac{1}{2} D_y \left(\frac{1}{9} y z D_x^2 + \frac{1}{3} x D_y D_z \right) \right\} \right]$$

$$D = \frac{1}{4} (s + \frac{5}{3})(s + \frac{7}{6})^2 D_y^2 + \frac{1}{3} z^2 D_x C$$

$$E = \frac{1}{2} D_z D + \frac{1}{3} (s + \frac{5}{3}) z D_x C$$

$$F = \frac{1}{2} D_z E + \frac{1}{3} (s + \frac{5}{3})(s + \frac{4}{3}) D_x C \quad \text{と 2. 17.}$$

$$F \neq^{0+1} = (s+1)(s+\frac{4}{3})(s+\frac{5}{3})(s+\frac{5}{6})^2(s+\frac{7}{6})^2$$

$$\begin{pmatrix} x^3 \rightarrow (s+1)(s+\frac{1}{3})(s+\frac{2}{3}) \\ y^2 z^2 \rightarrow (s+1)^2 (s+\frac{1}{2})^2 \end{pmatrix}$$

$$x^3 + y^2 z^2, \text{ Milnor fibre } Z_3 * (S^1 \cup S^1) \simeq \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array}$$

$$\circ H_0(F) \rightarrow H_0(F) \quad \text{id.}$$

$$t-1$$

$$\circ H_1(F) \rightarrow H_1(F)$$

$$\tilde{H}_0(\mathbb{Z}_3) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} \tilde{H}_0(\mathbb{Z}_3)$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$t^2 - t + 1$$

$$\tilde{H}_0(S^1 \cup S^1) \xrightarrow{-1} \tilde{H}_0(S^1 \cup S^1)$$

$$\circ H_2(F) \rightarrow H_2(F)$$

$$\tilde{H}_0(\mathbb{Z}_3) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} \tilde{H}_0(\mathbb{Z}_3)$$

$$h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$t^4 + t^2 + 1$$

$$\tilde{H}_1(S^1 \cup S^1) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \tilde{H}_1(S^1 \cup S^1)$$

$$\text{ch. poly. of } F \cong = (t-1)(t^2-t+1)(t^4+t^2+1)$$

$$= (t-1)(t-\omega^2)(t-\omega)(t+\omega)^2(t+\omega^2)^2 \quad \omega^3=1$$

$$\begin{array}{ccccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ t(s) & = & (s+1)(s+\frac{4}{3})(s+\frac{5}{3})(s+\frac{5}{6})^2(s+\frac{7}{6})^2 \end{array}$$

(いったり) 8, 7, 2.

$$6. \quad x^3 + y^2 z^3 \quad (\text{松本})$$

~~証明~~, 松本氏の計算では, (大変複雑)

$$h(s) \mid (s+1)^3 (s+\frac{5}{6}) (s+\frac{7}{6}) (s+\frac{2}{3}) (s+\frac{4}{3})^2 (s+\frac{5}{3}) \quad \checkmark \textcircled{5} \text{ 矢張り}$$

$$\text{おたからていふ... } h(s) = (s+1)^2 (s+\frac{5}{6}) (s+\frac{7}{6}) (s+\frac{2}{3}) (s+\frac{4}{3}) (s+\frac{5}{3})$$

$$\text{Milnor fibre } \mathbb{Z}_3 * S^1 \simeq S^2 \vee S^2 \quad (\text{cf. })$$

$$h_0: H_0(F) \rightarrow H_0(F) \quad \text{id.} \quad t-1$$

$$h_1: 0$$

$$h_2: H_2(F) \rightarrow H_2(F)$$

$$\begin{array}{ccc} \text{"} & & \text{"} \\ \widetilde{H}_0(\mathbb{Z}_3) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} & \widetilde{H}_0(\mathbb{Z}_3) \end{array}$$

$$t^2 + t + 1$$

$$\begin{array}{ccc} \otimes & & \otimes \\ \widetilde{H}_1(S^1) & \xrightarrow{\text{id}} & \widetilde{H}_1(S^1) \end{array}$$

$$\text{ch. poly の根} = (t-1)(t-\omega)(t-\omega^2)$$

$$\text{しつと 3 と } h(s) \text{ は } (s+1) (s+\frac{2}{3}) (s+\frac{4}{3}) \quad \text{と 原式から導き出す}$$

$$\text{しつ, } y=1 \text{ で } x^3 + z^3 \rightarrow (s+1)^2 (s+\frac{2}{3}) (s+\frac{4}{3})$$

$$\cdot \quad z=1 \text{ で } x^3 + y^2 \rightarrow (s+1) (s+\frac{5}{6}) (s+\frac{7}{6})$$

$$\text{を考へると, } (s+\frac{5}{6}) (s+\frac{7}{6}) \text{ は } h(s) \text{ に含まれていない。}$$

よく検討すればわかる。

$$7. \quad x^m + y^n z \quad (\text{the } (x, y, z) \text{ is a generator})$$

$$f \text{ a generator} \quad X_0 = s - \left(\frac{1}{m} x D_x + z D_z \right)$$

$$X_1 = \frac{1}{n} y D_y - z D_z, \quad X_2 = \frac{1}{m} y^n D_x - x^{m-1} D_z, \quad X_3 = \frac{1}{m} y^{n-1} z D_x - \frac{1}{n} x^{n-1} D_y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (s+1) \leftrightarrow f(f) \\ s + \frac{\mu+1}{m} + \frac{\nu+1}{n} \leftrightarrow \frac{1}{n \sqrt{z^{\nu+1}}} f^{(\mu)}(x) f^{(\nu)}(y) \quad \begin{array}{l} 0 \leq \mu \leq m-2 \\ 0 \leq \nu \leq n-2 \end{array} \\ s + \frac{\mu+1}{m} + 1 \leftrightarrow f^{(\mu)}(x) f^{(n-1)}(y) f(z) \end{array} \right.$$

$$\psi(s) = (s+1) \left(\prod_{\substack{0 \leq \mu \leq m-2 \\ 0 \leq \nu \leq n-2}} \left(s + \frac{\mu+1}{m} + \frac{\nu+1}{n} \right) \right)_{\text{red}} \quad \text{(the } (x, y, z) \text{ is a generator)}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Milnor fibre } \cong \text{Topology } \rightarrow \text{the } (x, y, z) \text{ is a generator} \\ \frac{1}{n} D_x f^{s+1} = x^{n-1} (s+1) f^s \\ \left(\frac{1}{n^2} z^{n-1} + \frac{1}{m} D_y D_z \right) f^{s+1} = x^{n-2} z^{m-1} (s+1) \left(s+1 + \frac{n-1}{n} \right) f^s \\ D_y f^{s+1} = z^m (s+1) f^s \end{array} \right]$$

この3つが initial data として使われる。

この場合、厚さの factor z , $x=y=0$ の factor x に
 同様に $(s+\alpha)$ があつたとしても、 ψ ではどうも z は z として使われる。

8. $x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ (相厚).

これは cross ratio. (t parameter と x, y 同様に)

Arnold $X_9 =$ Saito $\tilde{E}_7$ isolated ~~is~~ homogeneous.

$$b(s) = (s+1)^3 (s+\frac{1}{2}) (s+\frac{3}{2}) (s+\frac{3}{4}) (s+\frac{5}{4})$$

今, $x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ として, 3変数 non-isolated polynomial と x, y, z . y, z と,

$$b(s) = (s+1)^3 (s+\frac{1}{2}) (s+\frac{3}{4}) (s+\frac{5}{4})$$

$(s+\frac{3}{2})$ が消失する.

この事情, 幾何学的立場から, 別に不愚博ではない.

I. $P(\rho) f^{\rho+1} = h(\rho) f^{\rho}$ とする。 $P(\rho)$ の構成について。

isolated case では、上の $P(\rho)$ を直接求めることはせず、他の方法で $h(\rho)$ を決定した上で求める。しかし、non-isolated では、 $P(\rho)$ を (理論値では) 求めて、 $h(\rho)$ を決定してゆくことが、理論構成をすすめる上から重要である。

1. 一般的方法.

$f(x, y)$: f -form $X_0 = \alpha x \partial_x + \beta y \partial_y$ $X_0 f = f$ とする。

$$\text{今、} \begin{cases} A f^{\rho+1} = h'(\rho) x^{i+1} y^j f^{\rho} \\ B f^{\rho+1} = h'(\rho) x^i y^{j+1} f^{\rho} \end{cases}$$

と仮定すると、 ρ を $\rho+1$ に置き換えて、

$$\begin{aligned} (\alpha D_x A + \beta D_y B) f^{\rho+1} &= h'(\rho) (\alpha D_x x + \beta D_y y) x^i y^j f^{\rho} \\ &= h'(\rho) (\rho + (i+1)\alpha + (j+1)\beta) x^i y^j f^{\rho} \end{aligned}$$

これを何度も繰り返して、

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} P_0 f^{\rho+1} = x^m h_0(\rho) f^{\rho} \\ P_1 f^{\rho+1} = x^{m-1} y h_1(\rho) f^{\rho} \\ \vdots \\ P_m f^{\rho+1} = y^m h_m(\rho) f^{\rho} \end{array} \right. & \text{より、} \quad \lambda.c.m(h_i, h_{j+1}) = h_{i,j}(\rho) \\ & C_x^{i,0}(\rho) h_0(\rho) = h_{i,0}(\rho) \\ & C_y^{i,j}(\rho) h_1(\rho) = h_{i,j}(\rho) \\ & C_x^{j,1}(\rho) h_1(\rho) = h_{j,1}(\rho) \\ & C_y^{i,j+1}(\rho) h_2(\rho) = h_{i,j+1}(\rho) \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

$$h_{2,0}(\rho) = \lambda.c.m(h_0, h_{2,1}) = (\rho + \alpha(m+1) + \beta) h_{1,0}(\rho), (\rho + \alpha(m-1) + \beta) h_{1,1}(\rho)$$

より、 $h_{m,0}(\rho) = \dots = h_{m,m}(\rho) = B(\rho)$

特に、 $h_0(\rho) = \dots = h_m(\rho) = B(\rho)$ $\alpha = \beta = \frac{1}{r}$ とするとき、

$$h(\rho) = \prod_{j=2}^{m+1} \left(\rho + \frac{j}{r} \right) B(\rho)$$

$$1311. \quad f = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3$$

$$X_0 = \frac{1}{2}x D_x + \frac{1}{3}y D_y$$

$$D_x f^{s+1} = (s+1)x f^s$$

$$D_y f^{s+1} = (s+1)y^2 f^s$$

$$\left(\frac{1}{2}D_x y D_x + \frac{1}{3}D_y D_y\right) f^{s+1} = (s+1)\left(s+\frac{7}{6}\right)y f^s$$

$$\left\{\frac{1}{2}\left(s+\frac{7}{6}\right)D_x \cdot D_x + \frac{1}{3}D_y\left(\frac{1}{2}D_x y D_x + \frac{1}{3}D_y^2\right)\right\} f^{s+1} = (s+1)\left(s+\frac{7}{6}\right)\left(s+\frac{5}{6}\right)f^s$$

2. Brieskorn polynomial

$$f = x_1^{n_1} + \dots + x_N^{n_N}$$

$$D_i f^{s+1} = (s+1)n_i x_i^{n_i-1} f^s$$

以下, monomial α , γ の α を plot した $\mathbb{N}_0^n$ の pt. α を
同一視してよい. 1. の手法では, ある monomial x^α に
対して, $|\alpha|+1$ 個の N 個の monomials 対する α 因子 = α により
与えられた factor に対応してゐる.

x^α から, 正の quadrant を引いたとき, γ の内部境界
の monomials たちのおかげで $P(s)f^{s+1} = x^\alpha h(s)f^s$ となる
のだが, $s+\gamma$ といふ factor が, α (この quadrant の
2つの monomial に対応してでてきたとき). このとき, 一
つの monomial を頂点とする正の quadrant が, α 一
つの monomial を含んでゐるが, $(s+\gamma)^2$ となり, 必要な
なければ, $s+\alpha$ より小さいとき, inductive method を用ひ
わかる. Brieskorn poly. の場合, $x_1^{n_1-1} \dots x_N^{n_N-1}$ を頂点とする
負の quadrant の monomials について (さうではない).
このとき, 各 monomials α に対する factor について,
直前に α べた, 初めの事象は α になる. よって, $h(s)$ の
factor が, すべて simple になる.

実際には $P(m_1, \dots, m_N)(s)f^{s+1} = h(s)f^s$ となる P を構成する
ことが可能である.

II. Join Conjecture.

1. monodromy theory により, isolated では Thom-Sebastiani に于く Join theorem. non-isolated では Saito により もつがある.

我々の h は, 最も多項式的でありかつ, 一般に Join theorem を構成する $\rho=0$ の non-isolated の場合 複雑である. しかし, ρ の値を $\rho \rightarrow \rho_0$ とする.

$A: n \times n$ $B: m \times m$ matrices. 最も多項式的に ρ が $(\rho+\alpha)^l, (\rho+\beta)^k$ の factor であるとき.

$A \otimes I_m + \mathbb{R}_n \otimes B$ の最も多項式的は, $(\rho+\alpha+\beta)^{l+k-1}$ の factor である. このとき, $g(\rho) = h(\rho)$ の h -factor, h_g, h_f を構成する方法をいう.

$$\begin{aligned} h_g &= (\rho+1) \prod (\rho+\alpha_i)^{m(\alpha_i)} & \alpha_i &\neq \alpha_j \\ h_f &= (\rho+1) \prod (\rho+\beta_j)^{m(\beta_j)} & \beta_i &\neq \beta_j \end{aligned}$$

$\gamma_{i,j} = \alpha_i + \beta_j \geq 1$, 等しいものは k 個 (番号を $1, \dots, r$ とする). $m(\gamma_k) = \max_{(i,j)} (m(\alpha_i) + m(\beta_j) - 1) \geq 0$.
 $\gamma_k = \alpha_i + \beta_j$

Join Conjecture 1.

$$h_{g+h}(\rho) = (\rho+1) \prod (\rho+\gamma_k)^{m(\gamma_k)}$$

isolated では ϵ が $1, \dots, n$ である; とおきか換えて,
non-isolated の場合, 修正の必要があるかもしれない.
適当な実例では, non-isolated でも, 成り立つ.

$$2. \quad f(t, x) = \frac{1}{n} x^n + g(x).$$

Join の典型として, 極限の ϵ を与える.

$$g_f[s] \supset g_g[s - \frac{1}{n} t D_t], \ni g_j D_t - x^{n-1} D_j, \quad f D_t - x^{n-1} D_f.$$

次のことを示す. (本図 5)

$$\text{Thm.} \quad b_f(s) \mid (s+1) \text{ l.c.m. } (b'_g(s + \frac{1}{n}), \dots, b'_g(s + \frac{n-1}{n})).$$

$$\text{すなわち,} \quad b_g(s) = (s+1) b'_g(s).$$

証明は, 上の ideals の包含に注目し,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 &= \mathcal{O}[s] / g_f[s] + \mathcal{O}[s] x^{n-1} + \mathcal{O}[s] g_j \\ &\uparrow \\ \mathcal{M}' &= \mathcal{O}[s] / g_f[s - \frac{1}{n} t D_t] + \mathcal{O}[s] g_j + \mathcal{O}[s] x^{n-1} \\ &= \bigoplus_{j=0}^{n-1} \mathcal{O}'[s] / g_g[s + \frac{j}{n}] + \mathcal{O}'[s] g_j \end{aligned}$$

から従う. 詳細は略.

数多くの場合, Thm において, 等号が成立する.

Thm において, 等号 ももって命題としたものを,

Join Conjecture (special case) 2 とする.

III. Examples.

1. $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$

$$D_1^{a_1} \cdots D_n^{a_n} f^{s+1} = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{a_i} (s + \frac{i_j}{a_i}) f^s$$

$b(s)$
||

~~$g \neq a$~~ , $(s+1)^m$ 以外にも, multiple factor がある; 一般に $\wedge$; せむい $\leq n$, 以下の方法で示す。

2. $x^l + y^l z^m$

$$D = \{(j, k) \mid 0 \leq j \leq l-2, 0 \leq k \leq m-2, \frac{j+1}{l} = \frac{k+1}{m}\}$$

$$g.c.d.(l, m) = d \Rightarrow \#D = d-1.$$

$$b(s) = (s+1) \cdot \left[\prod_{i=0}^{m-2} (s + \frac{i+1}{m} + 1) \prod_{\substack{0 \leq i \leq m-2 \\ 0 \leq j \leq l-2}} (s + \frac{i+1}{m} + \frac{j+1}{l}) \prod_{\substack{0 \leq i \leq m-2 \\ 0 \leq k \leq m-2}} (s + \frac{i+1}{m} + \frac{k+1}{m}) \right]_D$$

ここで $[]_D$ とは, $D = \emptyset$ なら red のこと。

$D \neq \emptyset$ なら, $[]_D$ の中, 各因子で $D \ni (j, k)$ に対応する factor 達は, (各因子にあるかどうかに依る) 2乗 であり, 他は red. とする。

$l=1$ の場合は 既出である。

この結果は, Join Conjectures とある。

例1 $x^6 + y^2 z^3$

$D = \emptyset$

$$\begin{aligned} \text{各因子} & (s + \frac{7}{6})(s + \frac{4}{3})(s + \frac{3}{2})(s + \frac{5}{3})(s + \frac{11}{6}) \\ & = \cdots (s + \frac{2}{3})(s + \frac{5}{6})(s+1)(s + \frac{7}{6})(s + \frac{4}{3}) \\ & = \cdots (s + \frac{1}{2})(s + \frac{2}{3})(s + \frac{5}{6})^2 (s+1)^2 (s + \frac{7}{6})^2 (s + \frac{4}{3})(s + \frac{3}{2}) \end{aligned}$$

$$b(s) = (s+1) \cdot (s+1)(s + \frac{1}{2})(s + \frac{3}{2})(s + \frac{2}{3})(s + \frac{4}{3})(s + \frac{5}{6})(s + \frac{5}{6})(s + \frac{7}{6})(s + \frac{11}{6})$$

このとき Σ critical set Σ , $\dim_{\mathbb{C}_0} \Sigma = k$. Milnor fibre
は just $(k-1)$ -connected.

$$i_j = p_j - 1 \quad \text{if,} \quad \delta(x_1) \cdot \delta^{(p_1-1)}(x_2) \cdots \quad \rightarrow \Sigma \rightarrow \mathbb{P}^{\frac{2k}{g_1}}$$

$$\text{従って, } f = x_1 x_2^{p_1} + \cdots + x_{2k-1} x_{2k}^{p_k} + y_1^{g_1} + \cdots + y_l^{g_l}$$

$$\text{に於て (7), } P(\omega) \neq 0 \Rightarrow \omega(\omega+1) = h(\omega) \neq 0 \quad \rightarrow P(\omega) \neq 0 \Rightarrow \omega < \tau,$$

$$h(\omega) = (\omega+1) \left(\prod_{\substack{0 \leq i_j \leq p_j-1 \\ 0 \leq \alpha_l \leq g_l-2}} \left(\omega + \frac{i_1}{p_1} + \cdots + \frac{i_k}{p_k} + \frac{\alpha_1}{g_1} + \cdots + \frac{\alpha_l}{g_l} \right) \right)_{\text{red.}}$$

$$4. \quad (x_1 x_2)^2 + \cdots + (x_{2k-1} x_{2k})^2$$

$$\frac{1}{4} (\sum x_{2i}^2 D_{2i-1}^2) \neq 0 \Rightarrow (\omega+1)(\omega+\frac{k}{2}) (\prod x_{2i}^2) \neq 0$$

に注意.

$$h(\omega) = (\omega+1) \prod_{i=0}^k \left(\omega + \frac{k}{2} + \frac{i}{2} \right)^{k+1-i}$$

したがって $\omega < \tau$ であるから, ω と τ との間
に ω が存在する.

$$5. \quad \frac{1}{n} \{ (xz)^n + (yz)^n + (zx)^n \} - \frac{1}{n} (xyz)^n \quad c = \frac{3n}{2n} - 1$$

$$X_0 = \frac{1}{2n} \langle x, D \rangle, \quad X_1 = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right) (x D_x + y D_y) + \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n} \right) z D_z.$$

$$n \leq m \Rightarrow \text{quasi-hom } X_0$$

$$2m > n > m \Rightarrow \text{operator } \tau \text{ positivity of } X$$

$$\frac{3}{2}m > n > m \quad c > 0 \quad (x - X_0 + z)(y - X_0 + z)(z - X_0) + \dots$$

$$\frac{3}{2}m = n \quad c = 0 \quad \text{from } (x - X_0)$$

$$2m > n > \frac{3}{2}m \quad c < 0 \quad (x - X_1)(y - X_2)(z - X_3)$$

$$\therefore \exists \tau \text{ " } \tau \text{ " } \tau, \text{ 之 } \tau = \overline{|m > 2m|} \text{ となる } \tau,$$

$$\underline{2 \geq \ell(f)} \quad (x, y, z), \text{ canonical } \tau \quad X_1, X_2, X_3 \text{ } \tau \text{ positivity}$$

$$\text{は成り立つ。}$$

$$\text{e.g. } m = 6, \quad n = 2.$$

$$X_1 = \frac{1}{3} (x D_x + y D_y) - \frac{1}{6} z D_z.$$

$$(x - X_1)(y - X_3) - 4 x^2 (y z)^2 (y - X_0 + z)(z - X_0)$$

$$\text{このように, simplex type } \tau, \text{ simplex } \tau \text{ となる } \tau$$

$$\text{は } 1, 2, \dots, n \text{ となる?}$$

第六章 未来への展望 反省をこめて

1. $h(s)$ の安定性. $bred(s)$

h 函数と *monodromy* の関係は根本的だが、
 $\exp$ の肩にのせる前であり、 π_1 としてあり、やがて
monodromy の一致するものでも、 $h(s)$ が重要なことは、
 いよいよわかることになりやうである。

μ -*cl family* と π_1 ような推論条件では、固有値が
 $\text{mod } 2$ で *shift* (する) ことは、すでに初期に
 三稿の描いたことである。(p.41) これらとは、

μ -*cl non-quasi-hom family* とでもすれば、 π_1 ような
 考え方が、今後は、*non-quasi-hom* を入れていか
 ねばならないであろう。少なくとも、次のことはある
 であろう。

μ -*cl*, $L(f)$ -*cl family* $\Rightarrow h(s)$ 安定.

だが、 π_1 ような命題をいおうとなく、 $h(s)$ に近いが、
 少し違ったものを考えてみよう。 π_1 ことも、あな
 がちかりのことではあるまい。だが、場合、*monodromy*
 が一致すれば、 h も一致する、など π_1 ことになる
 ことは、あまりおもしろくない。実際、*monodromy* では
 判別できる M. Cl. Givara の例 (p.45) などが、 $h(s)$ で
 判別される、 π_1 ようなことは期待したいであろう。

本稿又にも書いてはみえなかったが、*reduced b-fn*
 と π_1 が走動されてあり、たとえば解析接続の
 σ -factor には、 h で十分なことがある。 π_1 である。
 今後 $bred(s)$ についても、色を補ってあげよう。

$\Rightarrow$. f の def. する Milnor fib. = g の def. する Milnor fib. ┘

しかも、我々の $h(\rho)$ では固有値が一般に $\text{mod } 2$ で
 一致すること、さんざん承知している。少なくとも、
 $\rho^2 - \rho A - B$ が与えられるとすれば、 $\dim \mathcal{O}/\mathcal{O}(\rho)$ の個が
 1 つにして小さくなる。さて、もっとも望んでいることは、
 一般にこのような状態で、絶対値最小の根は何か？
 なりか？ということ。さて。

$$\textcircled{a} \text{ の仮定 } \Rightarrow \left(\begin{array}{l} -b_2(\rho) = (\rho+1)(\rho+\alpha) \cdots \quad \alpha: |\alpha| \text{ 最小} \\ \Rightarrow b_f(\rho) = (\rho+1) \cdot (\rho+\alpha) \cdots \end{array} \right)$$

現在までのところ、絶対値最小の根が、 ρ の地位を
 うばわれた例はない。(w-hom α とし、絶対値最小の根 $= -(\frac{\alpha}{\rho})$)
 これは、asymptotic exp. ともかかわり重要である。
 又、w-hom などといふ、カテゴリー 3 条件でよく、
 いかる状態のもので、 ρ のようになるとがよいのか？
 これは、1. でいっただけの安定性ともかかわっている。

3. $g[5]$ の IT 値と他の方向のかわり。

だが、Gauss-Manin connection と深く関係があることは、
 わかっている。ところで、link 等への $h(\rho)$ 計算では、出てきた
 作用素からただちに $h(\rho)$ は判別された。一方 knot theory
 では、Alexander Matrix からただちに固有方程式がわかる。
 どちらも大変な計算をすかさずかけだが、この計算法をよく
 して（あかせると、何らかの関数が出てくるかも知れない）。

Seifert Matrix との関連, とはいえあまり詳しく
 になりが, とにかく knot, link の Alexander matrix
 とは, 何かないだろうか。そしてこれが少くともつかぬ
 た, $ch. index \geq 2$ の場合の計算もささまできるのである
)。

4. 予想達.

基本予想 S. KS はくずれた。一方 K , K_{dec} は
 いまづけるような data はかり出ている。これは,
 かなり成立している気配(などといってもおぼろげな)。
 とにかくも, S. KS がくずれた以上, 理論構成において
 修正を余儀なくされるところが多い。又, 基本予想が成立
 しないとしても, 成立する場所がかなり少なくなる
 (P の多さでいって), なにか手はあるかもしれない。
 $L(f)$ にかかわる予想も, どうなるだろうか。

5. non-simplex type.

non-simplex type に関する計算は, 現在の手法では,
 かなりめんどうくさい。又, Newton polygon では, operators
 の見当が全くつかない。Newton polyhedron を
 なんとか修正して, operators の見当をつけた方法がある
 だろうか? 計算を computer にさせるとしても, (K) , K_{dec}
 というように, いくつ output さすのは, program
 が至難なわけである。もう少し理論を作らねばならない。

6. non-isolated case

isolated の時, $\text{Hom}(M, B_{\text{pt}})$, $\mathbb{Q}^n \otimes M$ を用いたように,
 Ext , Tor もつかうことになるのだが, Tor の方が
 なくて, Ext で, cohomology との対応をつけた)と
 すると, うまくいかぬことがあるといふ。(柏原)
 としかくも, 理論を再検討する以上に, より実例に当たり
 調べてみる必要がある。singularity の色々の次元の
 stratum に起因する $b(i)$ と 統合的 $b(i)$ はどう
 関係しているか。--- としかくも, non-isolated case
 は, ずうずうしていることが多い。

7. reducible case.

せうに一般に, $\phi(x) = \phi_1(x) \cdots \phi_n(x)$ で表わさばどうなるか!
 prehomonogeneous の類推で $\phi_1, \dots, \phi_n$ を考えれば
 多少の理論はあるが, この多変数 b 函数については,
 実例にとぼしい。

S. I. Bernshtein の定理.

一般の多項式 f について, f^{λ} $\lambda \in \mathbb{C}$ を $\operatorname{Re} \lambda$ だけ大きく
 $\lambda \in \mathbb{C}$ の解析接続せよ, という I. M. Gel'fand の問題に対し
 2つの道がある. 一つは, 広井の resolution theorem を用い,
 x_1^{α} などに帰着せよというもの. もう一つは, M. Riesz の系譜
 というべき, $P(\lambda, x, D) f^{\lambda+1} = b(\lambda) f^{\lambda}$
 という P, b の存在を示し, $b(\lambda)$ が γ -factor であることも.
 我々は前者の道に傾いてもらった. この方向での初めの方
 の結果は, I. N. Bernshtein による, 次の定理であった. ([1])

Theorem. (g-h case) f : quasi-hom. poly. isolated sing.
 at 0 in $\mathbb{C}^n$. $\mathcal{O} = (f_1, \dots, f_n) \supset m^k$ とする. $\lambda, \mu = \dim \mathcal{O}/m^k$.
 $Xf = f$. 以下 vector field $X \rightarrow X$ とおく.
 このとき, $\exists B(t): \mathbb{C}$ -coeff. polynomial of degree $\mu \binom{n+k-1}{n}$
 s.t. $B(X) \in \mathcal{O} \otimes \mathcal{O}$ i.e. $B(X) = \sum J_i f_i$; $P(\lambda, D) = \sum J_i D_i$ とおくと,

$$P(\lambda, D) f^{\lambda+1} = (\lambda+1) B(\lambda) f^{\lambda}.$$

この場合, 証明の方法から, B の次数が評価される. 一般
 の f については [1] において,

Theorem (general case) f : polynomial.

$\Rightarrow \exists P(\lambda, x, D_x)$ λ について多項式で, x の多項式係数
 偏微分作用素を係数としていす. $\exists B(\lambda)$: non-zero
 polynomial s.t.

$$P(\lambda, x, D_x) f^{\lambda+1} = B(\lambda) f^{\lambda}.$$

う度。場合, 証明方法の性質上, P についてあまり情報は
ない。同様のことは $f: \text{hol.}$ としても成立する。こと,
Björk により示されているが, 方針は殆ど同じ。

尚, 同様の証明方針で, 次の定理も得る。

Theorem $f: \text{real coeff. positive polynomial.}$ ~~($\in \mathbb{C}$)~~
increases at infinity.

$\Phi(\lambda) = \int f^{-\lambda}(x) dx$ とおく, $\Phi(\lambda)$ は $\lambda \in \mathbb{C}$ に
meromorphic に extend でき, λ a rat. fun a_i をとて

$$\Phi(\lambda) = a_1(\lambda)\Phi(\lambda+1) + \dots + a_k(\lambda)\Phi(\lambda+k).$$

⇒

ここの $a_i(\lambda)$ にも意味があるが, 当面は考えない。

これの証明については原論文にあたっているが,
標数 0 の体 K , $R_N = K[x_1, \dots, x_N]$. $D_N = R_N$ 係数偏微分作用素
をなす ring. (たゞときには, D_N は Noetherian ring であり,

$$\text{gl. dim } D_N = N$$

であること本質的である。(標数 p では成立しない)。

local holomorphic fn 係数 diff. op. の ring $\mathcal{D}^f$ についても

$$\text{gl. dim } \mathcal{D}^f = N$$

これについては 柏原 を参照せよ。

漸近展開と多変数.

$\int \exp(\frac{1}{h}i\varphi) \varphi(x) dx$ $\varphi \in C_0^\infty$ $\text{supp } \varphi \geq 0$ の漸近展開は, 色々な分野において重要であるが, 我々の場合も又うである.

φ が 0 を non-degenerate critical pt. とするとき,

$$\int \exp(\frac{1}{h}i\varphi) \varphi(x) dx = O(h^{\frac{n}{2}})$$

はよくしっている. n は φ の $\frac{n}{2}$ は,

$$\Delta(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{s+1} = 4(s+1)(s+\frac{n}{2})(x_1^2 + \dots + x_n^2)^s$$

に於ける $s+\frac{n}{2}$ に表われていると見えるのである. V.I. Arnold

[は次々 = 2 を示した. (尚 Duistermaat を参照)

Theorem. f : weighted hom. $(r; r_1, \dots, r_n)$.

$$\int \exp(\frac{1}{h}i\varphi) \varphi(x) = O(h^{\alpha})_{(V_2)} \text{ が最良評価とすれば,}$$

$$\alpha = \sum \frac{r_i}{r} \text{ である.}$$

以下に, monodromy theory との関連などをまとめておく.
説明の部分では, わずかなしい定数などは省略する. 厳密な
処理 (monodromy の abelian integral による表現など) については
又, 稿を改めることとした.

次の積分が重要であり, 他は Mellin, Fourier 変換でつながっている.
 $df \wedge \omega = dx$. とし, (以下では f : real coeff. とする)

$$I(c) = \int_{f=c} \varphi(x) \omega = \langle \delta(f-c), \varphi \rangle.$$

Бер-Пер によれば 常に $I(c) = \sum c_i (\log c)^{k_i} c^{r_i} + \dots$

k_i : integers $0 \leq k_i \leq N-1$. $r_i \in \mathbb{Q}$ の形の漸近展開をもつ.

今後, 展開主項に $c^{\alpha-1} (\log c)^{\beta-1}$ とする項があるとする.

$$P(s+1, \lambda, D) f^{s+1} = L(s) f^s \text{ としよう.}$$

$$\langle f^s, \varphi \rangle = \int f^s \varphi dx = \int_0^\infty c^s I(c) dc \text{ と,}$$

$$\int c^{A+d-1} (\log c)^{\beta-1} dc \sim \frac{c^{A+d} (\log c)^{\beta-1}}{A+d} + \dots + \frac{c^{A+d}}{(A+d)^{\beta}}$$

とに注意して,

$$\langle Pf^{A+1}, \varphi \rangle = h(s) \langle f^A, \varphi \rangle = h(s) \int_0^\infty c^A I(c; \varphi) dc$$

$$\parallel \sim h(s) \left(\frac{c^{A+d}}{(A+d)^{\beta}} + \dots \right)$$

$$\langle f^{A+1}, p^* \varphi \rangle = \int_0^\infty c^{A+1} I(c; p^* \varphi) dc \sim \left(\frac{c^{A+d+1}}{(A+d+1)^{\beta}} + \dots + \frac{c^{A+d+1} (\log c)^{\beta-1}}{A+d+1} \right)$$

この両端を比較すれば, (二つ計算定数に正確ではない)

$$(A+d)^{\beta} \mid h(s) \quad \text{となすべきである}; \quad \text{これを}$$

Fourier 変換で stationary phase へうつす.

$$\text{さて, 今度は, } \int_0^\infty e^{izc} I(c) dc = \int e^{izf} \varphi dx \quad \text{であること,}$$

$$\int e^{izc} c^{A+1} (\log c)^{\beta-1} dc \sim c^{-\alpha} (\log c)^{\beta-1} \quad \text{に注意すると,}$$

$$\textcircled{a} \quad \int \exp\left(\frac{1}{h} i f\right) \varphi dx \sim h^{\alpha} (\log h)^{\beta-1} \Rightarrow (A+d)^{\beta} \mid h(s).$$

が おおよそ なることとされる (一応 monodromy theory では,

$$\textcircled{A}. \quad I(c) = \sum_{\alpha, p} c_{\alpha, p} c^{\alpha} (\log c)^{p} \quad (\alpha \in \mathbb{Q})$$

$$\Rightarrow 0 \leq p \leq n-1, \quad c_{\alpha, p} \neq 0 \Rightarrow \exp(2\pi i \alpha) \text{ は local monodromy の } p\text{-ple root. (nilpotent とき)}$$

が知られている. (より一般的な形にみくべきであるが).
これが, $h(s)$ の 最小多項式との関連を明らかにする一つの
根拠である.

$$\textcircled{B} \text{ Malgrange } \quad \text{は, } f = (x_1 \dots x_n)^2 + x_1^{2n+2} + \dots + x_n^{2n+2}$$

$$\omega = x_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \quad \text{とて}$$

$$\int_{f=c} \omega \sim C \sqrt{c} (\log c)^{n-1} \quad \text{より, この } f \text{ に代しては}$$

-1 が n 重根になっていることを示した. 我々の立場

かゝ考えたことは、 $h(\rho) = (\rho+1) \cdot (\rho+\frac{1}{2})^n \dots$ とするよりである。
これについては p. を参照せよ。

一般に $\int \exp(\frac{1}{h} i f) \varphi(x) dx = O(h^\alpha)$ とする最良評価の α は、
 $h(\rho)/(\rho+1)$ の絶対値最小の根になるとおもわれる。

Arnold は、 $\alpha = \frac{n}{2} - \beta \geq 0$ とき、 $\pm \beta = \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$ とすれば、
(一般に $N = n$, < 0 にもなりうるが) N が Coxeter number
といわれるものと関係していることを示している。尚 Saito
も参照。

Malgrange は 事において、 $C_{\alpha,p} = 0$ for $\alpha \leq 0$ を示した。
これについては Seminaire Leray の 18 講義を参照
せよ。

$\sigma(f) = \inf(\alpha \mid C_{\alpha,p} \neq 0 \exists p)$ は、 f の 0 での singularity を
ある意味で測っているが、たしかにもちになることは、

“ $\sigma(p)$ は deformation に関し 下向きで正しいか?”

$I(c)$ は、 f^0 の $\text{Per} + \text{etc}$ の 解析接続に当然関係している
わけだが、本連載を經由する直接のあつかいに関して

Per. - III. [] . N. H. Dep. [] などを参照せよ。

Quasi-homogeneous function について. 関連する問題

Def. f : hol. near 0. quasi-hom. とは, $f \in \mathcal{O}_1 \neq 0$.
 $\exists (\mathcal{Q} = (f_1, \dots, f_n) \quad f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{or } \exists X = \sum a_i(x) D_i$
 s.t. $Xf = f$.

Def. f : polynomial. weighted-hom $(r; r_1, \dots, r_n)$ とは,
 $f(t^{r_1}x_1, t^{r_2}x_2, \dots, t^{r_n}x_n) = t^r f(x)$ $\forall t. \quad r, r_i \in \mathbb{N}$.
 $a = 1, \quad (r, r_1, \dots, r_n) = 1$ として, weight と呼ぶ.
 $X = \sum \frac{r_i}{r} x_i D_i$ とすれば, $Xf = f$.

p. α が $\mathbb{Z}$ で $\alpha \in \mathbb{C}$ のとき, $\tilde{f}$ を swept f とは
 Prop. $\tilde{f} = \sum_{i=1}^n a_i m^{(i)} \quad (m^{(1)}, \dots, m^{(n)})$ が $n-1$ -simplex をなす
 $\Rightarrow f$: quasi-hom.

Theorem (Saito)

f : quasi-hom, isolated sing. $\Rightarrow$ 適当に座標変換して
 f は weighted-hom. polynomial に変換される.

上の Prop の場合では, weight は $(m^{(1)}, \dots, m^{(n)})$ の $n-1$ 次元
 hyperplane の方程式 $h(x) = 1 \quad \sum a_i x_i = 1$ を $t > 0$ とし,
 $X = \sum a_i x_i D_i$ として weighted-hom になる.

Theorem (Saito)

f : non-quasi-hom. $\Leftrightarrow h = \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \in \mathcal{O}_1 \neq 0$

もちろん f : non-quasi-hom のとき $f \notin \mathcal{O}_1$ であるが, 実際には
 判定するには, $\mathcal{O}_1 \neq 0$ に入ることを確かめる方がやりやすい.

non-quasi-hom でも, $f^2 \in \mathcal{O}_f + \mathcal{O}^2$ であらば, かりと quasi-hom に近しいとみてもよい. なる場合, 我々の立場からいう問題がたまる.

$$f \notin \mathcal{O}, f^2 + \sum a_i f_i + \sum a_{ij} f_i f_j = 0 \Rightarrow \sum a_{ij} f_{ij} \in \mathcal{O} + (f) \quad [?]$$

これに対し $\mathcal{O}: f = m$ の十分条件であることが知られていないが, 一般には証明されていない. 尚, 仮定を $af^2 + \dots$ とすれば, Malgrange の例は反例を与える. p. 参照. 反例があるかもしれないが, 微妙な問題である.

次の問題は, f がこの type でないことを判定する, より必要十分条件をみつけることである. この "よい" というのは, $f \notin \mathcal{O}$ より $f_i \in \mathcal{O} + (f)$ の方が "よい" という基準.

即ち $f^2 \notin \mathcal{O}_f + \mathcal{O}^2$] 条件を,
 また $f^2 + \sum a_i f_i + \sum a_{ij} f_i f_j = 0$ but $\sum a_{ij} f_{ij} \notin \mathcal{O} + (f)$] 何か, どこへ
 入るといふ形にたまたますることである. 場合によっては, 「また」以下なる形で条件がたまってしまう.

広中の定理に関連して.

— 加藤満生氏による注意 —

$f: \text{hd. near } 0. \quad \mathcal{O} = (f_{x_1}, \dots, f_{x_n})$ としたとき,

Theorem (Hironaka) $f: \text{integral} / \mathcal{O}.$

($f: \text{integral} / m\mathcal{O}$ L^2 -Ramanujan)

この定理, 代数の方では, 「 $\mathcal{O}$ と $\mathcal{O} + (f)$ の integral closure が一致する」 として処理されたため, $f^l \in \mathcal{O} f^{l-1} + \dots + \mathcal{O}^l$ とある初めの方 L i.e. $L(f)$ に興味をもつ我々に L として L である. $L(f)$ として, (f, s) に L^2 -Ramanujan にあてはまる.

$L(f)$ を同様に定義して $L(f)$ を explicit に評価する方法を加藤満生氏 (私と同様. 京大修士 2) がつくられたので, 予めを紹介させていただきたい. 色々お教えいただいた, 加藤氏に深く感謝いたします. (以下加藤氏よりいただいた原稿より)

Theorem (加藤) $f: \text{irr.} \quad \sqrt{\mathcal{O}} = m\mathcal{O}$ と仮定する.

$$F_1: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$$

$$x \mapsto (f(x), x_1 f_1(x), \dots, x_n f_n(x), x_1 f_2(x), \dots, x_n f_n(x))$$

$$V_1 = F_1(\mathbb{C}^n) \quad 0 \in \mathbb{C}^{n+1} \text{ 上の } n\text{-dim. irred. analytic set germ.}$$

$$\mu_1 = \mu((x_1 f_1, \dots, x_n f_1, \dots, x_n f_n) \mathcal{O}_n) = \mu(m\mathcal{O}) \text{ (ideal の multiplicity)}$$

$$\nu_1 = m(\mathcal{O}_{V_1, 0}) = \mu_1 / (\mathbb{C}^n \rightarrow V_1 \text{ の fibre の個数})$$

$$F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$$

$$x \mapsto (f(x), f_1(x), \dots, f_n(x)) \quad V = F(\mathbb{C}^n)$$

$$\mu = \mu(\mathcal{O}) \quad \nu = m(\mathcal{O}_{V, 0}) = \mu / (\mathbb{C}^n \rightarrow V \text{ の fibre の個数})$$

$$\frac{\dim \mathcal{O}/\mathcal{O}}{\dim \mathcal{O}/\mathcal{O}}$$

と仮定, γ のとき,

注 1) は i) の証明より出る.

注 2) は 2) の証明より出る.

f_j に対して d_j 次元部分 $g_j(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$

$$g_j(\xi_0, \dots, \xi_n) = \xi_0^{d_j} f_j(\xi_1/\xi_0, \dots, \xi_n/\xi_0) + \dots$$

f_j に関する 2 つの仮定より,

$$\sum_1^n |g_j(\xi)|^2 = 0 \Leftrightarrow \xi_1 = \dots = \xi_n = 0$$

従って, $\exists C, \alpha > 0 \quad \sum |g_j(\xi)|^2 \geq C(\sum_1^n |\xi_j|^2)^\alpha$ for $|\xi| \leq 2$

$$|x| \geq 1 \text{ の時, } |f_j(x)| = |x|^{d_j} |g_j(\frac{1}{|x|}, \frac{x_1}{|x|}, \dots, \frac{x_n}{|x|})|$$

$$\geq |x|^{d_j} |g_j(\dots)|$$

$$\sum |f_j(x)|^2 \geq |x|^{2d} \sum |g_j(\frac{1}{|x|}, \frac{x_1}{|x|}, \dots, \frac{x_n}{|x|})|^2$$

$$\geq C|x|^{2d}$$

従って, $y = (y_1, \dots, y_n)$ の逆像 $(x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)))$ の x

$$|x| \geq 1 \text{ の時, } |x| \leq (C^{-1} \sum |y_j|^2)^{1/2d} = C^{-1/2d} |y|^{1/d} = C_1 |y|^{1/d}$$

従って, $|f_j(y)|$ の order $(y \rightarrow \infty)$ は,

$|y|^{j/d}$ の order $(y \rightarrow \infty)$ より $(v = \deg f \geq 0, f_j(y)$ は $\{f(x)\}$ の $\deg f = v$ の j -次対称式 T_j の f_j).

また, $\cap \{f_j \text{ の最高次項} \} = \{0\}$ が成り立つ, 上の

Kojasiewicz の定理 α が d より小に 2 ならば OK だが, これは一般に無理な期待とともたれる.

(以上 書き終ったのは, 大抵一巻仕.)

大変急いで書いた.

$$\exists a_j(z_1, \dots, z_n) \in m^j(\mathcal{O}_n) \quad 1 \leq j \leq \nu_1$$

$$\exists b_j(z_1, \dots, z_n) \in m^{j+1}(\mathcal{O}_n) \quad 1 \leq j \leq \nu$$

$$\text{a.t.} \quad f^{\nu_1} + a_1(x_1 f_1, \dots, x_n f_n) f^{\nu_1-1} + \dots + a_{\nu_1}(x_1 f_1, \dots, x_n f_n) f = 0 \\ - f^{\nu} + b_1(f_1, \dots, f_n) f^{\nu} + \dots + b_{\nu}(f_1, \dots, f_n) = 0.$$

$$\equiv \pm 1) \quad \{x_1 f_1 = x_2 f_2 = x_3 f_3 = \dots = x_n f_n = 0\} \ni 0 \text{ locally isolated}$$

$\neq \emptyset$, (e.g. f quasi-hom)

$$F_2: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$$

$$x \mapsto (f, x_1 f_1, \dots, x_n f_n) \quad V_2 = F_2(\mathbb{C}^n)$$

$$\mu_2 = \mu((x_1 f_1, x_2 f_2, \dots, x_n f_n) \mathcal{O}_n)$$

$$\nu_2 = m(\mathcal{O}_{V_2, 0}) = \mu_2 / (\mathbb{C}^n \rightarrow V_2 \text{ fibre } \rightarrow \text{image}) \quad \text{cf. ?}$$

$$\exists c_j(w_1, \dots, w_n) \in m^j(\mathcal{O}_n) \quad 1 \leq j \leq \nu_2$$

$$f^{\nu_2} + c_1(x_1 f_1, \dots, x_n f_n) f^{\nu_2-1} + \dots + c_{\nu_2}(x_1 f_1, \dots, x_n f_n) = 0.$$

(f quasi-hom $\neq \emptyset$ $\nu_2 = 1$)

$$\equiv \pm 2) \quad f: \text{polynomial} \quad \deg f = \nu$$

$$\{f_1 = f_2 = \dots = f_n = 0\} = \{0\} \quad \text{globally}$$

$$\bigcap_{j=1}^n (f_j \text{ の最高次 } n \text{ 変数部分 (} n \deg f_j \text{ 変数) の } \neq \emptyset \text{ の部分}) = \{0\} \quad \text{globally}$$

$$d = \inf d_j$$

$$\Rightarrow \text{上の } f_j(y) \text{ に対して } \deg \leq \delta \nu / d \text{ の多項式に与えられる}$$

(証明) $\Rightarrow$ 定理により, symbol の段階で, $\geq$ の程度まで必要かといふことは, ほぼ $\geq$ 人とおいておける。強力な定理である。Macaulay $\text{level}(R, m)$ $\text{Ultraprimary} \Rightarrow \mu(m) = d/m$.

$$\text{example. } f = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3}: f = \frac{1}{2} x f_1 + \frac{1}{3} y f_2, f^2 - (f_1^2 f + \frac{1}{4} f_1^4 + \frac{1}{4} f_2^3) = 0$$

$$f = \frac{1}{3}(x^3 + y^3): f = \frac{1}{3}(x f_1 + y f_2), f^4 - \frac{2}{9}(f_1^3 + f_2^3) f^2 + \frac{1}{9}(f_1^3 - f_2^3)^2 = 0.$$

5. $3T_{8;2}$ の $\mathcal{O}/u$, $\mathcal{O}/u+(f)$ の代表元.

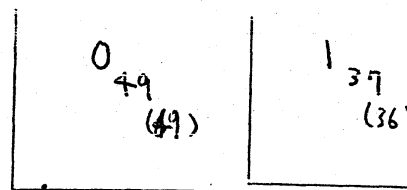
$3T_{8;2}$ $\frac{1}{8}(x^8+y^8+z^8) - \frac{1}{2}(xyz)^2$ について,
 $\mathcal{O}/u+(f)$, $\mathcal{O}/u$ の代表元 γ と γ' を示す.

$$\dim \mathcal{O}/u = 215. \quad \dim \mathcal{O}/u+(f) = 179. \quad \begin{matrix} u \geq m^{17} \\ u+(f) \geq m^{13} \end{matrix}$$

$\mathcal{O}/u+(f)$ については, 2通り示しておく. 表2のとり方の方が, $b(s)$ の計算にはよい.

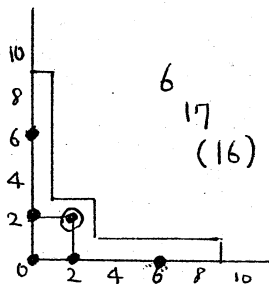
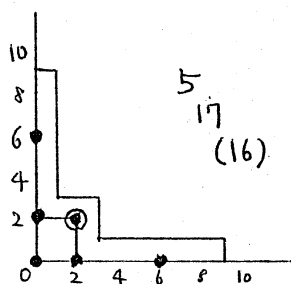
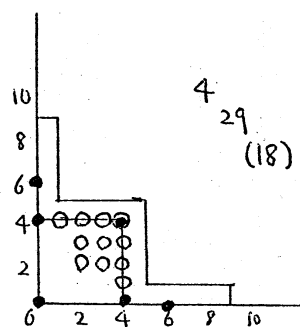
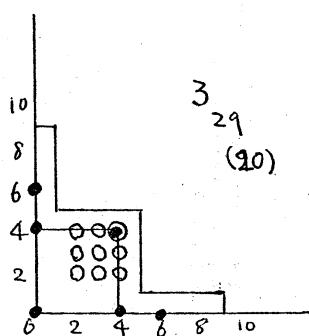
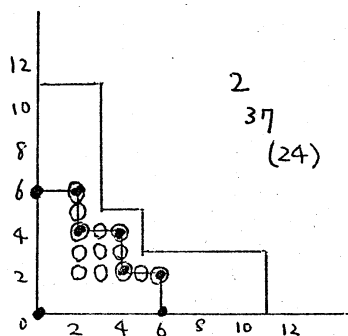
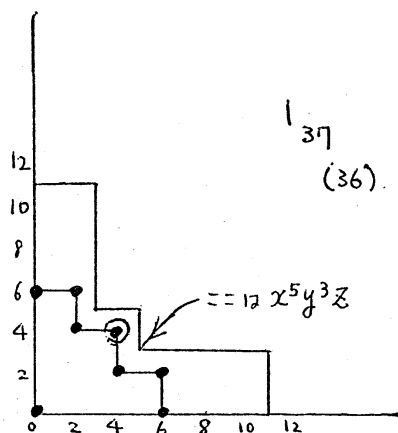
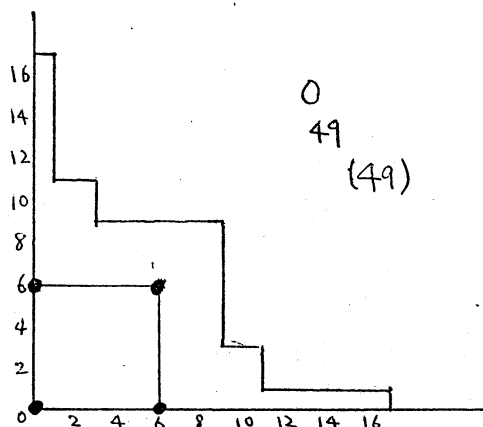
表の見方. 黒丸 $\bullet$ を順次たすんでできた図形の周上と内部の格子点が, $\mathcal{O}/u$ 或 $\mathcal{O}/u+(f)$ の代表元を与える. 座標軸上に黒丸がある場合, 注意すること.

$x^k y^l z^m$ の, m を一定にして切った k - l 平面を示してある.



右のは γ の γ' の
 $m=0$ で, γ の代表元が
 49 である.
 $m=1$ の代表元が
 37 であることを見る.

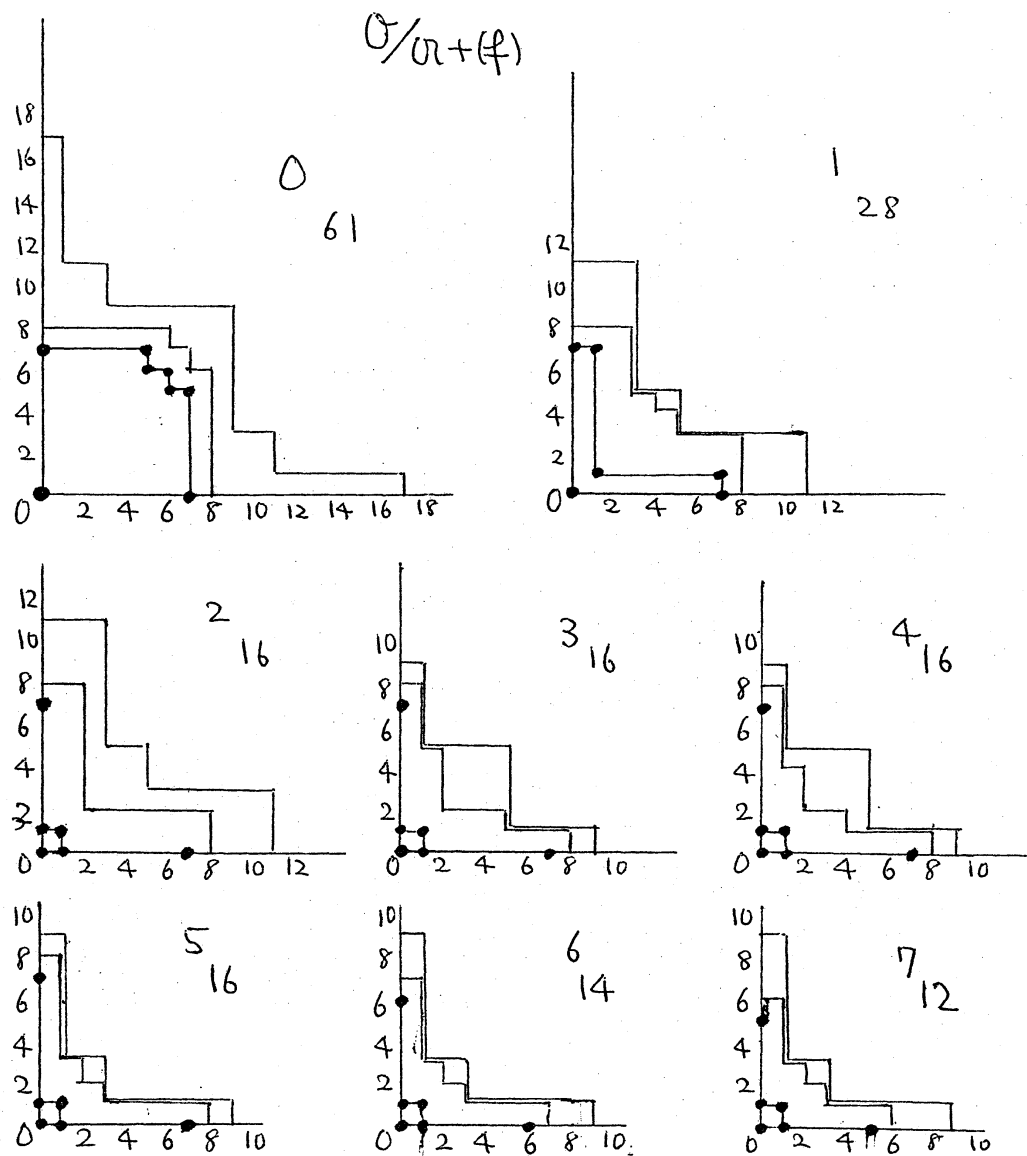
表1の場合, (2b) と $\mathcal{O}/u+(f)$ の代表元数.
 $ideal$ に属する monomial の見方も同様.
像方上も 含めて, 外側が γ の $ideal$ に入る.

$\mathcal{O}/\mathcal{O} \text{ \& } (\mathcal{O}/\mathcal{O}+(\pm))$


外かくより外が $\mathcal{O}$ の元となるもの。

○をつけたものは, $\mathcal{O}/\mathcal{O}+(\pm)$ の代表としては失格。

表 1.



外から外が σ に入り, 中間の σ から外が $\sigma + (f)$ に入る. $\sigma/\sigma + (f)$ の代表としては, σ と $\sigma + (f)$ の方がよい. 0 の代表元の右上隅のデコボコが, 予想 S, KS の反例の根拠となった.

表 2

References.

1. A'Campo, N., Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes., Invent. Math. 20, 1973, 147-169.
2. " , On monodromy maps of hypersurface singularities, preprint.
3. " , La fonction zêta d'une monodromie. preprint.
4. Arnold, V. I., Integrals of rapidly oscillating functions and singularities of the projections of Lagrange manifolds, Funct. Anal. and its Appl., Vol 6, No. 3, 1972, 61-62.
5. " , Normal forms of functions with simple critical points, the Weyl groups A_n, D_n, E_n and Lagrange manifolds, F.A.A. 6, 4, 1972, 3-25.
6. " , Classification of functions with unimodular critical points, F.A.A. 7, 3, 1973, 75-76
($\exists 3$ $\times$ " $\times$ $\times$ 2. $\times$ 31 L. M 17 K $\wedge$.)
7. " , Remarks on the method of stationary phase and Coxeter numbers, Russ. Math. Surv. 28, 5, 1972, 17-44. ($N_{15} \rightarrow x^2 y^2$ or $x^3 y^2$ or 3")

8. I. N. Bernshtein; The possibility of analytic continuation of f^λ for certain polynomials f , F.A.A. 2, 1, 1968, 92-93.
9. " , Modules over a ring of differential operators. Study of fundamental solutions of equations with constant coefficients, F.A.A. 5, 2, 1971, 1-16.
10. " , The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter, F.A.A. 6, 4, 1972, 26-40.
11. " - S. I. Gel'fand, Meromorphy of the function P^λ , F.A.A. 3, 1, 1969, 84-86.
12. Duistermaat J. J., Oscillatory Integrals, Lagrange Immersions, and Unfolding of Singularities, preprint, Courant Institute, 1973.
13. Fox, R., Free Differential calculus II. isomorphism problem, Ann. of. Math. 59, 1954, 196-210.
14. " , Free Differential calculus V
The Alexander polynomial Reexamined, Ann of Math. 71, 1960, 187-196.
15. " , A. quick trip through knot theory, in Topology of 3-manifold and related topics

Prentice-Hall, 1962, 120-167.

16. Fox, R.H. - Crowell, R.H., 結び目理論入門, 岩波, 1967.

17. Grima, M.-Cl., in preparation.

18. 広中平祐: 京都大学に於ける代数幾何学講義, 197

19. 堀川: Desingularization of cusps. (informal print).

20. 柏原正樹: f -函数と超曲面の特異性, to appear
in Proc. of Symp. of f -fn at RIMS. (三輪哲二記)

21. Malgrange, B; Letter to Editors, Inv. Math. 20,
1973, 171-172.

22. " , Monochromie et développements asymptotiques,
to appear in Sem. Leray.

23. Mather, J.N; On Right Equivalence; preprint.

24. Milnor, J, Singular points of complex hypersurfaces,
Ann. of Math. Studies 61, Princeton, 1968.

25. Nagata M, Local Rings, Interscience.

26. 佐野幹夫, f -函数の母関数と計算の多量, unofficial
prints.

27. Saito, K, Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen, Inv. Math. 14, 1971, 123-142.
28. " , Einfach elliptische Singularitäten, preprint, Göttingen, 1973.
29. Siersma D, The singularities of C^∞ -functions of right codimension ≤ 8 , Indag. Math. 35, 1973, 31-37.
30. Thom, R, Stabilité Structurelle et Morphogénèse, Benjamin, 1972. (並 $w_i = 0$ の 手 数 重 数 等 々 に よ り 決 る)
31. Tougeron J. Cl, Idéaux de Fonctions Differentiables, Eng. der Math. 71, Springer, 1972.

11.5 J.E. Björk : Dimensions over Algebras of Differential Operators, preprint.