

On Heegaard diagrams of S^3

筑波大 数学系 金戸 武司

0. 序

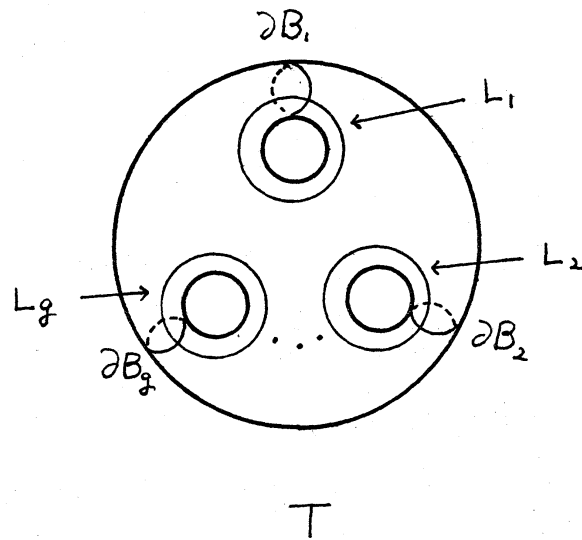
二つの話題について述べる。最初に, S^3 の Heegaard diagram による基本群の表示に関する一つの reduction theorem を一般の種数について示し, これを種数2の場合に適用して, relators の相互代入による表示の簡略化の可能性 (c.f. [3], [4], [5]) についての現状を報告する。

次に, 相互代入は代数的 (or homotopy 的な) 性質であるが, 直接, diagram を幾何的に簡略化する手法として, wave ([10], [1]) or cut-vertex in [11]) の概念がある。両者の関係について, 種数3以上では互に独立であることを例によって示す。

1. A reduction theorem

M を向き付け可能な 3 次元閉多様体, T を種数 g の

solid torus, ∂T をその境界とする。 T の標準的な longitudinal system 及び meridian system を, それぞれ, $A = \{L_1, \dots, L_g\}$, $B = \{\partial B_1, \dots, \partial B_g\}$ とする。(下図参考)



$D = (\partial T; C_1, C_2)$ を M (を表わす一つ) の Heegaard diagram (正確な定義は [1] 参照) とする。 C_2 の各 loop に沿って C_1 の各 loop との交わりを順に読み取って得られる $\pi_1(M)$ の表示を $\pi_1(D) = \langle a_1, \dots, a_g; r_1, \dots, r_g \rangle$ とする。各 relator r_i は文字 $a_1^{\pm}, \dots, a_g^{\pm}$ による word である。 r_i の cyclically reduced form を $\tilde{r}_i$ とする。(i.e. $\tilde{r}_i$ はどんな cyclic permutation を施しても $a_i a_i^{-1}$ のような

部分も含まない。) $\pi_1(D)$ の *cyclically reduced form*, i.e. $\langle a_1, \dots, a_g; \hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_g \rangle$ を $\hat{\pi}_1(D)$ と書くことにする。

定理1. S^3 の任意の Heegaard diagram $D = (\partial T; C_1, C_2)$ に対し, S^3 の Heegaard diagram D_0 で次を満たすものが存在する:

- (1) $D_0 = (\partial T; \phi, \psi \circ \tau \circ \phi) \equiv (\partial T; \tau \circ \alpha, \phi)$, $\equiv$ は同値の意), ニニに ψ は S^3 の標準的な Heegaard sewing, i.e. ∂T 上の向きを保つ homeomorphism で $\psi(\partial B_i) = L_i$, 又, τ は T 上の向きを保つ homeomorphism.
- (2) $\hat{\pi}_1(D_0) \equiv \hat{\pi}_1(D)$, ニニに, $\equiv$ は relations の cyclic permutation 及び inversion による違いを除いて等しいの意。

注。一般に S^3 の Heegaard diagram D は同値な diagram $\psi D = (\partial T; \psi C_1, \psi C_2)$ (ψ は ∂T 上の向きを保つ homeomorphism) で $\psi D = (\partial T; \phi, \psi \circ \tau \circ \phi) \dots \textcircled{1}$ (τ, ψ は T 上の向きを保つ homeomorphism) の中

に出来る (Waldhausen)。定理1の主張は「cyclically reduced presentation $\tilde{\pi}_1(D)$ を考える上では, ①において, 更に, $g=1$ として良い」ということである。

定理の証明のため, 命題を一つ用意する。

命題. D を Heegaard diagram $(\partial T; \mathcal{C}, \mathcal{C})$ とし, cyclically reduced presentation $\tilde{\pi}_1(D) = \langle a_1, \dots, a_g; \tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_g \rangle$ の各 relator $\tilde{r}_i$ を表わす word を $W_i(a_1, \dots, a_g)$ とする。このとき, 任意の向きを保つ homeomorphism $g: T \rightarrow T$ によって得られる Heegaard diagram $D_1 = (\partial T; \mathcal{C}, g\mathcal{C})$ に対し, その cyclically reduced presentation $\tilde{\pi}_1(D_1)$ は $\langle a_1, \dots, a_g; \tilde{r}'_1, \dots, \tilde{r}'_g \rangle$ (ここに, $\tilde{r}'_i = W_i(g\#(a_1), \dots, g\#(a_g))$), 但し, $g\#$ は $\pi_1(T) = \langle a_1, \dots, a_g \rangle$ 上の induced isomorphism) で与えられる。

証明. $\tilde{\pi}_1(D_1)$ の定義より, 直接, 導かれる (c.f. [3], [4])。

定理1の証明.

注より, $D = (\partial T; \mathcal{C}, g \circ f \circ \mathcal{C})$ としてよい。

Suzuki [9] により, g は S -generators (i.e. $\{p^\pm, \omega_1^\pm, \rho_{12}^\pm, \tau_1^\pm, \theta_{12}^\pm, \varepsilon_{12}^\pm\}$ cf. [9]) の積 $g_n \cdots g_1$ と isotopic. cyclically reduced presentation は isotopy invariant だから,

$$\widehat{\pi}_1(D) \equiv \widehat{\pi}_1(\partial T; \emptyset, g_n \cdots g_1, \varphi_0 \circ \emptyset)$$

ここで, $\tau_1^\pm \# = 1$, $\varepsilon_{12}^\pm \# = 1$ に注意すれば, 前命題より, $g_n, \dots, g_1$ には $\tau_1^\pm, \varepsilon_{12}^\pm$ は含まれていないとしてよい。i.e. $g_n, \dots, g_1 \in \{p^\pm, \omega_1^\pm, \rho_{12}^\pm, \theta_{12}^\pm\}$ 従って, $\varphi_0^{-1} g_n \cdots g_1 \varphi_0 : \partial T \rightarrow \partial T$ は T 上の向きを保つ homeomorphism $g' : T \rightarrow T$ に拡張できる。なぜなら, 各 $\varphi_0^{-1} g_i \varphi_0$ が拡張可能だから。(より幾何的には, T が S^3 に標準的に埋め込まれているとすると, g_i は S^3 上の homeomorphism に拡張できることに 대응する。) よって,

$$\begin{aligned} g_n \cdots g_1 \varphi_0 \circ f &= \varphi_0 (\varphi_0^{-1} g_n \cdots g_1 \varphi_0) \circ f \\ &= \varphi_0 g' \circ f \end{aligned}$$

となり, $h = g' \circ f$ をうる。

参考。定理1は[5]の最後で, 「問題2から問題1はそう遠くないように思われる」と述べたことが正しいことを意味している。

2. S^3 の種数 2 の Heegaard diagrams の応用

定義. words W_1, W_1', W_2 が $W_1 = W_1' W_2$ を満たすとき, $\{W_1, W_2\}$ は 代入 により $\{W_1', W_2\}$ に変形できるといい, $\{W_1, W_2\} \xrightarrow{S} \{W_1', W_2\}$ と書く.

次の問題 (cf. [4], [5]) を考える.

問題. S^3 の任意の種数 2 の Heegaard diagram D による cyclically reduced presentation $\tilde{\pi}_1(D) = \langle a_1, a_2; \tilde{r}_1, \tilde{r}_2 \rangle = \langle a_1, a_2; W_1, W_2 \rangle$ (すなわち, $\{\tilde{r}_1, \tilde{r}_2\} = \{W_1, W_2\}$) に対し, 代入 $\{W_1, W_2\} \xrightarrow{S} \{W_1', W_2\}$ で次を満たすものが存在するか?

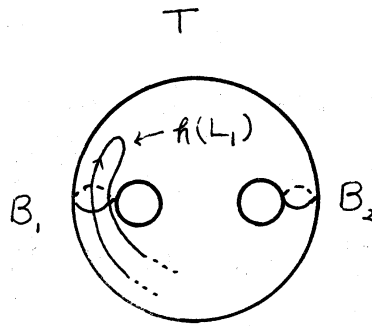
(*) $\left\{ \begin{array}{l} \{W_1', W_2\} \text{ の cyclically reduced form } \\ \{\tilde{W}_1', W_2\} \text{ は ある } S^3 \text{ の Heegaard diagram } D_1 \text{ の cyclically reduced presentation } \tilde{\pi}_1(D_1) = \langle a_1, a_2; \tilde{r}_1', \tilde{r}_2' \rangle \text{ の} \\ \text{set of relations } \{\tilde{r}_1', \tilde{r}_2'\} \text{ に対応する。} \end{array} \right.$

注. 肯定的な解決は「 S^3 の種数 2 の Heegaard diagram による基本群の表示は, cyclic reduction

, cyclic permutation, inversion 及び代入の繰り返しにより, trivial presentation $\langle a_1, a_2; a_1, a_2 \rangle$ に変換できる。」(Cf. [4]) を含む。

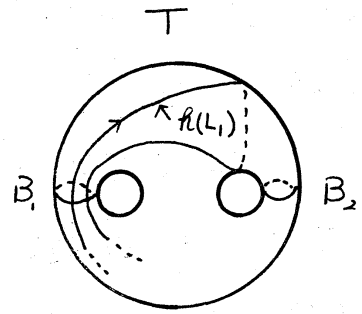
以下, この問題に対する現状を述べる。

定理1より, 一般の場合 $(\partial T; \phi, \phi \circ \phi)$ が特別の場合 $(\partial T; \alpha\alpha, \phi) (= D \text{ とおく。})$ に帰着された。これは, 更に, loop $\alpha(L_i)$ ($i=1, 2$) に沿って, B_1, B_2 との交わりを読んで得られる word $W(\alpha(L_i)) = W_i(\alpha_1, \alpha_2)$ ($W_i(\alpha_1, \alpha_2)$ は文字 $\alpha_1^{\pm}, \alpha_2^{\pm}$ による word。i.e. $\pi_1(D)$ をうるとき ϕ の各 loop に沿って読むのと区別して, $\alpha(\phi)$ の各 loop に沿って読む場合, 文字 $\alpha_1^{\pm}, \alpha_2^{\pm}$ に代えて, 文字 $\alpha_1^{\pm}, \alpha_2^{\pm}$ を用いることにする。) の様子によって, 次の二つの場合に分けられる。まず, $W(\alpha(L_i))$ には isotopy で除ける annihilation part ($\alpha_i \alpha_i^{-1}$ の $\alpha_i^{-1} \alpha_i$, 及び cyclic sense で $\alpha_i \cdots \alpha_i^{-1}, \alpha_i^{-1} \cdots \alpha_i$, Cf. 下図) は含まないものとする。(isotopy による変形は cyclically reduced presentation $\pi_1(D)$ に影響を与えない。)



isotopy で除ける annihilation
part σ, σ_1' を含む

(この場合ははじめから除外する)



isotopy では除けない
annihilation part
 σ, σ_1' を含む

(この場合は起り得る)

Case 1. $W(h(L_1)), W(h(L_2))$ はどちらも
annihilation part (cyclic sense で) を持た
ない, i.e. cyclically reduced である。

Case 2. $W(h(L_1)), W(h(L_2))$ は少なくとも
一方が cyclically reduced でない。

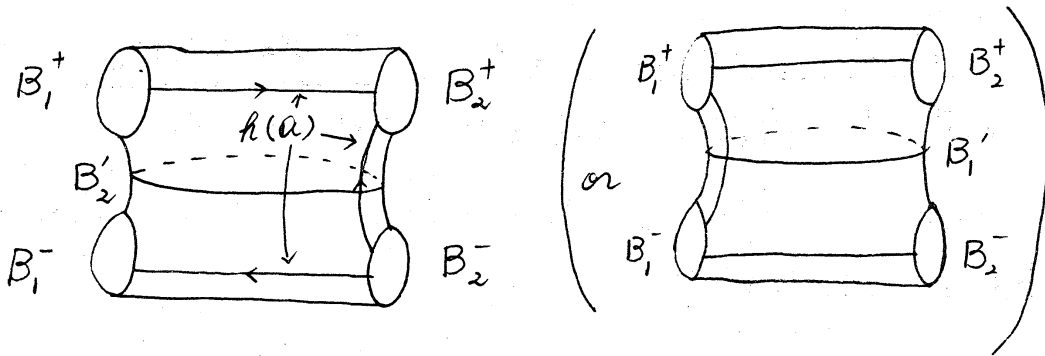
Case 1. について, 問題は肯定的に解決される。

実際, [5]' により, $\{W(h(L_1)), W(h(L_2))\}$ の
cyclically reduced form は cyclic permutation
と inversion の ~~組み合わせ~~ を除いて,

$$\{a_1 a_2^{\alpha_1} \dots a_1 a_2^{\alpha_k}, a_1 a_2^{\beta_1} \dots a_1 a_2^{\beta_{k'}}\}$$

(又は, $\{a_1^{\alpha_1} a_2 \dots a_1^{\alpha_k} a_2, a_1^{\beta_1} a_2 \dots a_1^{\beta_k} a_2\}$)

(ここに, すべての指数 $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k$ は 0 ではなく, 同附号をもつ。) と表わされる。今, $W(\mathcal{A}(L_1)), W(\mathcal{A}(L_2))$ はともに *cyclically reduced* であり, ∂T を ∂ で切り開いて得られる *cut diagram* $(\partial T - \partial, \mathcal{A}(\partial) - \partial)$ は up to homeomorphism で, 下図の type となり, しかも, $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1,$



(ここに, 図上の arc は一般には *parallel* な複数の arcs を表わしてゐる。

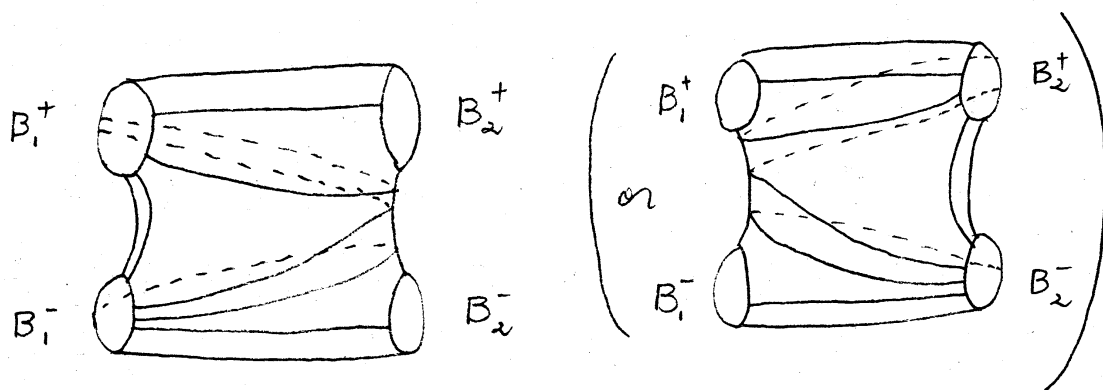
$\dots, \beta_k$ が同附号をもつことから, 図上の *parallel arcs* は同じ向きをもつ。従つて, $\pi_1(D) = \langle a_1, a_2; \tilde{r}_1, \tilde{r}_2 \rangle$ において, $\partial B_1, \partial B_2$ に沿つた $h(a)$ との交わりの読み r_1, r_2 はそれぞれ *cyclically reduced* i.e. $\tilde{r}_1 = r_1, \tilde{r}_2 = r_2$ で, 図より明らかに, r_1 は r_2 に (或, r_2 は r_1 に) 代入でき, 更に代入により縮小された word は図中に示めされた

, 新たな meridian curve $\partial B_2'$ (or $\partial B_1'$) に沿った読みで得られるから, $D_1 = (\partial T; \mathcal{A}(\mathcal{Q}), \{B_1, B_2'\})$ (or $= (\partial T; \mathcal{A}(\mathcal{Q}), \{B_1', B_2\})$) が求める Heegaard diagram である。(D_1 も又, Case 1 であることに注意すれば, Case 1 では, 代入の繰り返しで, trivial presentation $\langle a_1, a_2; a_1, a_2 \rangle$ に変換できることがわかる。)

Case 2. 現在のところ, 不明である。

以下, その困難さの所在について触れておこう。

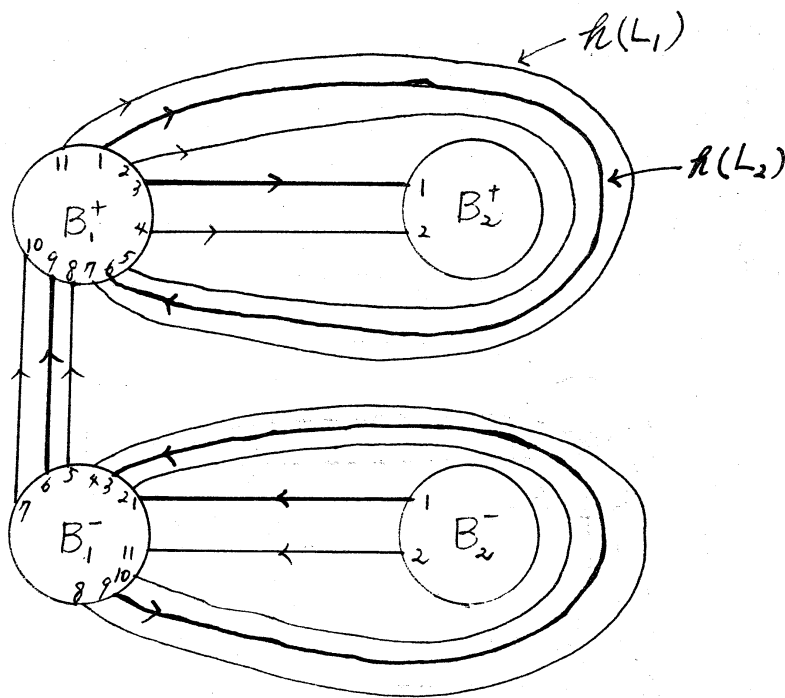
Case 1 と同様に, $\partial B_1, \partial B_2$ による cut diagram を示せば, 次の形である。



この場合の本質的な困難は Case 1 と違って, parallel arcs が異なる向きをもち得ることにある。従って, $\partial B_1, \partial B_2$ に沿った読み r_1, r_2 は一般には, cyclically

reduced ではなく, それ故, cut diagram
 から r_2 が r_1 (or r_1 が r_2) に代入可能は言えるが,
 cyclically reduced form $\hat{r}_1, \hat{r}_2$ につい
 ては不明である。実際, 次の例は「 r_2 は r_1 に
 代入可能であるが, $\hat{r}_2$ は $\hat{r}_1$ に代入不能」である。
 (しかし, $\hat{r}_1$ は $\hat{r}_2$ に代入可能で, 問題の反例で
 はない。)

例. 1. (S^3 について)



$$D = (\partial T; h(a), \phi)$$

$$\pi_1(D) = \langle a_1, a_2; r_1, r_2 \rangle$$

$$r_1 = a_2 a_1 \underline{a_2 a_1} a_1^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1} a_1^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1} a_1,$$

$$r_2 = a_2 a_1,$$

$$\tilde{r}_1 = a_1^{-1}, \quad \tilde{r}_2 = r_2 = a_2 a_1,$$

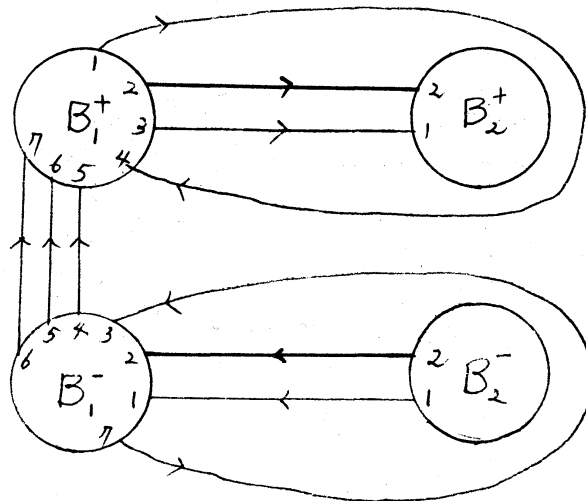
cut diagram から, 明らかに, r_2 は r_1 に代入でき,

$$\{r_1, r_2\} \xrightarrow{S} \{a_2 a_1, a_1^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1} a_1^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1} a_1, a_2 a_1\}$$

であるが, $\tilde{r}_2$ は $\tilde{r}_1$ に subword として含まれないので代入できない。

参考. S^3 の Heegaard diagram に限らなければ, complete words r_1, r_2 としてのみ代入可能で, cyclically reduced words $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2$ としては相互代入が不可能な例がある。(次の例2.)

例2. (Lens space $L(3,1)$ について)



$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$r_1 = \underline{a_1 a_2} a_1 a_1^{-1}, \quad r_2 = a_1 a_2, \quad \tilde{r}_1 = a_1^{-2} a_2, \quad \tilde{r}_2 = a_1 a_2$$

cut diagram から, r_2 は r_1 に代入でき,

$$\{r_1, r_2\} \xrightarrow{S} \{a, a^{-4}, a, a_2\}$$

であるが, $\{r_1, r_2\}$ は相互代入不可。

3. wave と相互代入の独立性

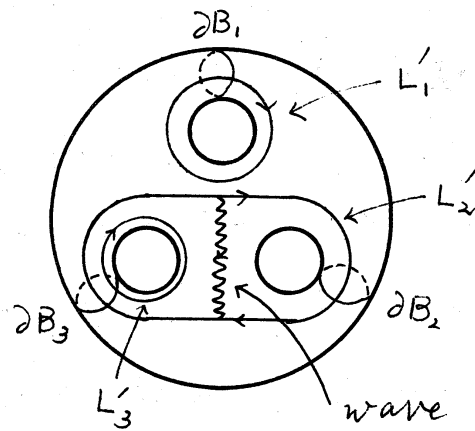
幾何的に Heegaard diagram の交点数を減らすような meridian curve の取り直しの簡単な方法として, 「Wave」 (cf. [10] [1] or Whitehead graph における cut vertex [11]) の概念がある。 S^3 の種数 2 の Heegaard diagrams については, 交点数が 3 以上のとき, 常に wave が存在する ([2]) が, 種数 3 以上のときは, 種数を越える交点数をもつ diagram で wave が存在しない例 ([12], [6], [8], [4]) が知られている。面白いことに, これらの例 ([4] を除く) はすべて, その cyclically reduced presentation の relations において相互代入が不能な例にもなっている。そこで, 「wave がなければ, relations の相互代入は不能か」という自然な問題が生じた。より一般に, 幾何的な概念, wave と代数的な概念, 相互代入の間の関係が問われた。これにつ

て, 次を得た。

定理 2. S^3 の種数 3 以上の Heegaard diagrams において, 二つの概念 wave と相互代入は独立である。

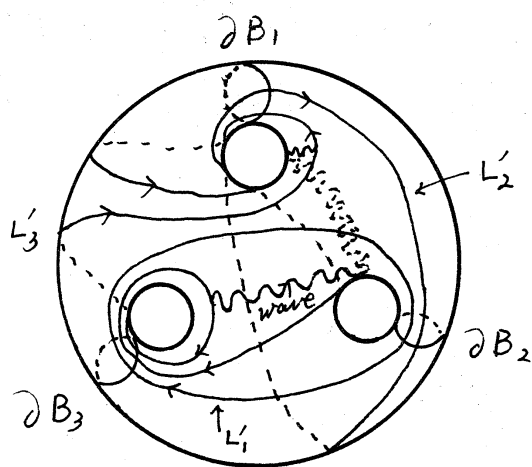
証明. 以下の種数 3 の例によって示めされる。
種数 4 以上については種数 1 の自明な diagram  を connected sumすればよい。

例 3. wave が存在しかつ代入可能な例。



$$r_1 = a_1, \quad r_2 = a_2, \quad r_3 = \underline{a_2} a_3, \quad r_2 \text{ は } r_3 \text{ に代入可.}$$

例 4. wave は存在するが代入不能な例。



∂B_i に沿った読み:

$$r_1 = a_2 a_3^{-1} (= \hat{r}_1)$$

$$r_2 = a_2 a_1 (= \hat{r}_2)$$

$$r_3 = a_1 a_3^2 (= \hat{r}_3)$$

L'_i に沿った読み:

$$r'_1 = a_2 a_3 (= \hat{r}'_1)$$

$$r'_2 = a_1 a_2 (= \hat{r}'_2)$$

$$r'_3 = a_3^2 a_1^{-1} (= \hat{r}'_3)$$

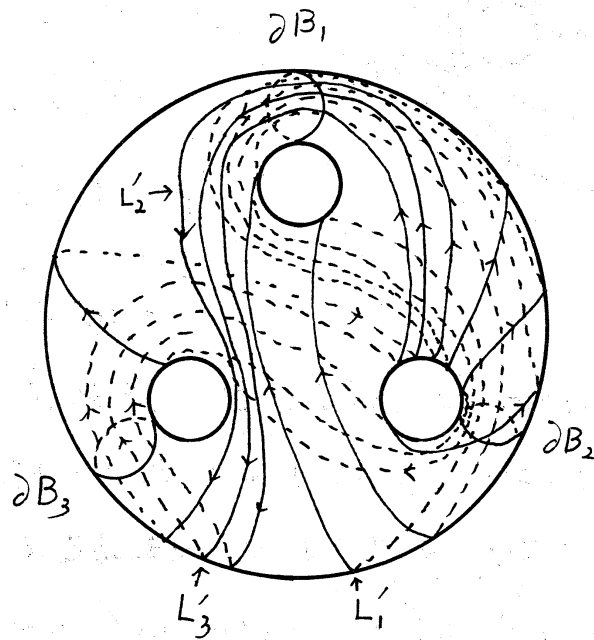
注。この diagram は $(\partial T; \phi, \eta, \alpha) (= (\partial T; \phi, \eta, \eta_0 \phi))$ に二に, η は T 上の向きを保つ homeomorphism) の type であり, 種数 2 ではこの type による cyclically reduced presentation は, 常に代入可能 ([5]) であることと比較すると, 一層, 興味深い例である。

例 5. wave は存在しないが代入可能な例。 ([4] の Example 3)

∂B_i に沿った読み: $r_1 = a_3^{-1} a_2^{-1} a_1 a_3^{-1} a_2^{-3} (= \hat{r}_1)$
 $r_2 = a_3^{-1} a_2^{-1} a_3 a_1^2 (= \hat{r}_2)$, $r_3 = a_3 a_2^2 (= \hat{r}_3)$
 r_3 に inversion と cyclic permutation を施す

ば, $a_3^{-1} a_2^{-2}$ となり, r_1 に代入可能。

L'_1 に沿った読み: $r'_1 = a_1 a_2^2 (= \widehat{r}_1)$, $r'_2 = a_3 a_1^{-1} a_3 a_2^{-1} a_1^{-3} (= \widehat{r}_2)$, $r'_3 = a_3 a_2^{-1} a_1^{-1} a_2 a_1^{-1} (= \widehat{r}_3)$.
これらは相互代入不可。



例. 6. wave は存在せず, ∂ に代入不能な例.
[12], [7] (以上, 種数3), [8] (種数4) の例が この例 にも なっ て い る。

参考文献

- [1]. J. S. Birman, Heegaard splittings, Diagrams and Sewings for closed

orientable 3-manifolds, lecture notes for CBMS conference at Oct. 8~12, 1977.

- [2] T. Homma, M. Ochiai and M. Takahashi;
An algorithm for recognizing S^3 in
3-manifold with Heegaard splittings of
genus two, (to appear)
- [3] T. Kaneto, S^3 の Heegaard 分解 1- $\mathbb{Z}_3$
 π_1 の表示について, 数理研講究録 297
(1977), 69-84.
- [4] ———, On presentations of the
fundamental group of the 3-sphere
associated with Heegaard diagrams,
J. Math. Soc. Japan (To appear)
- [5] ———, S^3 の 種数 2 の Heegaard
diagrams に対する基本群の表示について,
数理研講究録, 369 (1979), 144-163
- [5]' ———, a characterization of
the special loops on a genus 2 solid
torus, preprint.
- [6] O. Morikawa, Poincaré 予想 1- $\mathbb{Z}_3$

computer 実験 (反例を求めて), 数理
研講究金録 346 (1979), 29-58

- [7] _____, A counterexample to a conjecture of Whitehead, Math. Sem. Notes Kobe Univ, (to appear)
- [8] M. Ochiai, A counterexample to a conjecture of Whitehead and Volodin-Kuznetsov-Fomenko, J. Math. Soc. Japan, vol 31 (1979), 687-691
- [9] S. Suzuki, On homeomorphisms of a 3-dimensional handlebody, Can. J. Math. 29 (1977), 111-124
- [10] J. A. Volodin, V. E. Kuznetsov and A. T. Fomenko, The problem of discriminating algorithmically the standard three-dimensional sphere, Russian Math. Surveys, 29:5 (1974), 71-172
- [11] J. H. C. Whitehead, On certain sets of elements in a free group, London Math. Soc (2) 41 (1936), 48-56
- [12] O. Ja. Viro and Kobel'skiĭ, V. L., The

Volodin - Kuznetsov - Fomenko conjecture on Heegaard diagrams is false
, *Uspehi Mat. Nauk* 32 (1977) no.5
(1977), 175 - 176