

Hardy 関数の高階導関数について

名古屋大学多元数理科学研究科 松岡 謙晶

Kaneaki Matsuoka

Graduate School of Mathematics,

Nagoya University

1 Riemann ゼータ関数と Hardy 関数

$s = \sigma + it$ を複素数, $h(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$, $\theta(t) = \arg h(1/2 + it)$, $\zeta(s)$ を Riemann ゼータ関数とする。関数 $Z(t)$ を

$$Z(t) = \zeta(1/2 + it)e^{i\theta(t)}$$

と定義する。Riemann ゼータ関数の関数等式

$$h(s)\zeta(s) = h(1-s)\zeta(1-s)$$

から $Z(t)$ は実関数であることが分かる。また、 $Z(t)$ の零点は $\sigma = 1/2$ 軸上の Riemann ゼータ関数の零点に 1 対 1 に対応することや $|Z(t)| = |\zeta(1/2 + it)|$ であることが簡単に分かる。このように関数 $Z(t)$ は Riemann ゼータ関数の $\sigma = 1/2$ 軸の情報を多く含む実関数であり Riemann ゼータ関数の $\sigma = 1/2$ 軸の解析において非常に重要な関数である。Riemann ゼータ関数の情報を含み $\sigma = 1/2$ 軸で実数をとる関数として

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}h(s)\zeta(s)$$

もよく知られている。関数等式から

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

であり、位数 1 の整関数であることもよく知られている。1914 年 Hardy [5] により関数 $\xi(s)$ を使い $\sigma = 1/2$ 軸に無限に零点が存在することが示された。Hardy は

$$\int_0^\infty \frac{\xi(\frac{1}{2} + it)}{t^2 + \frac{1}{4}} t^{2n} \cosh \frac{1}{4} \pi t dt = \frac{(-1)^n \pi}{2^{2n}} \cos \frac{\pi}{8}$$

を示し、この式において n を十分大きくとれば $\sigma = 1/2$ 軸に無限に零点が存在することが証明される。Hardy の証明は Riemann ゼータ関数の $\sigma = 1/2$ 軸上の零点

の情報を含む $\xi(1/2 + it)$ という実関数の積分値を考察することにより得られたのであるが、同じように $\int Z(t)dt$, $\int |Z(t)|dt$ という $Z(t)$ の積分値を考察することでも得られることが知られている（詳しくは Titchmarsh [12] の 10 章参照）。零点の数値計算においても $Z(t)$ は非常に重要である。もし $Z(t)$ がある場所で符号変化していることが分かればその場所で少なくとも 1 つ Riemann ゼータ関数の零点が存在することになる。また関数 $\xi(s)$ の偏角を調べることにより領域の零点の個数が分かるので、これらを使い Riemann ゼータ関数の零点が $\sigma = 1/2$ 軸に分布していることを数値的に確かめることが出来る。値が小さいところでは Euler-Maclaurin の和公式で十分であるが値が大きくなるにつれ計算が困難になってくる。1932 年 Siegel [11] により Riemann の遺稿をもとに Riemann-Siegel 公式と呼ばれる公式が示された。この公式は臨界領域の Riemann ゼータ関数をよく近似する公式で特に $\zeta(1/2 + it)$ や $Z(t)$ の場合が重要である。これにより数値計算において飛躍的な向上をもたらし、 $\zeta(1/2 + it)$ の平均値などにも応用されるなど $\sigma = 1/2$ 軸の解析において非常に重要な式である。このように初めて $\sigma = 1/2$ 軸上に零点が無限にあると証明した Hardy と $Z(t)$ の精密な公式である Riemann-Siegel 公式の名前をとり関数 $Z(t)$ は Hardy 関数や Riemann-Siegel 関数と呼ばれている。Siegel [11] は Riemann-Siegel 公式の応用として $N_0(T) > 3e^{-3/2}T/8\pi + o(T)$ を示したが 1942 年 Selberg [10] によりある定数 $A > 0$ が存在して $N_0(T) > AT \log T$ が示された。また現在では H. Bui, B. Conrey and M. Young [2] により

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{N_0(T)}{N(T)} \geq 0.4105$$

であることが示されている。数値計算では Gourdon [4] により実軸に近い方から数えて 10 兆個までの零点が全て $\sigma = 1/2$ 軸にあることが確かめられている。

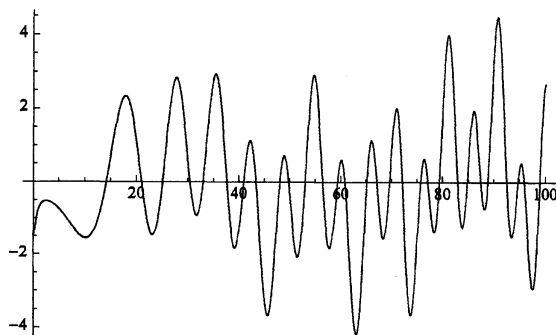


図 1: $Z(t)$ のグラフ。 $0 < t < 100$

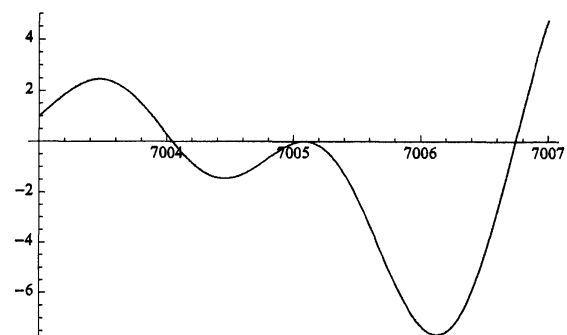


図 2: $Z(t)$ のグラフ。 $7003 < t < 7007$

Hardy 関数の性質として Riemann 予想を仮定すると $t_0 > 0$ が存在して $t > t_0$ ならば $Z(t)$ の連続する零点の間にただひとつ $Z'(t)$ の零点が存在するということが知られている。つまり Riemann 予想を仮定すると $t > t_0$ では負の極大値や正の極小値を持たないのである。この結果から分かるように Riemann 予想は $Z(t)$ のグラ

フの形に大きく影響していることが分かる。図1は $Z(t)$ の $t=0$ から $t=100$ までのグラフである。図1を見ると規則正しいグラフにも見えるが、図2の $t=7003$ から $t=7007$ までのグラフを見ると $t=7005$ 付近にある連続する零点が非常に接近していることが分かる。数値計算をすると零点は $t=7005.06$ と $t=7005.10$ 付近にあり極値はおよそ 0.004 である。このようなことは $t=7005$ 付近以外の箇所でも起こることが知られていて Lehmer 現象と呼ばれる。Lehmer 現象という名前は Lehmer [6], [7] により初めて考察されたことによる。もし $t > t_0$ で負の極大値や正の極小値が発見できれば Riemann 予想が反証されるわけだがそのような例は見つかっていない。しかし、Lehmer 現象が起こる箇所での符号変化が非常に微妙であり $Z(t)$ の挙動の難しさや Riemann 予想の難しさを物語っている1つの現象ともいえる (Edwards [3] の8章参照)。

2 Hardy 関数の高階導関数の挙動

これまで $Z(t)$ の挙動について考えてきたが $Z(t)$ の一階導関数 $Z'(t)$ や一般の高階導関数 $Z^{(n)}(t)$ の挙動を考える。図3は $Z'(t)$ の $t=0$ から $t=100$ までのグラフで、図4は $Z''(t)$ の $t=0$ から $t=100$ までのグラフである。この二つのグラフを見ると $Z'(t)$ および $Z''(t)$ についても $Z(t)$ と同様に負の極大値や正の極小値を持つことが無いということが期待され一般に全ての $Z^{(n)}(t)$ についても同様のことが考えられる。

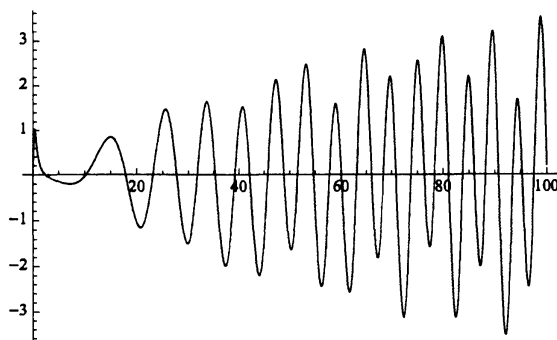


図 3: $Z'(t)$ のグラフ。 $0 < t < 100$

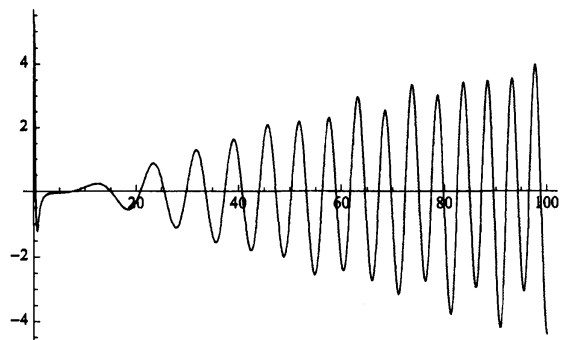


図 4: $Z''(t)$ のグラフ。 $0 < t < 100$

さて $Z(t)$ の連続する零点の間にただひとつ $Z'(t)$ の零点が存在することを示すためには次の Mozer [9] の公式を用いる。Mozer の公式とは Riemann 予想を仮定すると

$$\frac{d}{dt} \frac{Z'(t)}{Z(t)} = - \sum_{\gamma} \frac{1}{(t - \gamma)^2} + O(t^{-1})$$

が成り立つという公式である (Mozer [9])。ここで γ は $\sigma = 1/2$ 軸にある Riemann ゼータ関数の零点 $1/2 + i\gamma$ を動くものとする。この公式と Riemann ゼータ関数の

零点の個数の式を用いると $Z(t)$ の連続する零点の間で関数 $Z'(t)/Z(t)$ は単調減少であることを示すことが出来るので $Z(t)$ の連続する零点の間にただひとつ $Z'(t)$ の零点が存在することが導かれる。1986年 Anderson [1] により Riemann 予想を仮定すると $t_1 > 0$ が存在して $t > t_1$ ならば $Z'(t)$ の連続する零点の間にただひとつ $Z''(t)$ の零点が存在することが示された。これは Riemann 予想を仮定すると $Z(t)$ と同様のことが $Z'(t)$ でも成り立つことを意味する。 $Z(t)$ の高階導関数 $Z^{(m)}(t)$ については Matsumoto and Tanigawa [8] により $0 < t < T$ を満たす $Z^{(m)}(t)$ の零点の個数を $N_m(T)$ とおくと Riemann 予想を仮定すれば

$$N_m(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

であることが示されている。ここで O 定数は m に依存する。この結果と Riemann ゼータ関数の零点の個数の評価から容易に

$$N_{m+1}(T) - N_m(T) = O(\log T)$$

が全ての m で成り立つことが分かるので、 $Z^{(m)}(t)$ の連続する零点の間にただひとつ $Z^{(m+1)}(t)$ の零点が存在するという命題は Riemann 予想を仮定すれば全ての m についてほとんどの場合正しいことが分かる。ここで言う「ほとんどの場合」とは $N_m(T)$ の零点のうち $O(\log T)$ を除いた場合という意味である。

次の定理は Mozer の公式の一般化である。

Theorem 2.1.

$$\omega(s) = \log 2\pi + \frac{\pi}{2} \tan\left(\frac{\pi s}{2}\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s)$$

とする。 $f_0(s) = \zeta(s)$ とし $f_n(s)$ を $f_{n+1}(s) = f'_n(s) - \omega(s)f_n(s)/2$ と帰納的に定義する。Riemann 予想を仮定すると

$$\frac{d}{dt} \frac{Z^{(n+1)}(t)}{Z^{(n)}(t)} = - \sum_{\gamma_n} \frac{1}{(t - \gamma_n)^2} + O(t^{-1})$$

が成り立つ。ここで γ_n は $f_n(s)$ の $\sigma = 1/2$ 軸上の零点 $1/2 + i\gamma_n$ を全て動くものとし、 O 定数は n に依存する。

Anderson [1] は定理を示す為に

$$\eta(s) = \zeta(s) - \frac{2}{\omega(s)} \zeta'(s)$$

という関数を定義し考察している。また Matsumoto and Tanigawa [8] は Anderson [1] を一般化し $\eta_n(s)$ という関数を定義し考察している。ここで $\eta_1(s) = \eta(s)$ が成り立つ。この関数を上の $f_n(s)$ で表すと

$$f_n(s) = -\frac{\omega(s)}{2} \eta_n(s)$$

と書ける。 $\eta_n(s)$ の零点については Matsumoto and Tanigawa [8] により考察されているのでその結果と上の定理を用いると十分大きな t に対して

$$\frac{d}{dt} \frac{Z^{(n+1)}(t)}{Z^{(n)}(t)} < 0$$

が成り立つ。したがって例えば次のことが分かる。

Corollary 2.2. *Riemann* 予想を仮定すると全ての非負整数 n に対して $t_n > 0$ が存在して $t > t_n$ ならば $Z^{(n)}(t)$ の連続する零点の間にただひとつ $Z^{(n+1)}(t)$ の零点が存在する。

Corollary 2.3. *Riemann* 予想を仮定し、さらに $Z(t)$ の零点は全て 1 位であると仮定する。全ての非負整数 n に対して $t_n > 0$ が存在して $t > t_n$ ならば $Z^{(n)}(t)$ の零点は全て 1 位である。

これらの結果を見ると *Riemann* 予想や零点の重複度に関する予想などを仮定すると Hardy 関数のいくつかの性質はその高階導関数にも遺伝することが言える。定理の証明のために補助的に関数 $h_n(s)$, $g_n(s)$ を導入する。 $h_0(s) = 1$ とし $h_n(s)$ を $h_{n+1}(s) = h'_n(s) - \omega(s)h_n(s)/2$ と帰納的に定義する。また $g_n(s) = f_n(s)/h_n(s)$ とする。

$$f_n(s) = \sum_{k=0}^n a_{n,k}(s) \zeta^{(k)}(s)$$

により $a_{n,k}(s)$ を $\omega(s)$ および $\omega(s)$ の高階導関数による多項式と定義すると容易に分かるように $h_n(s) = a_{n,0}(s)$ が成り立つので

$$g_n(s) = \zeta(s) + \sum_{k=1}^n \frac{a_{n,k}(s)}{h_n(s)} \zeta^{(k)}(s)$$

となる。ここで $g_1(s) = \eta(s)$ が成り立つ。まず定理を証明する為に基本的な次の 2 つの補題を示す。

Lemma 2.4.

$$Z^{(n)}(t) = i^n f_n\left(\frac{1}{2} + it\right) e^{i\theta(t)}$$

が成り立つ。

Proof. $n = 0$ は $Z(t)$ の定義である。 n で成り立つと仮定すると

$$Z^{(n+1)}(t) = \left(i^{n+1} f'_n\left(\frac{1}{2} + it\right) + i^{n+1} \theta'(t) f_n\left(\frac{1}{2} + it\right) \right) e^{i\theta(t)}$$

であり

$$\omega(1/2 + it) = -2\theta'(t)$$

であることから $n+1$ でも成り立つ。 □

Lemma 2.5.

$$\chi(s)f_n(1-s) = (-1)^n f_n(s)$$

が成り立つ。ただし

$$\chi(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{s\pi}{2} \Gamma(1-s)$$

である。

Proof. $n = 0$ は Riemann ゼータ関数の関数等式である。 n で成り立つと仮定すると定義から

$$\begin{aligned} \chi(s)f_{n+1}(1-s) &= i\chi(s)f'_n(1-s) - \frac{i}{2}\omega(1-s)\chi(s)f_n(1-s) \\ &= i(\chi'(s)f_n(1-s) + (-1)^{n+1}f'_n(s)) + \frac{i}{2}\omega(s)f_n(s)(-1)^{n+1} \\ &= i((-1)^n\omega(s)f_n(s) + (-1)^{n+1}f'_n(s)) + \frac{i}{2}\omega(s)f_n(s)(-1)^{n+1} \\ &= (-1)^{n+1}f_{n+1}(s) \end{aligned}$$

となるので $n+1$ でも成り立つ。 □

ここで

$$\omega(s) = \omega(1-s) \tag{2.1}$$

であるから $h_1(s) = h_1(1-s)$ であるので

$$g_1(s) = -\chi(s)g_1(1-s)$$

が成り立つ。これは Anderson [1] が示している式で、この $g_1(s)$ の関数等式が Anderson [1] の定理を証明する際に非常に重要である。一方、 $h_2(s)$ について考えると

$$h_2(s) = \frac{\omega^2(s)}{4} - \frac{\omega'(s)}{2}$$

であるが、これは $h_1(s)$ の場合と違い $h_2(s)$ と $h_2(1-s)$ で簡単な等式が成り立つことは期待できない。したがって一般に $n \geq 2$ とするとき $g_n(s)$ が関数等式を満たすとは必ずしも言えない。これは $g_n(s)$ を解析する上で大きな問題であり、Anderson [1] の証明と同じように出来ない箇所がいくつかあるが $h_n(s)$ と $h_n(1-s)$ は解析的な性質が非常に似ていて解析がうまくいくのである。 $m = m(n)$ を n に依存する十分大きい正の整数とし $\delta = \delta(m)$ を m に依存する十分小さい正の数とする。 $s = 1, 3, 5, \dots$ および $s = 0, -2, -4, \dots$ を中心とする半径 δ の円を集めた領域を D_1 とし $\mathbb{C} - D_1 = D$ とおく。定義から

$$\omega(s) = \log 2\pi + \frac{\pi}{2} \tan\left(\frac{\pi s}{2}\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s)$$

である。また

$$\log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \log s - s + \log 2\pi + \frac{1}{12s} - \int_0^\infty \frac{P(x)}{(s+x)^3} dx$$

が知られている。ここで $P(x)$ はある周期的な関数である。したがって

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) = \log |s| + O(1) \quad (\sigma > 1/4)$$

および

$$\frac{d^n}{ds^n} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) = O(|s|^{-n}) \quad (n \geq 1, \sigma > 1/4)$$

を得る。また $s \in D$ において

$$\tan s = i + O(e^{-2t})$$

および

$$\frac{d^n}{ds^n} \tan s = O(e^{-2t}) \quad (n \geq 1)$$

であることと (2.1) を用いると $s \in D$ において

$$\omega(s) = -\log |s| + O(1) \quad (2.2)$$

および

$$\omega^{(n)}(s) = O(1) \quad (n \geq 1) \quad (2.3)$$

となる。したがって (2.2), (2.3) より $s \in D$ において

$$a_{n,k}(s) = O((\log |s|)^{n-1}) \quad (k \neq 0, n \geq 1) \quad (2.4)$$

および

$$h_n(s) = a_{n,0}(s) = \left(\frac{\log |s|}{2}\right)^n + O((\log |s|)^{n-1}) \quad (n \geq 1) \quad (2.5)$$

を得る。また、

$$\zeta(s) = 1 + O(2^{-\sigma}) \quad (\sigma > 2)$$

および

$$\zeta^{(n)}(s) = O(2^{-\sigma}) \quad (n \geq 1, \sigma > 2)$$

と (2.4), (2.5) から $\sigma > 2$ かつ $s \in D$ において

$$\begin{aligned} f_n(s) &= \left(\left(\frac{\log |s|}{2} \right)^n + O((\log |s|)^{n-1}) \right) (1 + O(2^{-\sigma})) + \sum_{k=1}^n O\left(\frac{(\log |s|)^{n-1}}{2^\sigma} \right) \\ &= (1 + O(2^{-\sigma})) \left(\frac{\log |s|}{2} \right)^n + O((\log |s|)^{n-1}) \quad (n \geq 1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

を得る。Matsumoto and Tanigawa [8] により $\eta_n(s)$ の $-2m+1 < \sigma < 2m$ における零点の個数は

$$\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

であり Riemann 予想を仮定すると零点は有限個を除いて全て $\sigma = 1/2$ 軸にあるということが示されている。また (2.6) などを用いれば偏角の原理より $g_n(s)$ の零点と極の位置が分かる。 $g_n(s)$ に Titchmarsh [12] の 3 章にある LEMMA α を用いると $1-2m \leq \sigma \leq 2m$ において

$$\frac{g'_n}{g_n}(\sigma + iT_j) = O(\log^2 T_j)$$

が成り立つような $T_j \rightarrow \infty (j \rightarrow \infty)$ となる $\{T_j\}$ が存在することがわかる。 $k \geq m$ とし、 R_k を $1-2k \pm iT_j, 2k \pm iT_j$ を頂点とする長方形として

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_k} \frac{G'_n(w)}{G_n(w)} \frac{s}{w(s-w)} dw$$

とおく。複素変数の Stirling の公式

$$\log \Gamma(s) = \frac{\log 2\pi}{2} + \left(s - \frac{1}{2}\right) \log s - s + O(|s|^{-1})$$

および Lemma 2.5 と (2.1) から

$$I = O(kT_j^{-2} \log^2(k + T_j)) + O(k^{-1} \log k) \quad (2.7)$$

となる。ここで O 定数は s に依存する。この式と I を留数定理を用いて表した式

$$I = -\frac{G'_n(s)}{G_n(s)} - \frac{1}{s} + A + \sum_r \frac{s}{a_r(s-a_r)} - \sum_r \frac{s}{b_r(s-b_r)} \quad (2.8)$$

を用いる。ここで A は定数であり a_r, b_r はそれぞれ $g_n(s)$ の零点、0 以外の極を全て動くものとする。(2.7), (2.8) と $g_n(s)$ の零点および極の分布から Riemann 予想を仮定すると

$$i \frac{d}{dt} \frac{G'_n}{G_n} \left(\frac{1}{2} + it \right) = O(|t|^{-1}) - \sum_{\gamma_n} \frac{1}{(t - \gamma_n)^2}$$

が成り立つことが分かる。最後に $h_n(s)$ を複素変数の Stirling の公式などを用いて評価すれば Lemma 2.4 より Mozer の公式の一般化を得る。

3 関数 $f_n(s)$ および $g_n(s)$ について

定理の証明で重要であったのは $g_n(s)$ の関数の性質であった。定義から分かるように $g_n(s)$ は $f_n(s)$ と $h_n(s)$ で構成されているわけであるが $h_n(s)$ は基本的にガ

ンマ関数と三角関数で構成されているので Stirling の公式などを用いれば解析的な挙動などがある程度精密に評価できる。一方 $f_n(s)$ は Riemann ゼータ関数やその導関数が含まれているので解析が難しい部分がある。つまり Riemann ゼータ関数の臨界領域の挙動の解析が難しいのと同様に $f_n(s)$ についても挙動の解析が難しいということである。 $g_n(s)$ の零点と極について考えてみると $g_1(s) = \eta(s)$ の場合は Anderson [1] により実数ではない極は 2 つあり $\sigma = 1/2$ 軸に存在することが示されている。また Riemann 予想を仮定すると実数ではない零点は全て $\sigma = 1/2$ 軸に存在することも示されている。一方 $n \geq 2$ の場合は十分大きい m としたとき $\{s \in \mathbb{C} \mid -2m+1 < \sigma < 2m\}$ において $g_n(s)$ の極は有限個である。さらに Riemann 予想を仮定すると有限個の零点を除いて $g_n(s)$ の零点は全て $\sigma = 1/2$ 軸に存在する。 $g_n(s)$ の極は $h_n(s)$ の零点なのである程度解析が出来るが $g_n(s)$ の零点の解析は簡単ではない。しかし、この零点を解析することは Hardy 関数の高階導関数を考える上で非常に重要である。例えば定理の系における t_n を評価しようとしたとき $g_n(s)$ の零点の位置が分からないために数値的に評価できないという問題が出てくる。

参考文献

- [1] R. J. Anderson, On the function $Z(t)$ associated with the Riemann zeta-function, J. Math. Anal. Appl. **118** (1986), 323-340.
- [2] H. Bui, B. Conrey and M. Young, More than 41% of the zeros of the zeta function are on the critical line, Acta Arith. **150** (2011), no. 1, 35-64.
- [3] H. Edwards, Riemann's Zeta Function, Academic Press, New York, 1974.
- [4] X. Gourdon, The 10^{13} first zeros of the Riemann zeta function, and zeros computation at very large height, available at <http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeros1e13-1e24.pdf>, October 2004.
- [5] G. H. Hardy, Sur les Zéros de la Fonction $\zeta(s)$ de Riemann, C. R. Acad. Sci. Paris **158** (1914), 1012-1014.
- [6] D. H. Lehmer, On the roots of the Riemann zeta function, Acta Math. **95** (1956), 291-298.
- [7] D. H. Lehmer, Extended computation of the Riemann zeta-function, Mathematika **3** (1956), 102-108.
- [8] K. Matsumoto and Y. Tanigawa, On the zeros of higher derivatives of Hardy's Z-function, J. Number Theory **75** (1999), 262-278.

- [9] J. Mozer, Certain properties of the Riemann zeta function on the critical line, *Acta Arith.* **26** (1974/75), 33-39. (Russian)
- [10] A. Selberg, On the zeros of Riemann's zeta-function, *Skr. Norske Vid.-Akad. Oslo*, No. **10** (1942), 1-59.
- [11] C. L. Siegel, Über Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie, *Quellen und Studien zur Geschichte der Math. Astr. und Physik, Abt. B: Studien*, **2** (1932), 45-80.
- [12] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford: Clarendon Press. 2nd. ed. revised by D. R. Heath-Brown, 1986.