

Gelfand 変換による可換 Banach 環の分類

山形大・工 高橋眞映 (Sin-Ei Takahasi)

Department of Basic Technology, Applied Mathematics and Physics,
Yamagata University Yonezawa 992-8510, Japan

これは井上純治先生との可換 Banach 環に関する
共同研究を survey したものである。

1. 精 神

人間がものを理解する上で重要な手法の一つに分類があり,そしてそれを応用することで,更に理解が深まると考えられる。

さて分類の方法の一つに,ある条件を設定し,それらを満たすクラスを考えることによって分類するという方法がある。このときその分類が意味のあるものかどうかは,勿論その設定された条件の良否に依存する。本研究の理念と目的は,可換 Banach 環を自然な条件を設定することによって分類し,具体的な環がどのクラスに属するか,また同じクラスに属する環はどんな不変の性質を共有するのかを調査し,更にその応用を考察することにより,可換 Banach 環の本質を探ろうとするところにある。

2. Gelfand 表現定理と自然な問題

複素可換 Banach 環 A が与えられたとき, A の任意の元は Gelfand 空間と呼ばれる局所コンパクト Hausdorff 空間 Φ_A 上の無限遠点で消える複素数値連続関数として表現される。これが良く知られた I. M. Gelfand の表現定理であるが,ここに A の Gelfand 変換像 $\hat{A}$ を何かの性質で特徴付けられるかという自然な問題が起こる。この問題と対になって考えられるのが, A の乗作用素環 $M(A)$ の Gelfand-Helgason-Wang 変換像 $\hat{M}(A)$ の特徴付け問題である。この2つの問題は密接な関係を持っていることが予想される。

3. 「街」へ出てみる

抽象的な問題を考察するとき,人は何か image 化を計る癖がある。そのため人は「街」に出て良い具体例を探す。

後者の問題では良く知られた Bochner-Eberlein の定理がその良い例であり,これを可換 Banach 環の世界に焼き直すと,自然に BE-環と呼ばれる1つの Banach 環のクラスが定義される。これは

「良い定理はそれ自体定義となり得る」

という信念に基づいたものであり, BE-環を研究することは取りも直さず,後者の問題解決につながる。BE-環の研究はそれほど進んでいる訳ではないが,重要な Banach 環が BE-環であったり,また他の重要な Banach 環で BE-環でないものが見つかっている。これは「BE」と言うメガネをかけて見る世界がそれほど変なものでないことを物語っている。

前者の問題については,やはり「街」にでてみると,1967年,その翌年と相次いで発見された R. Doss による絶対連続測度の Fourier 変換の特徴付け定理が待っていた。それは次のような定理である。

Theorem A ([1]). A continuous function σ on $\hat{G}$ is the Fourier-Stieltjes transform of an absolutely continuous measure if and only if, whatever be $\varepsilon > 0$, there is a compact set K and a $\delta > 0$ such that, for any polynomial $p = \sum c_i(-x, \gamma_i)$, the relations

$$\|p\|_{\infty} \leq 1, \int_K |p(x)| dx < \delta \Rightarrow \left| \sum c_i \sigma(\gamma_i) \right| < \varepsilon.$$

Theorem B ([2]). A continuous function σ on $\hat{G}$ is the Fourier-Stieltjes transform of an absolutely continuous measure if and only if,

(i) there is a constant M such that for any polynomial $p = \sum c_i(-x, \gamma_i)$, the relation $\|p\|_{\infty} \leq 1 \Rightarrow \left| \sum c_i \sigma(\gamma_i) \right| < M$.

(ii) whatever be $\varepsilon > 0$, there is a compact set K in $\hat{G}$ such that, for every polynomial $p = \sum c_i(-x, \gamma_i)$, $\gamma_i \notin K$ the relation $\|p\|_{\infty} \leq 1 \Rightarrow \left| \sum c_i \sigma(\gamma_i) \right| < \varepsilon$.

これらの定理は一言で言えば、絶対連続測度の Fourier 変換は、無限遠点での振る舞いをうまく規制することによって特徴付けることができるというものである。

4. もっと R. Doss の定理を理解しよう!

先ず Theorem A について考察する。 $P(G)$ を G 上の三角多項式全体の作る線形空間とし、

$$Q_{D_1} = \left\{ \{p \in P(G) : \|p\|_{\infty} \leq 1, \int_K |p(x)| dx < \delta\} \right\}_{\substack{\delta > 0 \\ K \in K(G)}}$$

とすると、 Q_{D_1} は $P(G)$ の原点での近傍のような族を作る。このとき Theorem A は「 $\hat{G}$ 上の連続関数 σ が絶対連続測度の Fourier 変換となるための必要十分条件は $P(G)$ 上の線形汎関数 $\tilde{\sigma} : p \rightarrow \sum c_i \sigma(\gamma_i)$ が族 Q_{D_1} に関して連続となることである」解釈できる。

次に Theorem B について考察する。いま

$$Q_{D_2-(i)} = \left\{ \{p \in P(G) : \|p\|_{\infty} \leq \delta\} \right\}_{\delta > 0},$$

$$Q_{D_2-(iii)} = \left\{ \{p = \sum c_i(-x, \gamma_i) : \|p\|_{\infty} \leq 1, \forall \gamma_i \notin K\} \right\}_{K \in K(\hat{G})}$$

とする。但し $\hat{G}$ が compact のときは、 $Q_{D_2-(iii)}$ は原点からなる 1 点集合を含むものとする。このとき、Theorem B は「 $\hat{G}$ 上の連続関数 σ が絶対連続測度の Fourier 変換となるための必要十分条件は $P(G)$ 上の線形汎関数 $\tilde{\sigma} : p \rightarrow \sum c_i \sigma(\gamma_i)$ が 2 つの族 $Q_{D_2-(i)}$, $Q_{D_2-(iii)}$ に関してそれぞれ連続となることである」と解釈できる。また $\hat{G}$ が compact のときは、 $Q_{D_2-(iii)}$ は離散位相を引き起こすので、 $\tilde{\sigma}$ は常に $Q_{D_2-(iii)}$ -continuous になる。従ってこの場合は、Theorem B は Bohnenberger の定理の特別な場合になる。ところで、集合族 $Q_{D_2-(i)}$ は $P(G)$ 上のノルム位相の原点における基底となるが、 Q_{D_1} と $Q_{D_2-(iii)}$ に関しては線形演算と両立するどんな位相に対しても、その原点における基底となることはできない。

5. 擬位相

前節の考察を踏まえて一般の可換 Banach 環の場合を考察しようとする、自然に「擬位相」という概念が生まれる。これは一般に線形空間のある部分集合の族 Q のことで、次の 2 条件:

$$0 \in U (\forall U \in Q),$$

$$\forall U, V \in Q, \exists W \in Q : W \subseteq U \cap V$$

を満たすものを言う。このとき擬位相のクラスは自然な半順序構造をもつ。

可換 Banach 環 A が与えられたとき、その Gelfand 空間 Φ_A が生成する線形空間 $\text{span}(\Phi_A)$ の任意の元 p は $p = \sum_{\varphi} \hat{p}(\varphi) \varphi$ と一意に書くことができる。従って、 Φ_A 上の複素数値関数

σ は

$$\tilde{\sigma}(p) = \sum_{\varphi} \hat{p}(\varphi) \sigma(\varphi), \quad p \in \text{span}(\Phi_A)$$

によって $\text{span}(\Phi_A)$ 上の自然な線形汎関数 $\tilde{\sigma}$ を引き起こす。それ故 $\text{span}(\Phi_A)$ 上の一つの擬位相 Q が与えられたとき、 $\tilde{\sigma}$ が " Q -continuous" であるような Φ_A 上の複素数値連続関数 σ の全体を $C(\Phi_A; Q)$ で表すと、これは自然に線形空間を作る。このとき

$\hat{A} = C(\Phi_A; Q)$ となるような $\text{span}(\Phi_A)$ 上の擬位相 Q が存在するか？

と言う自然な考察が R. Doss の定理によって生ずる。

6. 基本 Lemma と目的

いま $\text{span}(\Phi_A)$ 上の相対弱*-位相に関する原点での近傍の族を $Q_0 = Q_0(A)$ とするとき、常に $\hat{A} = C(\Phi_A; Q_0)$ が成り立ち、しかも $\hat{A} = C(\Phi_A; Q)$ を満たす擬位相 Q は常に $Q_0 \leq Q$ であることを示すことができる。従って $\hat{A} = C(\Phi_A; Q)$ 且つ $Q_0 < Q$ であるような擬位相 Q を探すことが我々の目的となる。

7. BE-環 と BED-環

$P(G)$ 上の擬位相 $Q_{D_2-(i)}$ を可換 Banach 環の世界に焼き直すと、 $\text{span}(\Phi_A)$ 上の相対ノルム位相に関する原点での近傍の基底となるが、これを $Q_{BE} = Q_{BE}(A)$ で表すことにする。これが引き起こす線形空間 $C(\Phi_A; Q_{BE})$ は BE-ノルムと呼ばれるもので半単純可換 Banach 環をつくり、常に $\hat{A} \subseteq C(\Phi_A; Q_{BE})$ である。しかし一般に $C(\Phi_A; Q_{BE})$ と $\hat{M}(A)$ との間に包含関係はない。記号の便利上 $C_{BE}(\Phi_A) = C(\Phi_A; Q_{BE})$ と書くことにする。実は前述の BE-環とは、 $\hat{M}(A) = C_{BE}(\Phi_A)$ が成り立つ可換 Banach 環 A のことを指すのである。有名な Bochner-Eberlein の定理は

「 $L^1(G)$ は BE-環である」

ことを主張している。

さて前節の我々の目的を 1 つの方向で達成させてくれるのが Doss の後者の定理による示唆である。実際、 $P(G)$ 上の擬位相 $Q_{D_2-(i)}$ と $Q_{D_2-(ii)}$ を可換 Banach 環の世界に素直に焼き直し、その両方より弱い擬位相で「リーズナブル」なものを探せばよい。そのために、 $K(\Phi_A)$ を Φ_A 上のコンパクト集合全体とすると、各 $K \in K(\Phi_A)$ 及び $\delta > 0$ に対して次で定義される集合 $U_{K, \delta}$ の全体を $Q_{BE}^0 = Q_{BE}^0(A)$ で表す：

$$U_{K, \delta} = \{p \in \text{span}(\Phi_A) : \|p\|_A \leq 1, \exists q \in \text{span}(\Phi_A) \text{ s. t. } \|q\|_A \leq \delta, \hat{p}|_K = \hat{q}|_K\}.$$

このとき Q_{BE}^0 は $\text{span}(\Phi_A)$ 上の擬位相となることがわかるが、これが求める「リーズナブルなもの」と直観したい。

さて擬位相 Q_{BE}^0 は線形空間 $C(\Phi_A; Q_{BE}^0)$ を引き起こすが、我々はこの線形空間を理解するため、各 $\sigma \in C_{BE}(\Phi_A)$ に対して

$$\|\sigma\|_{BE, \infty} = \lim_{U \in Q_{BE}^0} \sup_{p \in U} |\tilde{\sigma}(p)|$$

と置き、 $C_{BE}^0(\Phi_A) = \{\sigma \in C_{BE}(\Phi_A) : \|\sigma\|_{BE, \infty} = 0\}$ と定義する。このとき、 $C_{BE}^0(\Phi_A)$ は可換 Banach 環 $C_{BE}(\Phi_A)$ の閉イデアルとなり、丁度 $C(\Phi_A; Q_{BE}^0)$ に一致することがわかるのである。そこで $\hat{A} = C_{BE}^0(\Phi_A)$ となる可換 Banach 環 A を BED-環と呼ぶことにする。Doss の後者の定理から、LCA-群 G 上の群環 $L^1(G)$ は BED であることがわかる。

実際、

$$Q_{BE}^0(L^1(G)) \leq Q_{BE}(L^1(G)) = Q_{D_2-(i)} \text{ and } Q_{BE}^0(L^1(G)) \leq Q_{D_2-(ii)}$$

であるから, Doss の後者の定理から $C_{BE}^0(\Phi_{L^1(G)}) \subseteq L^1(\hat{G})$ である。一方, 一般に $\hat{A}$ と $C_{BE}^0(\Phi_A)$ との間に包含関係はないが, A が Tauber 型なら常に $\hat{A} \subseteq C_{BE}^0(\Phi_A)$ が成り立つことを示すことができる。勿論 $L^1(G)$ は Tauber 型であるから $L^1(\hat{G}) \subseteq C_{BE}^0(\Phi_{L^1(G)})$ が成り立つ。従って両者は一致するから $L^1(G)$ は BED-環である。

8. 近似単位元の有界性の不可思議

2 節で Gelfand 変換像の特徴付問題と Gelfand-Helgason-Wang 変換像の特徴付け問題は密接な関係を持っていることが予想されると述べたが, これには近似単位元の性質が大きく働いているらしいのである。実際, 半単純可換 Banach 環 A が正則のとき, A がある種の有界近似単位元を持てば, A の BE 性と BED 性は同値であることが示される。しかしながら近似単位元の有界性を外すと, この 2 つは途端に無関係になるらしい。後で分類のところでもその証拠を出そう。

また前節で $\hat{A}$ と $C_{BE}^0(\Phi_A)$ との間に包含関係はないと述べたが, A が正則且つ $C_{BE}^0(\Phi_A) \subseteq \hat{M}(A)$ を満たすとき, A がある種の有界性を持つ近似単位元を有するならば, A と $C_{BE}^0(\Phi_A)$ は同じ ideal theory を持つことが示される。

9. 可換 Banach 環の分類

これまでの考察から可換 Banach 環は次の 4 つに分類される:

- (I) BE and BED,
- (II) BE and not BED,
- (III) BED and not BE,
- (IV) not BED and not BE.

次にそれぞれに属する可換 Banach 環の例を挙げよう。

(I) に属する例:

$L^1(G)$,
 $L^1(G)$ のある種の商環,
 $L^1(G)$ のある種の閉イデアル,
 可換 C^* -環,
 disk 環 $A(\bar{D})$,
 Hardy 環 $H^\infty(D)$,
 実数直線 $\mathbb{R}$ 上のある種の Lipschitz-環 $\text{Lip}_1^0(\mathbb{R})$.

(II) に属する例:

noncompact LCA 群 G 上の Segal 環: $S_p(G)$ ($1 < p < \infty$),
 $A_p(G)$ ($1 \leq p < \infty$).

(III) に属する例:

無限集合 S 上の ℓ^1 -環 $\ell^1(S)$,
 L^p -環: $L^p(G)$ (G : compact, $\#G = \infty$, $1 < p < \infty$),
 無限次元可換 H^* -環
 $C_0(X; \tau)$,
 A_τ .

(IV) に属する例:

$\mathbb{R}$ 上の微分環 $C_0^1(\mathbb{R})$,
 $[0, 1]$ 上の微分環 $C^1([0, 1])$,
 nondiscrete LCA 群 G 上の測度環 $M(G)$,
 半群 $N_k = k - 1 + \mathbb{N}$ ($k \geq 1$) 上の半群環 $L^1(N_k)$.

10. 問題

(1) $\text{span}(\Phi_A)$ 上の擬位相 :

$$Q_K(A) = \{ \{ p \in \text{span}(\Phi_A) : \|p\|_A \leq 1, \text{supp}(p) \subseteq \Phi_A - K \} \}_{K \in K(\Phi_A)}$$

を考える。但し、 Φ_A が compact のときは、 $Q_K(A)$ は原点からなる 1 点集合を含むものとする。このとき、 $Q_{BE}^0(A)$ は $Q_K(A)$ と $Q_{BE}(A)$ の両方より弱い擬位相の中で最強のものであるか？

(2) 一般に $C_{BE}^0(\Phi_A) \subseteq C_{BE}(\Phi_A) \cap C(\Phi_A; Q_K)$ であるが、等号の成り立つ条件を求めよ。

(3) Doss の後者の定理は「 $A = L^1(G) \Rightarrow \hat{A} = C_{BE}(\Phi_A) \cap C(\Phi_A; Q_K)$ 」を主張しているが、そのような Banach 環を研究せよ。

(4) 常に $\hat{A} \subseteq C_{BE}^0(\Phi_A)$ が成り立つか？もしそうでないなら、成り立つための A 上の条件を見つけよ。

(5) BE-環 A について、 $\hat{M}(A) = C(\Phi_A; Q)$ を満たす最強の擬位相 Q は $Q_{BE}(A)$ であるか？

(6) $\hat{A} = C(\Phi_A; Q)$ を満たす最強の擬位相 Q は存在するか？もし存在するならそれは何か？

(7) Doss の前者の定理が導く擬位相を一般の可換 Banach 環の世界に焼き直せるか？

参考文献

1. R. Doss, On the Fourier-Stieltjes transforms of singular or absolutely continuous measures, Math. Zeitschr. 97(1967), 77-84.
2. R. Doss, On the transforms of a singular or absolutely continuous measure, Proc. Amer. Math. Soc., 19(1968), 361-363.
3. S.-E. Takahasi and O. Hatori, Commutative Banach algebras which satisfy a Bochner-Schoenberg-Eberlein-type theorem, Proc. Amer. Math. Soc., 110(1990), 149-158.
4. S.-E. Takahasi and O. Hatori, Commutative Banach algebras and BSE-inequalities, Math. Japonica, 37(1992), 47-52.
5. J. Inoue and S.-E. Takahasi, On the characterizations of the image of Gelfand transform of commutative Banach algebras. to appear in Math. Nachr.
6. J. Inoue and S.-E. Takahasi, On dense ideals of commutative Banach algebras, in preparation.