

Local Profile of mild solutions in 2D symmetric domains

東京工芸大 中根静男 (Shizuo Nakane)

この講演は都立大の鈴木貴氏との共同研究に基づいている。

§1 序

Ω を $\mathbb{R}^N$ の有界領域で境界 $\partial\Omega$ は滑らかとし、 $\mathbb{R}$ の境界値問題を考える：

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(u), & u > 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

但し、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は C^1 とする。我々が興味があるのは、特に、 Ω が超平面 $\Gamma = \{x \cdot \nu = 0\}$ に関して対称な場合である。この場合には Gidas-Ni-Nirenberg により有名な結果が知られている。それは次の問に対する回答である：

(Q1) (1) の解は Γ に関して対称か？

$$\pm z, \quad T(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^N; \quad x \cdot \gamma = \delta\}$$

$$\delta^* = \sup \{ \delta; T(\delta) \cap \Omega \neq \emptyset \} \quad \text{と置く.}$$

定義 Ω が次を満たすとき, T に関して GNN symm. という.

(i) Ω は T に関して対称.

(ii) $0 < \forall \delta < \delta^*$ に対し, $\{x \in \Omega; x \cdot \gamma > \delta\}$ の T に関する鏡映は Ω に含まれる.

(iii) $\forall \delta < \delta^*$ に対し, $T(\delta)$ は $\partial\Omega$ と直交しない.

このとき, 次のことが得られる.

定理 0 (Gidas-Ni-Nirenberg [2])

Ω が GNN symm. ならば (i) の解はすべて T に関して対称, しかも, $\forall x \in \Omega, \quad \gamma \cdot \nabla u < 0$.

例 $g(z) = g_R(z) = \frac{1-R^2}{2} \left(\frac{1}{z-R} + \frac{1}{z+R} \right), \quad R > 1.$

$$\mathbb{C}_2 \supset \Omega = \Omega_R = g(D), \quad D = \{ |z| < 1 \}$$

$z = x_1 + ix_2$ により, $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{C}$ を同一視すると, Ω は x_1 -軸と x_2 -軸に関して対称. 次のことが成り立つ.

$\forall R > 1$ に対し, Ω は x_1 -軸に関して GNN symm.

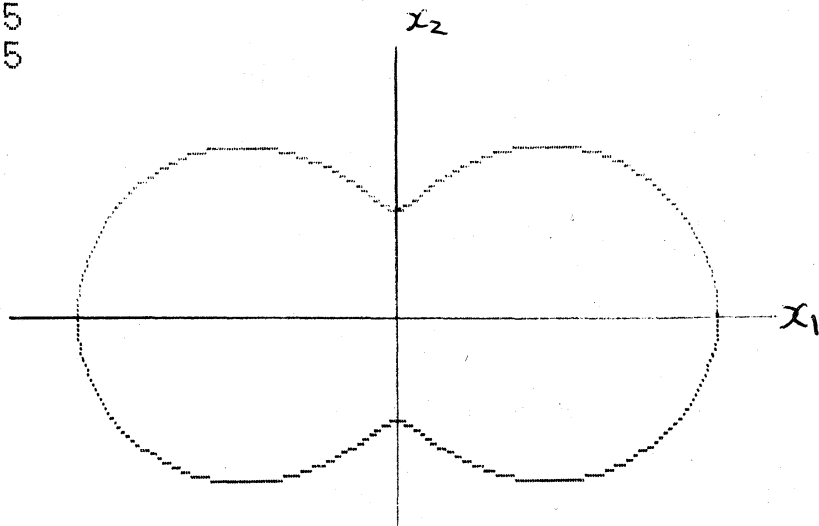
$$\Omega \text{ が } x_2 \text{ 軸に関して GNN symm.} \iff R > 1 + \sqrt{2}$$

実際, $R < \sqrt{2}$ のとき, $f(u) = \lambda e^u \quad \lambda \ll 1$ に対し, Weston-

Moseley 理論により, 非対称な large solution の存在が示す

れる。 $r = R^2 = 2$ と Ω を図示すると下のようになる。

$$\begin{array}{rcl} r = & & 2 \\ x_s = & & -1.5 \\ x_e = & & 1.5 \\ y_s = & & -1.5 \\ y_e = & & 1.5 \end{array}$$



しかし、GNN symm. でなくとも (Q1) が肯定的に答えられるような対称領域は色々存在する。

例 1. $f(u) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: 単調非増加 とすると、(1) の解は unique。故に解は Γ に對し対称。

例 2. $-\Delta u = \lambda f(u)$, $f(0) > 0$, $f'(0) > 0$, $f''(t) > 0$ ($t > 0$)

α と β , $\bar{\lambda} > 0$ が存在し、 $0 < \lambda < \bar{\lambda}$ に對し、 unique に minimal solution が存在する。この minimal solution も対称になる。(Crandall-Rabinowitz [1] 参照。)

我々の主たる関心は次の問題である。

(Q2) (1) の対称解は Γ の Ω 上で最大値をとるか? 更に、この曲線に沿って解は減少するか?

定理0は Ω が GNN symm. のとき, (Q2) に対し肯定的な回答を与えている。我々は $\mathbb{R}^2$ 内の non GNN symm. な領域 Ω を考える。

定義. (1) の解 u が次を満たすとき mild とする。

$$(2) \quad \lambda_2(u) > 0$$

但し, $-\infty < \lambda_1(u) < \lambda_2(u) < \dots$ は $-\Delta - f'(u)$ の $L^2(\Omega)$ での固有値を表わす。

先の例1, 2の対称解はすべて mild であることを示される。

§2. 主定理

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を有界単連結領域

$$f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$$

$$\Gamma = x_1 \text{ 軸}$$

とする。Riemann の写像定理により, 等角写像 $g: D = \{ |z| < 1 \}$

$\rightarrow \Omega$ として $g(\bar{z}) = \overline{g(z)}$ を満たすものが存在する。こ

こで $\mathbb{R}^2 \ni \mathbb{C}$ と同一視している。今, この g に対し,

$$(3) \quad h_+(z) = (1+z^2) \frac{g''(z)}{g'(z)} + 2z$$

とおき, 次を仮定する。

$$(H) \quad \operatorname{Im} \zeta > 0 \Rightarrow \operatorname{Im} h_+(z) > 0$$

この仮定は Ω の幾何学的性質を規定するものである。このとき、次の主定理を得る。

定理 1 (H) を仮定すると、(1) の mild な対称解 u は $T \cap \Omega$ 上で最大値をとる。更に、 $\zeta(t)$ を $g^{-1}(T)$ から出る、ベクトル場 $v(z) = \sqrt{1+z^2}$ の積分曲線、 $z(t) = g(\zeta(t))$ とおくと、 u は曲線 $z(t)$ に沿って減少する。

注意 実は、 Ω に対し Riemann 写像 g は unique でない。そして、(H) も g のとり方に依存する。実際、 g のかわりに、 $g_a(z) = g \circ \varphi_a(z)$, $\varphi_a(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ ($-1 < a < 1$) とすると成り立つ。このとき、(H) は、次のように書ける：

$$(H.a) \quad \operatorname{Im} \zeta > 0 \Rightarrow \operatorname{Im} h_a(z) > 0$$

$$\text{但し、} h_a(z) \equiv \left(1 - \frac{4a}{a^2+1} z + z^2\right) \frac{g'(z)}{g(z)} + 2z. \quad (g = g_0)$$

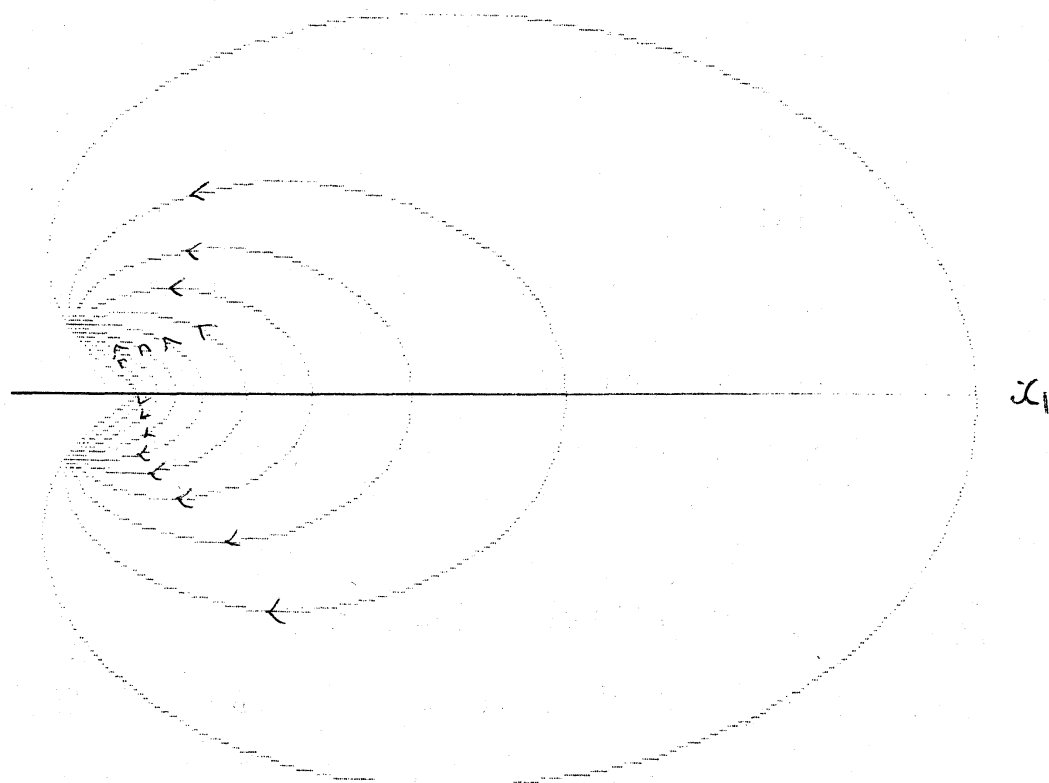
例 $g(z) = (R+z)^k$ ($R > 1$) とする。次が言える：

$$g : \text{univalent} \iff R > \frac{1}{\sin \frac{\pi}{k+1}}.$$

$\Omega : \text{convex} \iff R \geq k+1. \iff \Omega, \text{GNN symm.}$

しかし, $\forall R > 1$, 対し, a を -1 に十分近くとれば, (H, a) が成り立つ. Ω 及び, $z(t)$ を図示すると次のようになる.

graph of $g(z) = (r+z)^3$
 $r = 1.5$
 $a = -.3$



矢印のついた曲線にそって u は減少する.

定理1の証明の方針

$$\varphi_z(\zeta) \equiv \frac{\zeta+z}{1+\bar{\zeta}z}, \quad g_z \equiv g \circ \varphi_z : D \rightarrow \Omega$$

とおく. (1)の解 u に対し, $u_z(\zeta) \equiv u \circ \varphi_z(\zeta)$ は, 次の境界値問題の解になる:

$$\begin{cases} -\Delta v_z = p_z^2(z) f(v_z) & \text{in } D \\ v_z = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

但し, $p_z(z) \equiv |g'_z(z)|$. 又 $\omega = \sqrt{-1}$, $W = \frac{2}{2\pi} |r_{rw}|_{r=0}$ とおくと, W は次を満たす。

$$\begin{cases} (-\Delta - p_0^2 f'(v_0)) W = -\operatorname{Im} h(z) \cdot p_0^2 f(v_0) < 0 \\ W|_{\partial D_+} = 0 \end{cases} \quad \text{in } D_+ = \{ \operatorname{Im} z > 0 \}$$

又 mildness より, $-\Delta - p_0^2 f'(v_0)$ は D_+ 上 positive。
故に, maximum principle より, $W < 0$ in D_+ 。
 $\therefore \frac{d}{dt} u(z(t)) < 0$ 。これより定理が従う。

§3 mild な対称解の level set

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は更に, x_1 -B.W. x_2 -軸に関して対称である。すなわち, Riemann 写像 $g: D \rightarrow \Omega$ といて,

$$g(-z) = -g(z), \quad g(\bar{z}) = \overline{g(z)}$$

を満たすものがとれる。 $h_{\pm}(z) \equiv (z^2 \pm 1) \frac{g'(z)}{g(z)} + 2z$ といて, 次を仮定する:

$$(H') \quad \begin{cases} \operatorname{Im} z > 0 \Rightarrow \operatorname{Im} h_+(z) > 0 \\ \operatorname{Re} z > 0 \Rightarrow \operatorname{Re} h_-(z) > 0 \end{cases}$$

このとき、次の定理を得る。

定理2 Ω は原点に関して starshaped とする。このとき、 (H') の下で、(1) の mild な対称解 u に対し、その level set $\Omega_c = \{x \in \Omega : u(x) > c\}$ は原点に関して starshaped。

詳細は Chen - Nakane - Suzuki [3] を参照された。

文 献

- [1] Crandall, M.G - Rabinowitz, P : Some continuation and variational methods for positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems, Arch. Rat. Mech. Anal., 58 (1975). 207-218.
 - [2] Gidas, B., Ni, W.-M., Nirenberg, L : Symmetry and related properties via the maximum principle, Comm. Math. Phys., 68 (1979) 209-403.
 - [3] Chen, Y.-G., Nakane, S., Suzuki, T. : Elliptic equations on 2D symmetric domains: Local profile of mild solutions. preprint.
- 及び、[3] の References を参照された。