

【課程博士用】

## 学 位 審 査 報 告 書

|                                                                                                                                         |                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| (ふりがな)<br>氏 名                                                                                                                           | (つちおか しゅんすけ)<br>土岡 俊介                |
| 学位 (専攻分野)                                                                                                                               | 博 士 ( 理 学 )                          |
| 学 位 記 番 号                                                                                                                               | 理 博 第 号                              |
| 学位授与の日付                                                                                                                                 | 平成 年 月 日                             |
| 学位授与の要件                                                                                                                                 | 学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当              |
| 研 究 科 ・ 専 攻                                                                                                                             | 理学研究科 数学・数理解析 専攻                     |
| (学位論文題目)<br><br>Hecke-Clifford superalgebras and crystals of type $D^{\{2\}}_{\{l\}}$<br>(和訳：ヘッケ・クリフォード超代数と $D^{\{2\}}_{\{l\}}$ 型クリスタル) |                                      |
| 論 文 調 査 委 員                                                                                                                             | (主査) 柏原 正樹 教授<br>向井 茂 教授<br>有木 進 准教授 |

理 学 研 究 科

( 続紙 1 )

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                |    |       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|-------|
| 京都大学                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 博士（理学）                                                                                                         | 氏名 | 土岡 俊介 |
| 論文題目                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Hecke-Clifford superalgebras and crystals of type $D^{\{2\}}_{-1}$<br>(ヘッケ・クリフォード超代数と $D^{\{2\}}_{-1}$ 型クリスタル) |    |       |
| (論文内容の要旨)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                |    |       |
| <p>Hecke-Clifford superalgebra <math>H_n(q)</math>は、対称群の射影表現と関連して、Jones-Nazarovにより1999年に導入された超代数である。これは、自然数 <math>n</math> にたいして定義され、パラメータ <math>q</math> を含む。<math>q^2</math>が1の原始奇数乗根の場合の Hecke-Clifford superalgebra の表現論については、既に、Brundan-Kleshchevの研究により、その有限次元既約表現がアフィン量子群 <math>A_{2\ell}^{(2)}</math> の結晶基底によりラベルされることが見いだされている。本論文においては、<math>q^2</math> が1の原始 <math>2\ell</math> 乗根の場合の Hecke-Clifford superalgebra の表現論が考察されている。この有限次元表現のつくる圏の Grothendieck 群を <math>K_n</math> としたとき、その直和 <math>\bigoplus_n K_n</math> は Induction と Restriction によって Hopf 代数の構造をもつ。この論文においてはまず、この Hopf 代数がアフィン量子群 <math>U_q(D_\ell^{(2)})</math> と同型であることを示した。さらに、この超代数の有限次元既約表現の同値類全体に結晶基底の構造が入ることを示した。<math>M</math> を <math>H_n(q)</math> の有限次元既約表現としたとき、その Induction は <math>H_{n+1}(q)</math> の有限次元表現となるが、この表現はただ一つの既約商加群 <math>\tilde{F}_i(M)</math> をもつ。同様に、<math>M</math> の Restriction は <math>H_{n-1}(q)</math> の有限次元表現となるが、これはただ一つの既約部分加群 <math>\tilde{E}_i(M)</math> をもつ。この2種類の作用素 <math>\tilde{F}_i</math> と <math>\tilde{E}_i</math> により、有限次元既約表現の同値類全体に結晶基底の構造が入る。しかもこの結晶基底の構造が、アフィン量子群 <math>U_q(D_\ell^{(2)})</math> の結晶基底と同型であることを示した。これらの証明のために、上記の作用素と双対な作用素 <math>\tilde{F}_i^*</math> と <math>\tilde{E}_i^*</math> を導入し、これらの作用素の交換関係を調べた。この交換関係を調べるのに、<math>n=0,1,2,3,4</math> の場合の <math>H_n(q)</math> の既約表現の詳細な構造を調べている。この結果を、既に知られている量子群の結晶基底の特徴付けを適用することによって、有限次元既約表現全体のつくる結晶基底の構造がアフィン量子群 <math>U_q(D_\ell^{(2)})</math> の結晶基底と同型であることが示される。さらに、Hecke-Clifford superalgebra の商代数として得られる cyclotomic Hecke-Clifford superalgebra の表現を調べ、その有限次元既約表現全体が結晶基底をもち、その結晶基底の構造が <math>D_\ell^{(2)}</math> の最高重み既約表現の結晶基底と同型であることを示した。</p> |                                                                                                                |    |       |

## (論文審査の結果の要旨)

ヘッケ環は、有限 Chevalley 群や  $p$  進体上の代数群の表現論から生まれ、それまで扱えなかった対称性を記述する代数として近年ますます重要性を増している。この代数は、パラメータ  $q$  を含んでいる。このパラメータ  $q$  が一般のときの表現論はよく知られていたが、 $q$  が 1 の冪根のときは、その表現論は複雑となる。1996 年に、Lascoux-Leclerc-Thibon は、A 型のヘッケ環の既約表現が、A 型のアフィン量子群の結晶基底で記述できることを予想した。これは、その後、Ariki により、アフィンヘッケ環に拡張され、A 型のアフィンヘッケ環の有限次元既約表現と A 型のアフィン量子群の大域結晶基底の関係が完全に解明された (LLTA 理論)。特に既約表現の次元も大域結晶基底から読み取ることができる。LLTA 理論の証明には、Lusztig による旗多様体上の単純偏屈層をもちいた結晶基底の幾何学的な記述と、Kazhdan-Lusztig, Ginzburg らによるアフィンヘッケ環の既約表現の旗多様体上の単純偏屈層をもちいた幾何学的記述が用いられている。これらの理論は、Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber による Weil 層が hard Lefschetz 定理と分解定理を満たすという深い結果に依拠している。一方、これより弱い結果「A 型のアフィンヘッケ環の有限次元既約表現が A 型のアフィン量子群の結晶基底でラベルされる」は、このような大定理を用いずとも、比較的簡単な議論で得られることは Grojnowski によって示されている。しかしこの弱い結果からは既約表現の次元などは知ることができない。

このような、代数の表現と結晶基底の関係はほかにもあるのではないかと期待されていたが、実際 Brundan-Kleshchev により、Hecke-Clifford superalgebra の有限次元既約表現がアフィン量子群の結晶基底で記述できることが示された。Hecke-Clifford superalgebra は Jones-Nazarov により導入された超代数で、パラメータ  $q$  を含む。Brundan-Kleshchev は、 $q^2$  が 1 の原始奇数乗根の場合に、Hecke-Clifford superalgebra の有限次元既約表現がアフィン量子群  $A_{2\ell}^{(2)}$  の結晶基底で記述できることを示した。この証明には Grojnowski の論法がもちいられている。この対応の場合は、 $A_{2\ell}^{(2)}$  の大域結晶基底が正值性を満たさないことから、A 型アフィンヘッケ環における既約表現と大域結晶基底の対応のような精密な結果はそのままの形では望めない。

申請者は、本学位論文において、Brundan-Kleshchev が考察しなかった  $q^2$  が 1 の偶数乗根の場合に、Hecke-Clifford superalgebra の有限次元既約表現を考察した。 $q^2$  が 1 の原始偶数乗根の場合にも、有限次元既約表現の全体が結晶基底の構造をもち、それがアフィン量子群  $D_\ell^{(2)}$  の結晶基底と同型となることを示した。さらに Hecke-Clifford superalgebra の有限次元表現の Grothendieck 群が、量子群  $U_q(D_\ell^{(2)})$  と同型となることを示した。これは、代数の表現と結晶基底の関係に新たな事例を与えたものとして評価できる。

以上の理由により、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、平成 22 年 1 月 26 日論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。