

制御におけるスパース性の利用について

On the Use of Sparsity for Control

永原正章[†]

[†] 京都大学情報学研究科

Masaaki NAGAHARA[†]

[†]Graduate School of Informatics, Kyoto University

アブストラクト 本稿では、制御におけるスパース性の利用について考察する。すなわち、スパースな信号を用いた制御の利点とその導出法について考える。もし制御信号がスパースであれば、ある時間区間で制御信号が完全に0となるので、その区間でアクチュエータを休止させることができる。この性質により、制御データの伝送負荷を削減でき、また省エネが達成されるといった利点が生まれる。本稿では、これらの利点について概説した後、連続時間の L^0 ノルムを定義し、ある種の L^1 最適制御問題の解が最もスパースな許容解 (L^0 最適解) でもあることを示す。

1 はじめに

信号処理において、スパース性の概念は近年重要な役割を果たしており、スパース性にもとづいた様々な信号処理法が提案されている [3], [4], [10]。特に、 ℓ^0 ノルムで定義された評価関数を最小化する最適化問題が ℓ^1 最適化の解と一致する条件を導き、凸最適化の手法によりスパース解を導出する方法は、この分野での標準的な手法となっている。

これらスパース性を用いた信号処理の研究に触発されて、筆者らは近年、制御信号のスパース性を考慮した新しい制御手法を提案した [5], [6], [8]。これらの研究の背景には、制御の分野で近年盛んに研究されているネットワーク化制御がある。ネットワーク化制御においては、制御信号のデータが帯域制限のある通信路を介して制御対象に送信される。このとき、もし制御信号がスパース表現されていれば、送信信号のデータ量を効率的に圧縮し送信することが可能となる。このような観点から、安定性や収束性など制御系の性能をなるべく変化させず、かつ制御信号をできるだけスパースに表現するために、 ℓ^1 - ℓ^2 評価関数など解のスパース性を誘導する最適化により制御問題を定式化し、近年発展が著しいそれらの高速計算法 (たとえば [2]) を導入して、スパースな制御を導出することを提案した。

本研究では、これらの研究をさらに発展させ、連続時

間の制御信号のスパース化を提案する。ここで、連続時間の信号がスパースであるとは、その信号の台の長さが、全体の時間区間長に比べて十分短いことであると定義する。スパースな制御信号を用いれば、ある一定の時間区間で制御の値が厳密に0となり、その区間でアクチュエータを休止させることができる。たとえば自動車の場合、アクチュエータ (の一つ) はガソリンエンジンであるが、エンジンを止めることにより、ガソリンの消費を抑えるとともに、CO2の排出や騒音も抑制することができる。この性質は、電気モータを含むハイブリッドカーにおいても有効である。すなわち、制御にスパース性を導入することにより、燃料消費量の削減だけでなく、環境問題の解決にも役立つと期待できる。

以下では、まず連続時間信号の L^0 ノルムを定義したのち、 L^1 最適制御の L^0 最適性についての理論的結果を述べる。

2 連続時間信号の L^0 ノルム

時間区間 $[0, T]$ 上の連続時間信号 $u(t)$ にたいして、その L^0 ノルムをその台の長さ、すなわち

$$\|u\|_0 = \mu(\text{supp}(u)) = \mu(\{t \in [0, T] : u(t) \neq 0\}), \quad (1)$$

で定義する。ここで、 μ は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度であり、 $\text{supp}(u)$ は連続時間信号 u の台を表す。なお、(1) で定義された $\|u\|_0$ は斉次性が成り立たないので、厳密にはノルムではない。すなわち、非零で $|a| \neq 1$ であるような任意のスカラー a に対して、

$$\|au\|_0 = \|u\|_0 \neq |a|\|u\|_0, \quad \forall u \neq 0 \quad (2)$$

となってしまう。しかし、ここでは慣例に従い L^0 ノルムという呼び方を用いる。また、(1) を “ L^0 ” ノルムと呼ぶのは次の性質からである。すなわち、 u を区間 $[0, T]$ 上で Lebesgue 可積分な信号としたとき、任意の $p \in (0, 1)$ に対して $u \in L^p$ であり、かつ

$$\lim_{p \rightarrow 0} \|u\|_p^p = \|u\|_0 \quad (3)$$

が成り立つ [11]. ここで,

$$\|u\|_p = \left(\int_0^T |u(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (4)$$

であり, L^p は $\|u\|_p$ が有限な関数 u からなる集合である.

区間 $[0, T]$ 上の連続時間信号 $u(t)$ が**スパース**であるとは, 区間幅 T に比べて $\|u\|_0$ が十分小さいことを言う. この定義は, 圧縮センシング等で用いられるベクトルの ℓ^0 ノルムのアナロジーである. すなわち, ベクトルの ℓ^0 ノルムはその非ゼロ要素の数として定義され, スパースなベクトルとは, その ℓ^0 ノルムがベクトル長よりも十分小さいベクトルのことである. 詳しくは [3], [4], [10]などを参照されたい.

3 L^1 最適制御の L^0 最適性

次の制御対象を考えよう.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t). \quad (5)$$

ただし, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$ とし, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ とする. この制御対象に対し, 初期値 $x(0) = \xi \in \mathbb{R}^n$ から, 終端値 $x(T) = \mathbf{0}$ まで状態を遷移させる制御入力で, 最大値制約

$$|u(t)| \leq 1, \quad \forall t \in [0, T] \quad (6)$$

を満たすものを**許容制御**と呼ぶ. この許容制御のうち, 次の L^1 評価関数を最小化する制御入力 $u(t)$, $t \in [0, T]$ を求める L^1 最適制御問題を考える.

$$J(u) = \|u\|_1 = \int_0^T |u(t)| dt. \quad (7)$$

この L^1 最適制御問題に対して, **正規性 (normality)** [1] と呼ばれる性質と解の存在を仮定すれば, その解は最もスパースな許容解となることが示される.

定理 1 L^1 最適制御問題が正規であり, かつ最適解が存在すると仮定する. このとき, L^1 最適制御は最もスパースな許容制御である. すなわち, L^1 最適制御は次の L^0 評価関数

$$J_0(u) = \|u\|_0 \quad (8)$$

を最小化する.

この定理は, より一般的な制御対象に対して, 最小原理 [9] を用いて証明される [7]. この定理により, L^1 最適制御問題が正規であり, かつその解が存在すれば, (8) の L^0 ノルムを最小化する最適制御が L^1 最適制御により与えられることになる. なお, 正規性の十分条件として以下の条件が知られている [1, Theorem 6.13].

補題 1 線形システム (5) が可制御で行列 A が正則なら, L^1 最適制御問題は正規となる.

L^1 最適制御問題は, 区間 $[0, T]$ を十分短い区間に分割し離散化を行えば, ベクトルの凸最適化問題に帰着され, きわめて効率的に解くことが可能である. 詳しくは [7] を参照されたい.

4 おわりに

本稿では, 制御におけるスパース性の利用について概説し, 特に, 連続時間の L^0 ノルムを最小化する最適制御が, ある仮定のもとで L^1 最適制御により与えられることを示した. 制御におけるスパース性の利用に関する研究は, 近年始まったばかりであり, 圧縮センシングの技法など, 信号処理における多くの研究成果を制御に応用することで, より良い制御系設計が可能になると期待される.

謝辞

本研究は, 科学研究費補助金, 基盤研究 (C)(24560543) の助成を受けたものである.

参考文献

- [1] M. Athans and P. L. Falb, *Optimal Control*, Dover Publications, 1966
- [2] A. Beck and M. Teboulle, A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems, *SIAM J. Imaging Sci.*, Vol. 2, No. 1, pp. 183–202, 2009
- [3] Y. C. Eldar and G. Kutyniok, *Compressed Sensing*, Cambridge University Press, 2012
- [4] K. Hayashi, M. Nagahara, and T. Tanaka, A user's guide to compressed sensing for communications systems, *IEICE Trans. on Communications*, vol. E96-B, no. 3, pp. 685–712, Mar., 2013
- [5] M. Nagahara and T. Matsuda and K. Hayashi Compressive sampling for remote control systems, *IEICE Trans. on Fundamentals*, Vol. E95-A, No. 4, pp. 713–722, Apr., 2012
- [6] M. Nagahara and D. E. Quevedo, Sparse representations for packetized predictive networked control, *IFAC world congress*, pp. 84–89, Sept., 2011
- [7] M. Nagahara, D. E. Quevedo, and D. Nešić, Maximum hands-off control and L^1 optimality,” *Proc. of 52nd IEEE CDC*, Dec., 2013
- [8] M. Nagahara, D. E. Quevedo, and J. Østergaard, Packetized predictive control for rate-limited networks via sparse representation, *Proc. of 51st IEEE CDC*, pp. 1362–1367, Dec., 2012
- [9] 大塚, 非線形最適制御入門, コロナ社, 2011
- [10] 田中, 圧縮センシングの数理, *IEICE Fundamental Review*, Vol. 4, No. 1, pp. 39–47, Jul., 2010
- [11] T. Tao, *An Epsilon of Room, I: Real Analysis*, AMS, Feb., 2011