

近似 GCD の安定性について

長坂耕作

KOSAKU NAGASAKA*

神戸大学人間発達環境学研究科

GRADUATE SCHOOL OF HUMAN DEVELOPMENT AND ENVIRONMENT, KOBE UNIVERSITY

1 はじめに

K を任意の体とし, $K[x]$ を変数 $x = x_1, \dots, x_\ell$ に関する多項式環とする。多項式の最大公約因子 (Greatest Common Divisor) は, 与えられた多項式 $f_1, \dots, f_s \in K[x]$ に対し, 次式を満たす次数最大の多項式 $g \in K[x]$ のことである。

$$\exists \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_s \in K[x], f_i(x) = g(x) \bar{f}_i(x) \quad (i = 1, \dots, s).$$

最大公約因子は, 多くの代数的な計算で用いられる基盤的な道具であり, 古くから研究されている。近年では, 与えられた多項式が係数に誤差を含む場合に拡張した, 近似 GCD の研究も進んでいる。ここで, 近似 GCD とは, 与えられた多項式 $f_1, \dots, f_s \in K[x]$ に対し, 次式を満たす多項式 $g \in K[x]$ のことである。

$$\exists \Delta_1, \dots, \Delta_s \in K[x], g(x) = \gcd(f_1 + \Delta_1, \dots, f_s + \Delta_s).$$

近似 GCD は, 数値的な方法を用いて解かれることが多いため, 数値的安定性が主な研究トピックとなっているが, 他方, 近似 GCD は摂動後の多項式の厳密な GCD でもあり, 数学的な安定性の側面も持っている。本発表では, この数学的な安定性の側面に着目し, 簡単なサーベイと新しい結果について取り上げる。

2 パラメータ係数の GCD

近似 GCD などの係数に誤差を許容した算法では, 誤差をパラメータ ($\vec{u} = u_1, \dots, u_r$) として表現することで, $K[x]$ における GCD の問題から, $K[\vec{u}][x]$ における GCD の問題に帰着させることがある。Gröbner 基底計算では, $K[\vec{u}][x]$ における計算結果が, パラメータに値を代入したあとでも正しい ($K[x]$ における Gröbner 基底になっている) かの研究が進んでいる。これは包括的 Gröbner 基底 [W92] と呼ばれており, 誤差を含む入力に対する近似 Gröbner 基底への応用 [W02] も研究されている。一方, 多項式 GCD に関しては, 包括的 Gröbner 基底に比べると, 包括的な研究はあまり行われていない (表 1 に, 簡単に関係する主な研究を抽出し並べた)。以下では, 順に主な先行研究について簡単に紹介していく。

On the greatest common divisor of polynomials which depend on a parameter [AK93]

この先行研究では, K を体, $K[\alpha][x]$ を, α をパラメータとする x に関する 1 変数多項式環とし, その要素である 2 つの多項式 $u(x, \alpha), v(x, \alpha) \in K[\alpha][x]$ について, その多項式 GCD を α による場合分けで求めるアルゴリズムが提案されている。

*nagasaka@main.h.kobe-u.ac.jp

多項式 GCD	Gröbner 基底
1973 Half-GCD の提案	1965 Buchberger アルゴリズム
1974 近似 GCD の導入 [D74]	
1985 Quasi-GCD [S85]	
1985 GCD by Gröbner bases [GT85]	
1989 Parametric GCD [G89]	1992 Comprehensive Gröbner bases [W92]
1993 Parametric GCD [AK93]	1993 Floating-Point Gröbner bases [S93]
1997 ε -GCD [EGL97]	2003 Gröbner: Inexact Input [W02]
2004 UVGCD [Z11]	2005 Impossible Concept? [S05]
2010 Parametric GCD [A10]	2006 Suzuki-Sato Algorithm [SS06]

表 1: 多項式 GCD と Gröbner 基底の研究の歴史 (概要)

アルゴリズムは, 多項式剰余列に伴う部分終結式の列を用いており, 結果として, $\{\{d_1(\alpha), g_1(x, \alpha)\}, \dots, \{d_r(\alpha), g_r(x, \alpha)\}\}$ という形式の出力が得られる。出力の各ペアにおいて, $d_i(\omega) = 0$ を満たす $\omega \in K$ を代入すると, $\gcd(u(x, \omega), v(x, \omega)) = g_i(x, \omega)$ が成立することが保証されている。

具体的な計算例として, $f_1(x) = x^2 + (\alpha - 1)x + \alpha$, $f_2(x) = (\alpha + 1)x^2 + 2\alpha$ に対し, $\{\{\alpha - 1, x^2 + 1\}, \{3\alpha^2 + 2\alpha, x + 3\alpha\}, \{0, 1\}\}$ が, $f_1(x) = \alpha x^3 + (\alpha^3 - \alpha + 1)x^2 + (\alpha^2 + 2)x + 3\alpha^2 - 3$ と $f_2(x) = \alpha x^3 + (\alpha + 1)x^2 + 4x + 3$ に対し, $\{\{\alpha^2 - 2, 2x^3 + (\alpha + 2)x^2 + 4\alpha x + 3\alpha\}, \{\alpha, x + 3\}, \{0, \alpha x^2 + x + 3\}\}$ が挙げられている。

Complexity of algorithms for computing greatest common divisors ... [A10]

この先行研究では, 有理数体の代数閉包 $\bar{\mathbb{Q}}$ 上の値を取るパラメータ ($\vec{u} = u_1, \dots, u_r$) を係数に持つ, 1 変数の多項式集合 $\{f_1, \dots, f_k\} \subset \mathbb{Q}[u_1, \dots, u_r][x]$ の最大公約因子について取り上げている。具体的に, Parametric Greatest Common Divisor (PGCD) という定義を与え, 入力された多項式集合に対して, その PGCD として $\{\{W_1, g_1\}, \dots, \{W_i, g_i\}\}$ を出力するアルゴリズムが提案されている。

ここで, PGCD は, 各 W_i は $\bar{\mathbb{Q}}^r$ の部分集合から代数的に構成可能で, $g_i \in \mathbb{Q}(u_1, \dots, u_r)[x]$ であること, そして, $\forall \vec{\alpha} \in W_i, g_i(x, \vec{\alpha}) = \gcd(f_1(x, \vec{\alpha}), \dots, f_k(x, \vec{\alpha}))$ が成立するものとして定義されている。

論文で提案されている主なアルゴリズムは 2 つあり, 1 つは, 擬除算による Euclid の互除法であり, もう 1 つは, パラメータ要素の行列に対する Gauss の消去法を用いて, Bézout 係数に関するパラメータを含む線型方程式を解くものである。

以上の先行研究は, パラメータ係数の多項式の GCD を直接的に求めようとするものであるが, 本発表では, 以下に紹介する Gröbner 基底計算による最大公約因子計算法を, パラメータ係数に拡張する。

Gcd's and factoring multivariate polynomials using grobner bases [GT85]

R を可換な単位的ネーター環とし, K を体, a, b, c で生成されるイデアルを $\langle a, b, c \rangle$ で表すとする。この論文では, 以下の 2 つを含むいくつかの結果が述べられている (証明は与えられていない)。

- $f_1, \dots, f_s, g \in R$ とし, J を $\langle f_1, \dots, f_s, J \rangle \ni 1$ を満たす R のイデアルとする。このとき, $\forall k \in \mathbb{N}_{>0}, \langle f_1 \cdot g, \dots, f_s \cdot g, J^k \rangle = \langle g, J^k \rangle$ が成立する。
- $f_1, \dots, f_s, g \in K[x, y_1, \dots, y_n]$ を x に関して原始的, J を $K[y_1, \dots, y_n]$ の極大イデアルで, $\langle f_1, \dots, f_s, J \rangle \ni 1$ と $\exists i, \langle \text{lc}_x(f_i \cdot g), J \rangle \ni 1$ を満たすとする。このとき, G が $\langle f_1 \cdot g, \dots, f_s \cdot g, J^k \rangle$

の全次数順序の簡約 Gröbner 基底ならば、十分大きな k に対し、 $g_k \sim \gcd(f_1 \cdot g, \dots, f_s \cdot g)$ が成立する。ここで、 g_k は最小の全次数を持つ G の要素である。

3 1 変数多項式の場合

本章では、複数のパラメータ ($\vec{u}$) を係数に持つ 1 変数多項式環において、与えられた多項式集合 $F = \{f_1, \dots, f_\ell\} \subset K[\vec{u}][x_1]$ のパラメータによる GCD の場合分け (これをパラメトリック GCD と以後呼ぶ) を求めるものとする。この場合、 $K[x_1]$ は PID (単項イデアル整域) であり、 $\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \langle \gcd(f_1, \dots, f_s) \rangle$ が成立するため、Gianni と Trager の 1985 年の結果を使う必要はなく、包括的 Gröbner 系計算により、直接的にパラメトリック GCD を求めることができる。

定義 1 (包括的 Gröbner 系)

$F \subset K[\vec{u}][x] = K[u_1, \dots, u_\lambda][x_1, \dots, x_\ell]$, $S \subset \bar{K}^\lambda$ に対し、 $G = \{(A_1, G_1), \dots, (A_r, G_r)\}$ が次の 3 つを満たすとき、 F の S 上の包括的 Gröbner 系 (CGS) と呼ぶ。1) $\forall \vec{\omega} \in A_i$, $\sigma_{\vec{\omega}}(G_i)$ は、 $\langle \sigma_{\vec{\omega}}(F) \rangle \subset \bar{K}[\vec{x}]$ の Gröbner 基底である、2) $G_1, \dots, G_r \subset K[\vec{u}][x]$, 3) $A_1, \dots, A_r \subset \bar{K}^\lambda$ は、代数的に構成可能で $S = \bigcup A_i$ を満たす。◁

定義 2 (極小 CGS)

$F \subset K[\vec{u}][x] = K[u_1, \dots, u_\lambda][x_1, \dots, x_\ell]$, $S \subset \bar{K}^\lambda$ に対し、その CGS である $G = \{(A_1, G_1), \dots, (A_r, G_r)\}$ が次の 3 つも満たすとき、極小 CGS と呼ぶ。1) $\forall \vec{\omega} \in A_i$, $\forall g \in G_i$, $\sigma_{\vec{\omega}}(\text{ht}(g)) \neq 0$, 2) $\forall \vec{\omega} \in A_i$, $\sigma_{\vec{\omega}}(G_i)$ は、 $\langle \sigma_{\vec{\omega}}(F) \rangle$ の極小 Gröbner 基底である、3) $A_i \neq \emptyset$ かつ、任意の $i \neq j$ に対し $A_i \cap A_j = \emptyset$ が成り立つ。◁

与えられた多項式集合 $F = \{f_1, \dots, f_\ell\} \subset K[\vec{u}][x_1]$ の全次数順序に関する極小 CGS を $\{(A_1, G_1), \dots, (A_r, G_r)\}$ とする。このとき、各 G_i の最小順序多項式を $g_i(x_1, \vec{u})$ とすれば、 $\mathcal{G} = \{(A_1, g_1), \dots, (A_r, g_r)\}$ は、 F のパラメトリック GCD を与えることは定義から明らかである。なお、この方法は、Fortuna ら [FGT01] でも多少言及されているが、極小 CGS とパラメトリック GCD は同じものではないので注意が必要である。

例 1

Abramov ら [AK93] による計算例で使われた以下の多項式に対してパラメトリック GCD を求める。

$$f_1(x) = x^2 + (\alpha - 1)x + \alpha, \quad f_2(x) = (\alpha + 1)x^2 + 2\alpha$$

Nabeshima[N12] による CGS 計算アルゴリズムを用い、 $F = \{f_1, f_2\}$ の極小 CGS を計算し、それからパラメトリック GCD を求めたものが次式である (極小化は手計算による)。

$$\begin{aligned} & \{(\{\omega_1 \in \mathbb{C} \mid \omega_1 = 0\}, x_1), (\{\omega_1 \in \mathbb{C} \mid \omega_1 - 1 = 0\}, x_1^2 + 1), \\ & (\{\omega_1 \in \mathbb{C} \mid 3\omega_1 + 2 = 0\}, x_1 - 2), (\{\omega_1 \in \mathbb{C} \mid 3\omega_1^3 - \omega_1^2 - 2\omega_1 \neq 0\}, 1)\}. \end{aligned}$$

Abramov らの結果 ($\{(\{\alpha - 1, x^2 + 1\}, \{3\alpha^2 + 2\alpha, x + 3\alpha\}, \{0, 1\})\}$) とほぼ同じことが確認できる。◁

例 2

同様に、Abramov ら [AK93] による計算例で使われた以下の多項式に対してパラメトリック GCD を求める。

$$f_1(x) = \alpha x^3 + (\alpha^3 - \alpha + 1)x^2 + (\alpha^2 + 2)x + 3\alpha^2 - 3, \quad f_2(x) = \alpha x^3 + (\alpha + 1)x^2 + 4x + 3$$

Nabeshima[N12] による CGS 計算アルゴリズムを用い、 $F = \{f_1, f_2\}$ の極小 CGS を計算し、それからパラメトリック GCD を求めたものが次式である (極小化は手計算による)。

$$\begin{aligned} & \{(\{\omega_1 \in \mathbb{C} \mid \omega_1 = 0\}, x_1 + 3), (\{\omega_1 \in \mathbb{C} \mid \omega_1^2 - 2 = 0\}, 2x_1^3 + (u_1 + 2)x_1^2 + 4u_1x_1 + 3u_1), \\ & (\{\omega_1 \in \mathbb{C} \mid \omega_1^3 - 2\omega_1 \neq 0\}, (u_1^3 - 2u_1)x_1^2 + (u_1^2 - 2)x_1 + 3u_1^2 - 6)\}. \end{aligned}$$

最後の組も、簡約表現にすれば、Abramov らの結果 ($\{\{\alpha^2 - 2, 2x^3 + (\alpha + 2)x^2 + 4\alpha x + 3\alpha\}, \{\alpha, x + 3\}, \{0, \alpha x^2 + x + 3\}\}$) と同じであることが確認できる。◁

3.1 パラメトリック GCD の包括的 Gröbner 基底に準ずる GCD の存在

パラメータ係数多項式に対する包括的 Gröbner 系には、附随して、包括的 Gröbner 基底がある。

定義 3 (包括的 Gröbner 基底)

$F \subset K[\vec{u}][\vec{x}] = K[u_1, \dots, u_\lambda][x_1, \dots, x_\ell]$, $S \subset \bar{K}^\lambda$ に対して, $G \subset K[\vec{u}][\vec{x}]$ が, F の S 上の包括的 Gröbner 基底 (CGB) であるとは, $\forall \vec{w} \in S$, $\sigma_{\vec{w}}(G_i)$ が, $\langle \sigma_{\vec{w}}(F) \rangle \subset \bar{K}[\vec{x}]$ の Gröbner 基底あることを言う。◁

パラメトリック GCD が極小 CGS から計算可能という事実に際し, パラメトリック GCD の各組を包括的 Gröbner 基底のように 1 つに束ねられるか, という自然な疑問が湧く。しかしながら, 一般に存在しないことが, $f_1(x_1, u_1) = x_1 - u_1$ と $f_2(x_1, u_1) = x_1 - 1$ に対するパラメトリック GCD から簡単に分かる。これらの多項式のパラメトリック GCD は, $\{(\{\omega_1 \in \mathbb{C} \mid \omega_1 = 1\}, x_1 - 1), (\{\omega_1 \in \mathbb{C} \mid \omega_1 \neq 1\}, 1)\}$ である。もし, 1 つに束ねられるなら, 次の $g(x_1, u_1) \in \mathbb{C}[u_1][x_1]$ が存在しなければならない。

$$g(x_1, u_1) = \begin{cases} x_1 - 1 & (u_1 = 1), \\ 1 & (u_1 \neq 1). \end{cases}$$

しかし, この性質を満たす多項式は当然存在しない。一方, パラメトリック GCD に含まれる組の数を最小化 (常に組の数は 2 つ以下) することは, パラメータの数が 1 つならば可能である (計算例は省略する)。

4 多変数多項式の場合

本章では, まず, Gianni と Trager の 1985 年の結果を次のように若干の改善を行う。

定理 4

$f_1, \dots, f_s, g \in K[x, \vec{y}] = K[x, y_1, \dots, y_n]$ を x に関して原始的な多項式, $J \subset K[\vec{y}]$ を極大イデアルで, $\langle f_1, \dots, f_s, J \rangle \ni 1$, $\exists i, \langle \text{lc}_x(f_i \cdot g), J \rangle \ni 1$ を満たすとする。 w_1 を x の重み, w_2 を $\vec{y}$ に関する全次数に対する重みとして, G を, $\langle f_1 \cdot g, \dots, f_s \cdot g, J^k \rangle$ の w_1, w_2 による重み付き全次数順序に関する Gröbner 基底とする (簡約でなくてよい)。このとき, 次のどちらかが満たされるならば, $\text{gcd}(f_1 \cdot g, \dots, f_s \cdot g) \sim \bar{g}$ が成り立つ。ここで, $\bar{g}$ は, G の重み付き全次数が最小の要素である。

- $(J^k \text{ の最小全次数 }) > \text{tdeg}(g)^2$
- $(J^k \text{ の最小全次数 }) > \left(\frac{\deg_x(g)}{w_2} + \frac{\text{tdeg}_{\vec{y}}(g)}{w_1} \right) \text{wdeg}_{w_1, w_2}(g)$

ここで, $\text{tdeg}(\cdot)$ は $x, \vec{y}$ に関する全次数, $\deg_x(\cdot)$ は x に関する次数, $\text{tdeg}_{\vec{y}}(\cdot)$ は $\vec{y}$ に関する全次数, $\text{wdeg}_{w_1, w_2}(\cdot)$ は重み付き全次数を表す。◁

この定理の証明は, Gianni と Trager の論文の意図に沿って可能であり, ここではその概略を示しておく。まず, $\langle f_1, \dots, f_s, J \rangle \ni 1 \implies \langle f_1, \dots, f_s, J^k \rangle \ni 1$ と, $g \in \langle f_1 \cdot g, \dots, f_s \cdot g, J^k \rangle \implies \langle f_1 \cdot g, \dots, f_s \cdot g, J^k \rangle \supset \langle g, J^k \rangle$ であることから, $\langle f_1 \cdot g, \dots, f_s \cdot g, J^k \rangle = \langle g, J^k \rangle$ を得る。次に, $\bar{g} \in \langle g, J^k \rangle \implies \exists h \in K[x, \vec{y}], \bar{g} \equiv h \cdot g \pmod{J^k}$ である事実から, $\text{res}_x(g, \bar{g}) \equiv 0 \pmod{J^k}$ であること, 即ち, $\text{res}_x(g, \bar{g}) \in J^k$ を得る。終結式の次数上限に関して, $\text{tdeg}(\text{res}_x(g, \bar{g})) \leq \deg_x(g) \text{tdeg}_{\vec{y}}(\bar{g}) + \deg_x(\bar{g}) \text{tdeg}_{\vec{y}}(g)$ が成り立つことから, $\bar{g} \in \langle g, J^k \rangle \implies \text{res}_x(g, \bar{g}) = 0$ が得られる。最終的に, $\bar{g}$ が G の重み付き全次数最小の要素であることと, $g(x, \vec{y})$ が x に関して原始的であることから, 定理の主張である $g(x, \vec{y}) \sim \bar{g}(x, \vec{y})$ が証明される。

4.1 パラメトリック GCD の計算方法

定理 4 を用いて, $F = \{f_1, \dots, f_\ell\} \subset K[\bar{u}][\bar{x}]$ に対するパラメトリック GCD の計算法を提案する。まず, Gianni と Trager の 1985 年の結果やその改善である定理 4 を利用するには, 1 変数の場合と異なり, いくつか満たさなければならない条件が存在する。それぞれについて解決方法を述べる。

$\sigma_{\bar{\omega}}(f_1), \dots, \sigma_{\bar{\omega}}(f_s)$ は x_1 に関して原始的

原始的部分の取り出しは, 再帰的に Parametric GCD を計算することで実現できる。

$\sigma_{\bar{\omega}}(J)$ は極大イデアル

K が代数閉体 ($K = \bar{K}$) ならば, 相違なる定数項を持つ $h_i(x_i, \bar{u})$ を x_i に関してモニックかつ $\deg_{x_i}(h_i) = 1$ と取れば, $\langle h_2, \dots, h_\ell \rangle$, $h_i \in K[\bar{u}][x_i]$ は常に極大イデアルとできる。そうでない場合 ($K \neq \bar{K}$) は, $\sigma_{\bar{\omega}}(h_2), \dots, \sigma_{\bar{\omega}}(h_\ell)$: を K 上既約で互いに素に取れば, $\langle h_2, \dots, h_\ell \rangle$, $h_i \in K[\bar{u}][x_i]$ は常に極大イデアルとできる。

$\exists i, \langle \text{lc}_{x_1}(\sigma_{\bar{\omega}}(f_i)), \sigma_{\bar{\omega}}(J) \rangle \ni 1$

この条件は, パラメータ係数を K の要素に写す Specialization に依存し, 一般に保証する J は存在しない。そのため, 新たなパラメータ v を導入し, $K[\bar{u}][\bar{x}]$ を $K[\bar{u}, v][\bar{x}]$ に埋め込み, v で条件の組に分割し計算を繰り返す必要がある。

$\langle \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_s, \sigma_{\bar{\omega}}(J) \rangle \ni 1$

この条件は, いわゆる「法がラッキーか」という問題であり, 上の条件と同じく Specialization に依存するため, 満たされない場合は, 当該の条件の組のみを再計算する必要がある。なお, $\bar{f}_i(\bar{x}) \in K[\bar{x}]$: $\sigma_{\bar{\omega}}(f_i)$ は, $\text{gcd}(\sigma_{\bar{\omega}}(f_1), \dots, \sigma_{\bar{\omega}}(f_s))$ による余因子で, これは包括的 Gröbner 基底や系の計算の枠組みで求められる。

$\sigma_{\bar{\omega}}(G)$ は重み付き全次数順序に関する Gröbner 基底

Gianni と Trager による 1985 年の結果では, 簡約 Gröbner 基底であることが求められていたが, 定理 4 により簡約条件を外したため, より効率的に計算することが可能となっている。

参 考 文 献

- [AK93] Abramov, S. A., Kvaschenko, K. Y., 1993. On the greatest common divisor of polynomials which depend on a parameter. In: Proceedings of the 18th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. ISSAC '93. ACM, New York, NY, USA, pp. 152–156.
- [A10] Ayad, A., 2010. Complexity of algorithms for computing greatest common divisors of parametric univariate polynomials. Int. J. Algebra 4 (1-4), 173–188.
- [AFA13] Ayad, A., Fares, A., Ayyad, Y., 2013. Parametric euclidean algorithm. Theoretical Mathematics and Applications 3 (3), 13–21.
- [D74] Dunaway, D. K., 1974. Calculation of zeros of a real polynomial through factorization using Euclid's algorithm. SIAM J. Numer. Anal. 11, 1087–1104.
- [EGL97] Emiris, I. Z., Galligo, A., Lombardi, H., 1997. Certified approximate univariate GCDs. J. Pure Appl. Algebra 117/118, 229–251, algorithms for algebra (Eindhoven, 1996).
- [FGT01] Fortuna, E., Gianni, P., Trager, B., 2001. Degree reduction under specialization. J. Pure Appl. Algebra 164 (1-2), 153–163, effective methods in algebraic geometry (Bath, 2000).

- [GT85] Gianni, P., Trager, B., 1985. Gcd's and factoring multivariate polynomials using grobner bases. In: Caviness, B. (Ed.), EUROCAL '85. Vol. 204 of Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, pp. 409–410.
- [G89] Grigor'ev, D. Y., 1989. Complexity of quantifier elimination in the theory of ordinary differential equations. In: EUROCAL '87 (Leipzig, 1987). Vol. 378 of Lecture Notes in Comput. Sci. Springer, Berlin, pp. 11–25.
- [N12] Nabeshima, K., 2012. Stability conditions of monomial bases and comprehensive grobner systems. In: Gerdt, V., Koepf, W., Mayr, E., Vorozhtsov, E. (Eds.), Computer Algebra in Scientific Computing. Vol. 7442 of Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, pp. 248–259.
- [S85] Schönhage, A., 1985. Quasi-gcd computations. J. Complexity 1 (1), 118–137.
- [S93] Shirayanagi, K., 1993. An algorithm to compute floating point Gröbner bases. In: Proceedings of the Maple summer workshop and symposium on Mathematical computation with Maple V : ideas and applications. Birkhauser Boston Inc., Cambridge, MA, USA, pp. 95–106.
- [S05] Stetter, H. J., 2005. Approximate Gröbner bases – an impossible concept? In: Proceedings of SNC 2005 (Symbolic-Numeric Computation). pp. 235–236.
- [SS06] Suzuki, A., Sato, J., 2006. A simple algorithm to compute comprehensive Gröbner bases using Gröbner bases. In: ISSAC 2006. ACM, New York, pp. 326–331.
- [W92] Weispfenning, V., 1992. Comprehensive Gröbner bases. J. Symbolic Comput. 14 (1), 1–29.
- [W02] Weispfenning, V., 2002. Gröbner bases for inexact input data. In: Proceedings of CASC 2003 (Computer Algebra in Scientific Computing). pp. 403–411.
- [Z11] Zeng, Z., 2011. The numerical greatest common divisor of univariate polynomials. In: Randomization, relaxation, and complexity in polynomial equation solving. Vol. 556 of Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp. 187–217.