

Arnold 拡散

京大・理 戸 谷 隆 雄

可積分でない保存力学系の安定性に関わる現象の一つで、系の次元と密接に結びついている。

可積分系に弱い摂動が加わりその結果可積分ではなくなった場合を考える。各自由度間の共鳴によって摂動展開級数の収束性は保証されなくなるが、適当な条件のもとでは、摂動が加わった後もいくつかの不変トーラスが生き残ることが示されている。これを Kolmogorov, Arnold, Moser の頭文字をとって KAM トーラスと呼ぶ。系の自由度 N (相空間の次元は $2N$) が小さい間はこの KAM トーラスにさえぎられることにより、可積分でない系でも、その状態は初期状態に応じた相空間のある領域に閉じこめられたままとなり、任意の他の状態に大きく移りかわっていくことはない。しかし $N \geq 3$ では、相空間の $2N - 1$ 次元の等エネルギー面は、 N 次元の KAM トーラスによっては、独立した領域に分割されなくなり、摂動の指数 $\epsilon \rightarrow 0$ でも初期状態から大きくはなれた状態に変化しうることが示された。たとえば $N = 3$ を例にとると、5次元の等エネルギー面を3次元の KAM 面でいくつかの閉じた領域に分割できないということになる。KAM トーラス以外のストカスティックな領域に初期点をとったとき、相空間における系の代表点は KAM 面を抜けて拡散していくように振舞うため、この現象を Arnold 拡散と呼ぶ。

一般にこの拡散の係数は大変小さく、惑星系の安定性では特に問題になる程ではない。しかしリング型加速器のように短時間に粒子が多数回まわるような場合には重要な問題となる。多くのモデルで計算機を用いた研究がなされているが、定量的な計算については一般に未解決な点が残されている。

参考文献

R. H. G. Helleman, in *Fundamental Problems in Statistical Mechanics V*, E. G. Cohen ed. (North Holland, 1980)