

2 レーン ASEP モデルの特解と性質

京都大学 理学研究科 光藤 哲也¹ 早川 尚男²

一次元 ASEP (Asymmetric Simple Exclusion Process) という確率モデルは、一次元において可解であり、様々な応用が期待されている。今回我々はレーンを二本に拡張したモデルを考え、そのモデルの大まかな振る舞いと、特解が求まる領域について述べる。また、レーンチェンジのルールや、その効果などについても比較する。

1 導入

排他ルールのある多粒子系の確率モデルである ASEP (Asymmetric Simple Exclusion Process) は、近年様々な研究がなされている。生物物理や衝撃波への応用や、スピンモデルとの関連も指摘されている。また ASEP は、交通流の単純化したモデルとしても注目を集めている。[1]

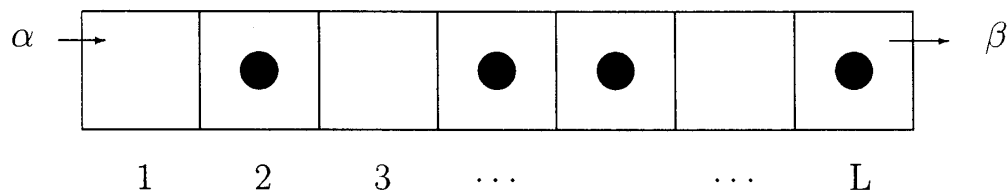


図 1 : 両端で粒子の出入りのある一次元 ASEP のスナップショット

一次元 ASEP はまた、バートン仮説法、行列の方法などで、定常状態の厳密解が求まるモデルとして知られている。[2,3] 我々は、特に、右なら右にしか粒子が移動しない TASEP (Totally ASEP) モデルに注目した。中でも、境界条件として、両端で粒子の出入りのあるモデルでは、両端での出入りする割合によって、相図が書けることが知られている。

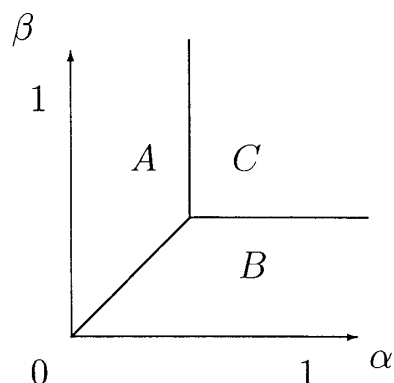


図 2 : Open boundary ASEP の相図

A : 低密度相 (非渋滞相)

B : 高密度相 (渋滞相)

C : 最大流量相

¹E-mail: mitsudo@yuragi.jinkan.kyoto-u.ac.jp

²E-mail: hisao@yuragi.jinkan.kyoto-u.ac.jp

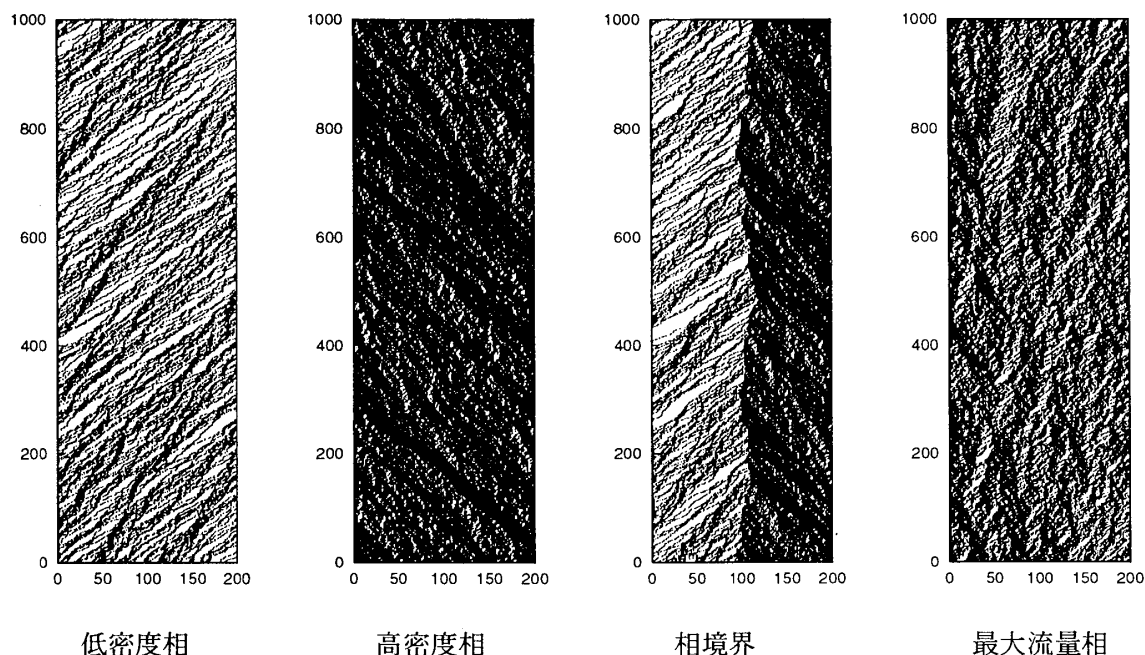


図3：各相における時間発展の様子。上方向に時間発展している。横軸は位置。

そ

こで、今回我々は、レーンを二本に拡張することを考えた。これは、モデルの2次元拡張へのステップでもあり、また、交通流への応用側面からも重要である。交通流では、レーンチェンジや追い越しをすることができるようになり、ただ単に一本の車線を二つつなげただけではないようになることが期待される。つまり、追い越しなどの効果で全体の流量が増加することが期待される。

以下では、2レーンモデルの紹介とその定常的な運動の様子を概観し、その特解の求まる場合についてその導出を簡単に説明し、そして、レーンチェンジのルールや割合により密度や流量といった物理量の変化を、特解が求まる場合に対してシミュレーションにより比較する。

2 2レーンモデル

2.1 モデルの導入

以下の図のように、2レーンモデルを導入する。まず、一次元鎖を二本並べる。空間は離散、時間は連続で扱う。左端で左端に粒子がないときに粒子の入る割合をそれぞれ α_1, α_2 とし、右端に粒子があるときに右端から粒子が出て行く割合を β_1, β_2 とする。さらに、2レーン目から1レーン目に粒子が移る割合を p 、1レーン目から2レーン目に移る割合を q とする。粒子はそれぞれ単位時間当たり1の割合で右に移り、行き先に粒子がある場合は運動せずに留まる。

1レーンモデルとの違いはレーンチェンジが存在することであるが、モデルとして次の二つを考えてみたいと思う。まずはモデルAとして、となりが空いていたらレーンチェンジをするというモデルを考える。これは、前を見ないので、交通流で考えると、無意味にレーンチェンジをしている状況になり、あまり現実的でないが、後述のように可解な場合となっている。そこで、前を見て、前に粒子が在るときにレーンチェンジをするモデルをモデルBとする。これは、より現実的なモデルとなっていると思われる。

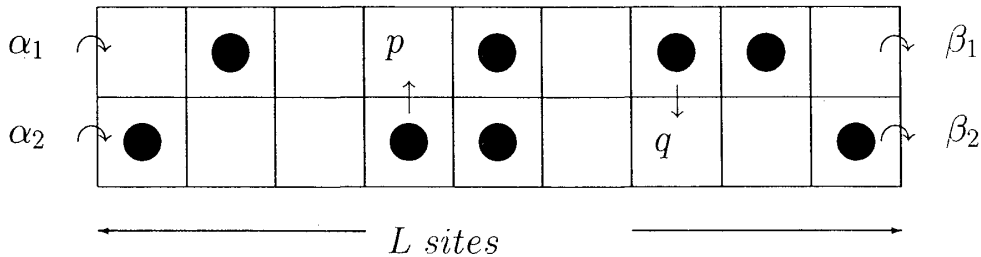


図4：2レーン TASEP モデルのスナップショット

パラメーターの取り方によって、系の様子は様々なふるまいをする。レーン毎に見ると、1次元の定常状態の組合せの状態が実現することが予想されるし、シミュレーションでも確認することができる。例えば、1レーン目は低密度相で2レーン目は高密度相が実現するような境界のパラメーターをとったとき、レーンチェンジの割合としては、1レーン目から2レーン目へと移る割合の方が多くなるようにパラメーターをとる。しかし、どのパラメーター領域でどのような定常状態が実現し、相図のようなものを書けるかどうかについては、シミュレーションをすることでわかるが、今のところきっちりと求まてはいない。

2.2 行列の方法による解析解

次に、1レーンで成功した行列の方法 [2,3] を使って、この2レーンモデルの定常状態の解析をする。ここで用いたのはより簡単なモデルAである。一レーンでは、各サイトに粒子の有無に対応した2状態を考えていたが、ここでは、各サイトに4状態があるとして考える。すなわち、両レーンに粒子が無い状態、1レーン目に粒子が在る状態、2レーン目に粒子が在る状態、両レーンに粒子が在る状態の4状態である。各状態に対応して、4つの行列 A, B, C, D を考えると、系の確率密度ベクトルは、

$$|P\rangle = \frac{1}{Z_L} \langle W | \prod_{i=1}^L ((1 - \tau_{i,1})(1 - \tau_{i,2})A + (1 - \tau_{i,1})\tau_{i,2}B + \tau_{i,1}(1 - \tau_{i,2})C + \tau_{i,1}\tau_{i,2}D) | V \rangle \quad (1)$$

と書け、分配関数に当たる Z_L は、

$$Z_L = \langle W | (A + B + C + D)^L | V \rangle \quad (2)$$

である。ここで、 $\tau_{i,1}, \tau_{i,2} = 0, 1$ で i 番目のサイトでの粒子の有無を表す。系の時間発展はマスター方程式、

$$\frac{d}{dt}|P\rangle = H|P\rangle \quad (3)$$

$$H = h_1 + \sum_{i=1}^{L-1} h_{i,i+1} + h_L \quad (4)$$

で表されるが、以下の条件を満たすような a, b, c, d が存在すれば、 $H|P\rangle = 0$ であることが知られている。つまり、 $|P\rangle$ が定常状態の解になっていることがわかる。一般には a, b, c, d は行列でも構

わないが、本研究で考えたのはスカラーである場合のみである。

$$h_{i,i+1} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \zeta \left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \right] \quad (5)$$

$$\langle W | h_1 \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = -\zeta \langle W | \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$h_L \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} |V\rangle = \zeta \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} |V\rangle \quad (7)$$

ζ は定数である。遷移率行列 H は 16×16 の行列であり、ここでは陽には書かない。 $\langle W |, |V\rangle$ についても、上の条件を満たせばどんなものでもよい。

まず、(5)(6)(7) 式の中で矛盾が無いような条件を求めて行く。すると、以下の式が出てくる。

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = 1 \quad (8)$$

$$\frac{p}{q} = \frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_2 \beta_1} \quad (9)$$

また b, c, d は a の式で書けて、 a の分だけ任意性が残るので、式がきれいになるように選んでやると、

$$\langle W | A = \frac{\zeta}{\alpha_1 \alpha_2} \langle W | \quad (10)$$

$$D |V\rangle = \frac{\zeta}{\beta_1 \beta_2} |V\rangle \quad (11)$$

$$\langle W | B = \frac{\zeta}{\alpha_1 \beta_2} \langle W |, \quad B |V\rangle = \frac{\zeta}{\alpha_1 \beta_2} |V\rangle \quad (12)$$

$$\langle W | C = \frac{\zeta}{\alpha_2 \beta_1} \langle W |, \quad C |V\rangle = \frac{\zeta}{\alpha_2 \beta_1} |V\rangle \quad (13)$$

ということがわかる。さて、分配関数などを計算して行くときに、行列が可換であるときは、簡単に計算することができて、

$$Z_L = \langle W | X^L |V\rangle = \left(\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} \right)^L \quad (14)$$

である。さらに密度や流量も求まって、

$$\langle n_{j,1} \rangle = \alpha_1 \quad (15)$$

$$\langle n_{j,2} \rangle = \alpha_2 \quad (16)$$

$$J_1 = \alpha_1 (1 - \alpha_1) \quad (17)$$

$$J_2 = \alpha_2 (1 - \alpha_2) \quad (18)$$

となる。

ここで求まった解は、1レーンの解と同じ形をしている。つまり、条件(8))(9)式を満たすときには、レーンチェンジの効果が消えてしまったことになる。

現在のところ、行列 A, B, C, D が非可換である場合は、計算できない。解が求まる場合には追い越しの効果などが見られないので、以下では、シミュレーションをして、この解を元に比較してみようと思う。

2.3 シミュレーションとの比較

シミュレーションにはモンテカルロ法を用いた。時間発展をランダムアップデート（つまり粒子の運動をランダムに抽出して粒子を前に進める。）を用いた。1時間ステップは、シミュレーション方法により決まるステップである。

まず、求めた解との比較のためルールAで定常状態をシミュレーションしてみた。定常状態ではbulkでは観測位置によらないので、密度、流量は、真中の点で観測をした。流量はその点を通り過ぎた粒子の数、密度はその点にいた粒子の数を、総時間で平均した。総時間は 2^{19} ステップである。シミュレーションをしたパラメーター領域は、

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = 1 \quad (19)$$

$$p = \alpha_1 \beta_2 = \alpha_1 (1 - \alpha_2) \quad (20)$$

$$q = \alpha_2 \beta_1 = \alpha_2 (1 - \alpha_1) \quad (21)$$

である。図5では、シミュレーション結果と、解析解を重ねてプロットしてある。 x, y 軸はそれぞれ α_1, α_2 であり、これでパラメーター領域をほとんどつくっている。図からすぐ見て取れるとおり、解析解とシミュレーションがぴったり一致した。これから、解析解が特解となっているだけでなく実際に安定な定常解となっていることが示された。

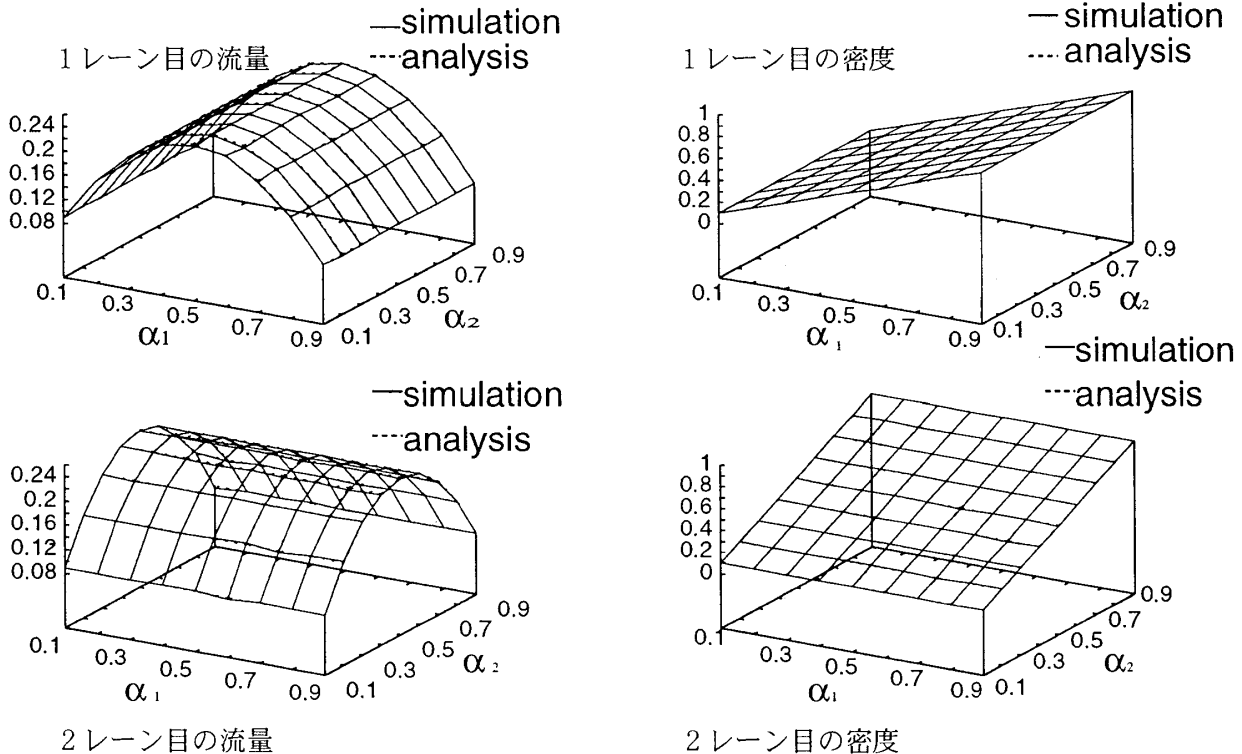


図5：解が求まるときの、解とシミュレーション結果の比較。実線が解析解、破線がシミュレーション。

次に、モデル B についてシミュレーションしてみる。粒子が前に在る場合にのみレーンチェンジをするとして、シミュレーションをすると、密度は場所によらず、流量だけ場所による領域が出てきた。しかし、境界から十分離れた点では位置によらない変化なので、観測点を中点にして、密度と流量を観測した。図 6 では、解析解と、モデル B で観測したシミュレーション結果の差をとった。両レーンあわした密度と流量をプロットした。

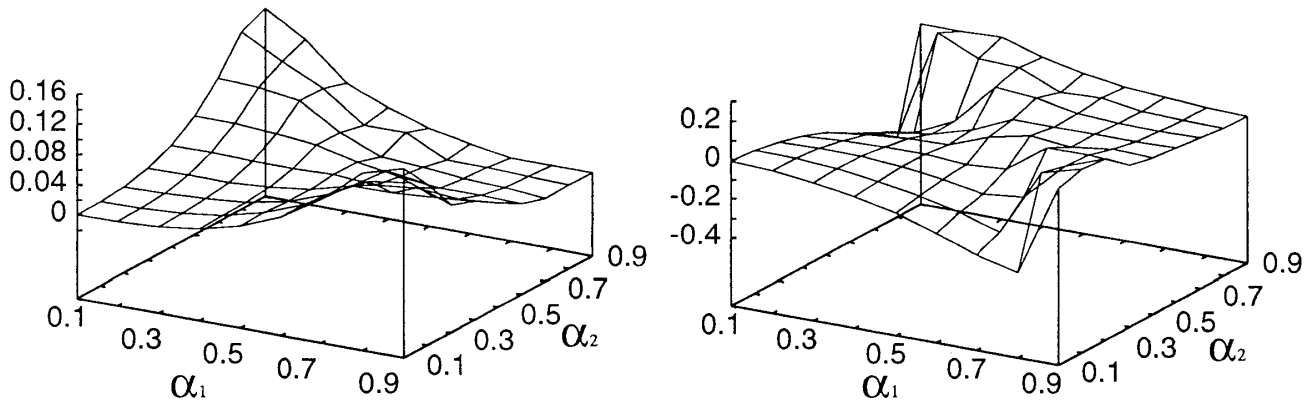


図 6：モデル A の解析解とモデル B での密度と流量の差。左が流量で右が密度。

両者の差が負になっている領域はないのだが、ここで注目したいのは、流量に差が大きく出ている領域とそうでない領域にわかれているところである。流量に差が出ている領域では、片側のレーンに粒子が詰まっていて、粒子が詰まっている方に粒子は行きやすいパラメーター領域となっているが、空いているレーンに行けば元に戻りにくいので、その効果で流量が増えている。

さて、この場合、詰まっているレーンに粒子が移動しやすいという領域なので、流量が増えた。この領域で、 p と q との割合を変えてみることで、流量や密度がどう変わるかを見てみる。そうすると、モデル A とモデル B の差をその割合に反映させることができるかもしれないからである。

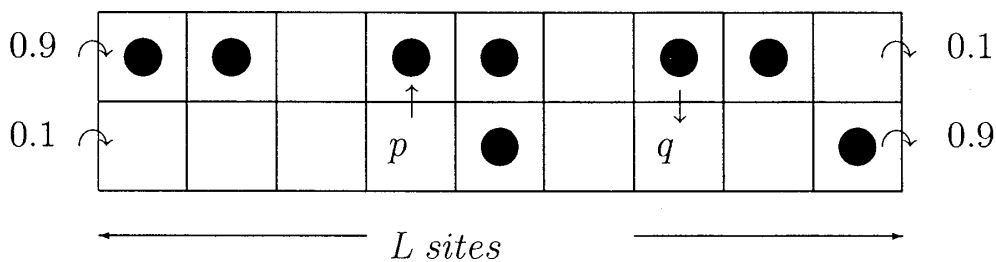


図 7：流量が増える領域のスナップショット

さて、

$$p = \Delta q \quad (22)$$

という Δ を定義する。両端のパラメーターを図 7 のように固定 ($\alpha_1 = \beta_2 = 0.9, \alpha_2 = \beta_1 = 0.1$) して、この Δ だけを変えて先程と同様に密度や流量を測定してみる。そして、得られたグラフが図 8 で、 Δ の値に対して密度と流量がどう変わるかをプロットした。

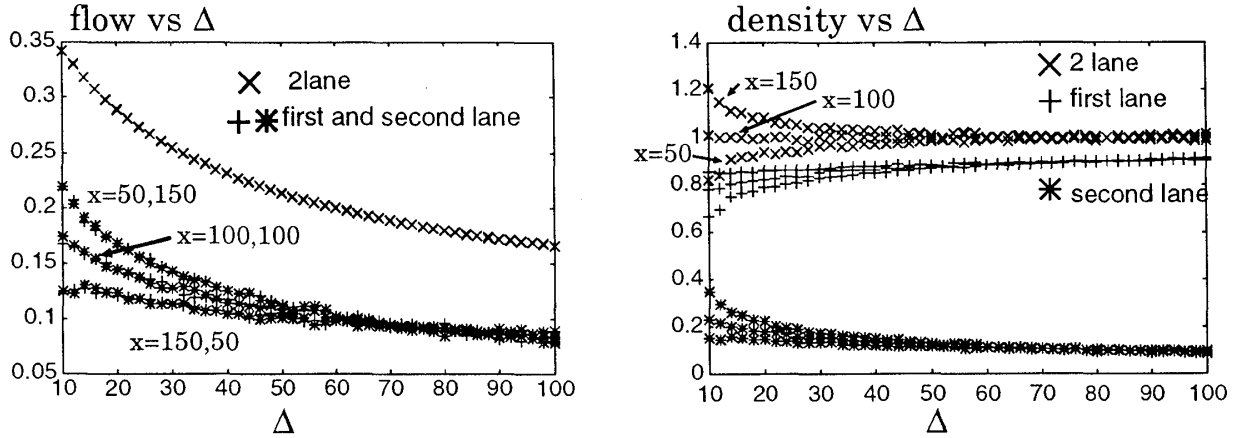


図8：レーンチェンジのバイアス Δ に対する密度と流量。左が流量で右が密度。
 Δ の値が小さいところでは密度は両レーンとも位置に比例して大きくなるが、
 流量の方は1レーン目が位置に反比例するのにに対し、2レーン目は比例する。

x は位置を表す。ここで、解析解が求まるところは、 $\Delta = 81$ のところである。実際、

$$\frac{p}{q} = \frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_2 \beta_1} = \frac{0.9 \times 0.9}{0.1 \times 0.1} = \Delta \quad (23)$$

という式が成り立つのが、解けるときの条件だったからである。 Δ がその値付近では、流量と密度は位置によらないが、 Δ が小さくなるにつれだんだん位置による違いが出てくる。しかし、2レーンあわせた流量は位置によっていないことが見て取れる。

3 まとめ

1レーン open boundary TASEP の拡張として、レーンを2レーンにしたモデルを考え、流量や密度といった量を見ることで、モデルのふるまいを調べた。系は様々な運動状態をとることがシミュレーションをすることでわかるが、行列の方法を使うことで、そこで使われる行列が可換である場合に解が求まることを示した。解が求まるときには、条件がつき、それは2レーンを一本ずつに分けてみたときそれぞれ1レーンと同じ解が得られるときで、レーンチェンジのルールは前を参照しないルールだった。次に、レーンチェンジのときに前を参照するモデルについて、解が求まる場合との比較をシミュレーションすることで行った。すると、流量が増える領域があることがわかった。

今後の課題としては、レーンチェンジのルールの増分をどう定式化するか、ということだと思う。様々な方法で試みてはいるが、まだうまく行っていないというのが実状である。

- [1] D. Helbing, Rev. Mod. Phys. **73**, 1067(2001)
- [2] B. Derrida, M.R. Evans, V. Hakim, and V. Pasquier, J. Phys. A **26**, 1493(1993)
- [3] 笹本智弘、物性研究 **79** 881 (2003)