

完全2組グラフのバイパートイト分解について

新居浜高専 潮 和彦

1. はじめに

$n_1 + n_2$ 個の点と $n_1 n_2$ 本の線からなる完全2組グラフ K_{n_1, n_2} を, $k_1 + k_2$ 個の点と $k_1 k_2$ 本の線からなる完全2組グラフ K_{k_1, k_2} の和 (互いに線を共有しない) に分解する問題 (バイパートイト分解問題, K_{k_1, k_2} 分解問題) を考える。

K_{n_1, n_2} が K_{k_1, k_2} 分解可能であるための必要十分条件について述べる。

2. 隣接行列とバイパートイト分解定理

K_{n_1, n_2} の2組の点集合を V_1, V_2 ($|V_1| = n_1, |V_2| = n_2$) とする。 V_1 の点を k_1 個と V_2 の点を k_2 個もつサブグラフ K_{k_1, k_2} を A型ブロック とよび, V_2 の点を k_1 個と V_1 の点を k_2 個もつサブグラフ K_{k_1, k_2} を B型ブロック とよぶ。 V_1 の点 u_i と V_2 の点 v_j を線で結ぶとき (i, j) 要素を 1 とし, 結ばないとき 0 とすれば, 各ブロックに対して $n_1 \times n_2$ の 0-1 行列 (隣接行列) が対応する。

A型ブロックに対応する隣接行列を A型行列 とよび、B型ブロックに対応する隣接行列を B型行列 とよぶ。どの要素も1となる $n_1 \times n_2$ の行列を M_G とすれば、 K_{n_1, n_2} には M_G が対応する。このとき、明らかに次の定理が成り立つ。

定理 1 K_{n_1, n_2} が b_1 個の A 型ブロック $B_A^{(p)}$ と b_2 個の B 型ブロック $B_B^{(q)}$ にバイパータイト分解可能である

$$\Leftrightarrow M_G = \sum_{p=1}^{b_1} M_A^{(p)} + \sum_{q=1}^{b_2} M_B^{(q)}$$

ここに、 $M_A^{(p)}$ は $B_A^{(p)}$ に対応する A 型行列、 $M_B^{(q)}$ は $B_B^{(q)}$ に対応する B 型行列である。

0-1 行列の存在とその構成アルゴリズム、およびバイパータイト分解に関して、次の一連の lemma を得る。

Lemma 2 行和ベクトル $(r_1, r_2, \dots, r_{n_1})$ と列和ベクトル $(s_1, s_2, \dots, s_{n_2})$ をもつ $n_1 \times n_2$ の 0-1 行列が存在する

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n_1} r_i = n_2 s \quad \text{かつ} \quad r_i \leq n_2.$$

そのような 0-1 行列を直接次の構成アルゴリズムで作ることができる。

Lemma 3 (アルゴリズム)

(1) 2本の数列を作る。

$$R: \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{r_1}, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{r_2}, \dots, \underbrace{n_1, n_1, \dots, n_1}_{r_{n_1}}$$

$$C: 1, 2, \dots, n_2, 1, 2, \dots, n_2, \dots, 1, 2, \dots, n_2$$

(2) R, C の k 成分をそれぞれ $i_R(k), j_C(k)$ とする。

(3) $E = \{(i_R(k), j_C(k)) \mid k = 1, 2, \dots, n_2 \rho\}$ とする。

(4) $n_1 \times n_2$ の 0-1 行列 $M = \|m_{ij}\|$ を

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & (i, j) \in E \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で定義する。

$\Rightarrow M$ は行和ベクトル $(r_1, r_2, \dots, r_{n_1})$ と列和ベクトル $(\rho, \rho, \dots, \rho)$ をもつ $n_1 \times n_2$ の 0-1 行列である。

(証明) $r_i \leq n_2$ より $(i_R(k), j_C(k)) = (i_R(k'), j_C(k')) \Leftrightarrow k = k'$ である。行番号 i が R に r_i 度現れる、列番号 j が C に ρ 度現れるので、 $\sum_{j=1}^{n_2} m_{ij} = r_i, \sum_{i=1}^{n_1} m_{ij} = \rho$ である。

この行列 M は、その行和ベクトル $(r_1, r_2, \dots, r_{n_1})$ と列和ベクトル $(\rho, \rho, \dots, \rho)$ が特殊な値をもつとき、次のように A 型行列の和で表わされる。

Lemma 4 $r_i, \rho, n_2 \rho$ がそれぞれ $k_2, k_1, k_1 k_2$ の倍数である

$$\Rightarrow M = \sum_{p=1}^{b_1} M_A^{(p)}, \quad b_1 = \eta_2 \rho / k_1 k_2.$$

(証明) Lemma 3 に与えられた E の要素からなる数列を考える。

$$X: e(1), e(2), \dots, e(T)$$

ここに, $T = \eta_2 \rho$, $e(k) = (i_R(k), j_C(k))$ である。 $t = T/k_1$, $b_1 = t/k_2$ とおく。この数列の始めの t 個を α_1 行に, 次の t 個を α_2 行に, $\dots$, 最後の t 個を α_{b_1} 行に並べれば, 次の様な $k_1 \times t$ の配列を得る。

$$\begin{array}{cccc} e(1) & e(2) & \dots & e(t) \\ e(t+1) & e(t+2) & \dots & e(2t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e(T-t+1) & e(T-t+2) & \dots & e(T) \end{array}$$

この配列を k_2 列ずつの小配列に分割する。

$$A^{(1)} \quad A^{(2)} \quad \dots \quad A^{(b_1)}$$

$A^{(p)}$ にある要素の集合を $E^{(p)}$ とし, $\eta_1 \times \eta_2$ の 0-1 行列 $M_A^{(p)} = \|m_{ij}^{(p)}\|$ を

$$m_{ij}^{(p)} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in E^{(p)} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で定義すれば, $M_A^{(p)}$ は A 型行列である。 $E = \bigcup_{p=1}^{b_1} E^{(p)}$, $E^{(p)} \cap E^{(p')} = \emptyset$ ($p \neq p'$) であるから, $M = \sum_{p=1}^{b_1} M_A^{(p)}$, $b_1 = \eta_2 \rho / k_1 k_2$ である。

このとき, さらに, 行列 $(M_G - M)$ の行和ベクトルと列和ベクトルが特殊な値をもつならば, 次のように M_G は A 型行列と B 型行列の和で表わされる。これは定理 1 より K_{n_1, n_2} のバイパートイト分解を意味している。

Lemma 5 $r_0, \rho, n_2 \rho$ がそれぞれ $k_2, k_1, k_1 k_2$ の倍数であり, さらに, $n_2 - r_0, n_1 - \rho, n_2(n_1 - \rho)$ がそれぞれ $k_1, k_2, k_1 k_2$ の倍数である

$$\Rightarrow M_G = \sum_{p=1}^{b_1} M_A^{(p)} + \sum_{q=1}^{b_2} M_B^{(q)}, \quad b_2 = n_2(n_1 - \rho)/k_1 k_2.$$

(証明) $r'_0 = n_2 - r_0, \rho' = n_1 - \rho$ とおく。2本の数列を作る。

$$R': \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{r'_0}, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{r'_0}, \dots, \underbrace{n_1, n_1, \dots, n_1}_{r'_0}$$

$$C': n_2, n_2 - 1, \dots, 1, n_2, n_2 - 1, \dots, 1, \dots, n_2, n_2 - 1, \dots, 1$$

R', C' の各行成分をそれぞれ $i_R(k), i_C(k)$ とし, $E' = \{(i_R(k), i_C(k))$

$k=1, 2, \dots, n_2 \rho'\}$ とする。 $n_1 \times n_2$ の 0-1 行列 $M' = \|m'_{ij}\|$ を

$$m'_{ij} = \begin{cases} 1 & (i, j) \in E' \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で定義する。このとき, Lemma 4 より M' は B 型行列の和で表わされる。

$$M' = \sum_{q=1}^{b_2} M_B^{(q)}, \quad b_2 = n_2 \rho'/k_1 k_2.$$

$S = \{(i, j) | i=1, 2, \dots, n_1; j=1, 2, \dots, n_2\}$ とすれば, $r_0 + r'_0 = n_2$ より $E \cup E' = S, E \cap E' = \emptyset$ とする。 S, E, E' はそれぞれ M_G, M, M' に対応

するから, $M_9 = M + M'$ となる。

$\eta = k_1 x + k_2 y$ をみたす非負の整数ベクトル (x, y) を 解ベクトル といい, その個数を $w(\eta)$ で表わす。このとき, 定理1および Lemma 2 ~ Lemma 5 を用いて次のバイパータイト分解定理を得る。

定理 6 $\eta_1 \leq \eta_2$ かつ $k_1 \leq k_2$ のとき, K_{η_1, η_2} が K_{k_1, k_2} 分解可能である

- $\Leftrightarrow$
- (i) $\eta_1, \eta_2 \equiv 0 \pmod{k_1, k_2}$
 - (ii) $\eta_1 \geq k_1$ かつ $\eta_2 \geq k_2$
 - (iii) $w(\eta_1) \geq 1$ かつ $w(\eta_2) \geq 1$
 - (iv) $w(\eta_1) = 1$ のとき

$$\sum_{g=1}^{w(\eta_1)} f_g = \eta_1 \text{ かつ } k_1 x_0 \eta_2 = \sum_{g=1}^{w(\eta_2)} k_2 y_g f_g$$

ここに, (x_0, y_0) は $\eta_1 = k_1 x + k_2 y$ の解ベクトル, (x_g, y_g) は $\eta_2 = k_1 x + k_2 y$ の解ベクトル

(必要性の証明) K_{η_1, η_2} ($\eta_1 \leq \eta_2$) が b_1 個の A 型ブロックと b_2 個の B 型ブロックにバイパータイト分解したものとする。 K_{η_1, η_2} は $\eta_1 \eta_2$ 本の線を持ち, 各ブロック K_{k_1, k_2} は $k_1 k_2$ 本の線をもつから $k_1 k_2 | \eta_1 \eta_2$ が成り立つ。従って (i) は必要である。各ブロック K_{k_1, k_2} ($k_1 \leq k_2$) は K_{η_1, η_2} のサブグラフであるから

$k_1 \leq \eta_1, k_1 \leq \eta_2 \therefore k_1 \leq \eta_1$, さらに, $\eta_2 \geq k_1, \eta_2 \geq k_2 \therefore \eta_2 \geq k_2$.

従って, (iii)は必要である。 V_1 の点 u に対して, $y(u), x(u)$ をそれぞれ, u が現われる A 型ブロック, B 型ブロックの数とする。このとき u と結ばれる線の数より

$$\eta_2 = k_1 x(u) + k_2 y(u)$$

が成り立つ。さらに, V_2 の点 v に対して, $x(v), y(v)$ をそれぞれ, v が現われる A 型ブロック, B 型ブロックの数とする。このとき v と結ばれる線の数より

$$\eta_1 = k_1 x(v) + k_2 y(v)$$

が成り立つ。 $(x(v), y(v))$ は $\eta_1 = k_1 x + k_2 y$ の解ベクトル, $(x(u), y(u))$ は $\eta_2 = k_1 x + k_2 y$ の解ベクトルであるから $w(\eta_1) \geq 1, w(\eta_2) \geq 1$ となり (iii)は必要である。

b_1 個の A 型ブロックの線の数より

$$\sum_{v \in V_2} k_1 x(v) = \sum_{u \in V_1} k_2 y(u)$$

が成り立つ。 $w(\eta_1) = 1$ のとき, (x_0, y_0) を $\eta_1 = k_1 x + k_2 y$ の解ベクトルとすれば, $x(v) = x_0, y(v) = y_0$ とするのて

$$k_1 x_0 \eta_2 = \sum_{u \in V_1} k_2 y(u)$$

が成り立つ。 $\eta_2 = k_1 x + k_2 y$ の解ベクトル (x_g, y_g) に対して, $(x(u), y(u)) = (x_g, y_g)$ とする u の数を f_g とすれば

$$\sum_{g=1}^{w(\eta_2)} f_g = \eta_1, \sum_{u \in V_1} y(u) = \sum_{g=1}^{w(\eta_2)} y_g f_g$$

が成り立つ。従って, $k_1 x_0 \eta_2 = \sum_{g=1}^{w(\eta_2)} k_2 y_g f_g$ を得る。(iv)は必要であ

3.

(+分性の証明) (iii)より k_1, k_2 の最大公約数は n_1, n_2 の約数であるから, 一般性を失うことなく, k_1 と k_2 は互いに素であると証明する.

(a) $w(n_1)=1$ の場合: $(r_1, r_2, \dots, r_{n_1}) = (\underbrace{k_2 y_1, \dots, k_2 y_1}_{f_1}, \underbrace{k_2 y_2, \dots, k_2 y_2}_{f_2}, \dots, \underbrace{k_2 y_p, \dots, k_2 y_p}_{f_p})$, $\rho = k_1 x_0$, $\beta = w(n_2) \geq 1$ ならば, Lemma 5 より K_{n_1, n_2} は K_{k_1, k_2} 分解可能である.

(b) $w(n_1) \geq 2, w(n_2)=1$ の場合: $n_1 \leq n_2$ ならば, k_1 と k_2 は互いに素であることから $w(n_1)=2$ を得る. $n_1 = k_1 x + k_2 y$ の2つの解ベクトルを $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ($x_1 < x_2$) とする. $n_2 = k_1 x + k_2 y$ の解ベクトルを (x_0, y_0) とする. $f_1 = (k_1 x_0 n_1 - k_2 y_0 n_2) / k_1 k_2$, $(r_1, r_2, \dots, r_{n_2}) = (\underbrace{k_1 x_1, \dots, k_1 x_1}_{f_1}, \underbrace{k_1 x_2, \dots, k_1 x_2}_{n_2 - f_1}, \dots, k_2 y_0)$, $\rho = k_2 y_0$ とおけば, K_{n_2, n_1} は K_{k_1, k_2} 分解可能である. (Lemma 5 より)

(c) $w(n_1) \geq 2, w(n_2) \geq 2$ の場合: $n'_i = n_i - (w(n_i) - 2) k_1 k_2$ とおく. このとき $w(n'_1) = w(n'_2) = 2$ とおける. K_{n_1, n_2} を4つの部分グラフ

$K_{n'_1, n'_2}$, $K_{n'_1, t_i k_1 k_2}$, $K_{n'_2, t_i k_1 k_2}$, $K_{t_i k_1 k_2, t_i k_1 k_2}$ ($t_i = w(n_i) - 2$) に分解する. 3つの部分グラフ $K_{n'_1, t_i k_1 k_2}$, $K_{n'_2, t_i k_1 k_2}$, $K_{t_i k_1 k_2, t_i k_1 k_2}$ は K_{k_1, k_2} 分解可能である. $K_{n'_1, n'_2}$ の K_{k_1, k_2} 分解を証明する.

$n'_1 \geq n'_2$ の場合, n'_1, n'_2 を

$$n'_i = k_1 x_{i1} + k_2 y_{i1} = k_1 x_{i2} + k_2 y_{i2} \quad (x_{i1} < x_{i2})$$

とおく.

$$f_1 = \begin{cases} (k_1 x_{11} n'_2 - k_2 y_{22} n'_1) / k_1 k_2 & (k_1 x_{11} n'_2 \geq k_2 y_{22} n'_1 \text{ のとき}) \\ (k_1 k_2 n'_2 + k_1 x_{11} n'_2 - k_2 y_{22} n'_1) / k_1 k_2 & (k_1 x_{11} n'_2 < k_2 y_{22} n'_1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$r_i = \begin{cases} k_2 y_{21} & (i=1, 2, \dots, f_1) \\ k_2 y_{22} & (i=f_1+1, f_1+2, \dots, n'_1) \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{cases} k_1 x_{11} & (k_1 x_{11} n'_2 \geq k_2 y_{22} n'_1 \text{ のとき}) \\ k_1 x_{12} & (k_1 x_{11} n'_2 < k_2 y_{22} n'_1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおけば, Lemma 5 より $K_{n'_1, n'_2}$ は K_{k_1, k_2} 分解可能である。

$n'_1 < n'_2$ の場合には, n'_1 と n'_2 を入れかえれば上の議論より, $K_{n'_1, n'_2}$ は K_{k_1, k_2} 分解可能である。(定理 6 の証明終り)

バウ X - タ k_1, k_2, n_1, n_2 の特別な場合には, 次の系を得る。

系 7 $n_1 = n_2 = n$ かつ $k_1 \leq k_2$ のとき, $K_{n, n}$ が K_{k_1, k_2} 分解可能である

$$\Leftrightarrow \text{(i) } n^2 \equiv 0 \pmod{k_1 k_2} \quad \text{ii) } n \geq k_2 \quad \text{iii) } \omega(n) \geq 2.$$

系 8 $k_1 = k_2 = k$ のとき, K_{n_1, n_2} が $K_{k, k}$ 分解可能である

$$\Leftrightarrow n_1 \equiv 0 \text{ かつ } n_2 \equiv 0 \pmod{k}$$

系 9 $n_1 \leq n_2$ かつ $k_1 = 1$ のとき, K_{n_1, n_2} が K_{1, k_2} 分解可能であ

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll} \pi_2 \equiv 0 \pmod{k_2} & \pi_1 < k_2 \text{ のとき} \\ \pi_1 \pi_2 \equiv 0 \pmod{k_2} & \pi_1 \geq k_2 \text{ のとき.} \end{array}$$

3. 参考文献

- [1] S.Yamamoto, H.Ikeda, S.Shige-eda, K.Ushio and N.Hamada, On claw-decomposition of complete graphs and complete bigraphs, Hiroshima Math. J. 5(1975), 33-42.
- [2] 潮 和彦, Bipartite decomposition of complete bipartite graphs, 日本数学会・昭和 55 年度年会・応用数学分科会講演予稿集(1980), 44-50.
- [3] 潮 和彦, 完全 2 組グラフの bipartite 分解について, 京都大学数理解析研究所講究録 404 「実験配置の理論と応用」(1981), 135-157.
- [4] K.Ushio, Bipartite decomposition of complete multipartite graphs, To appear in Hiroshima Math. J. 11(1981)
- [5] 潮 和彦, 完全 2 組グラフの bipartite 分解, 日本数学会・昭和 56 年度年会・応用数学分科会講演予稿集(1981), 38-42.