

重力不安定の *Jeans Criterion* に及ぼす非線形交差効果

東京天文台 青木信仰

§1. 始めに.

star cluster, galaxies, cluster of galaxies を考えてみるとわかることであるが, 宇宙における物質分布は決して一様ではなく, 所々にかたまっているという image が浮ぶ. これは重力が作用して, ある種の密度の fluctuation があっていると考えた. この問題に最初に attack したのは *Jeans* (1929) であった. 彼は単純な計算から

$$k_J^2 = 4\pi G \bar{\rho} / \sigma^2 \quad (1.1)$$

という関係式を導いた. ここで k_J は critical な波数で, これよりも少い波数では不安定となることを意味する. G は重力の定数, $\bar{\rho}$ は平均密度, σ は一般には音速であり, 等温変化に対しては, 速度の二乗平均の平方根. しかるに彼のもてめたものは線形近似, すなわち, fluctuation が平均密度に較べて非常に小さいという近似である.

一方 *Ledoux* (1951) は平行平面層状に物質が集っている場合を考え, ある層 ($z=0$) で最大の密度をもち (central

condensation) 両側に単調に減少している様な model を考えた。これは銀河の flat な部分の model 化であるが x, y 面については密度一定と考えた。もしも等温であるとするとき、

$$P(z) = P_c \operatorname{sech}^2 \left[(2\pi G P_c)^{\frac{1}{2}} z / \sigma \right] \quad (1.2)$$

$$\text{となる。ここで } \int_{-\infty}^{\infty} P(z) dz = M \quad (1.3)$$

(これは column density) と P_c との関係は

$$P_c = (\pi/2)(GM^2/\sigma^2). \quad (1.4)$$

ここで重要なことは scale height $\sigma / (2\pi G P_c)^{\frac{1}{2}}$ であって、これは jeans の場合の波長 $2\pi\sigma / (4\pi G \bar{P})^{\frac{1}{2}}$ と numerical factor を除いてほぼ等しいということである。すなわち、central condensation の部分だけ考える限り、その場所で見合っていると考えられる。

§2 では上記の二つの場合の間と思われるものを考える。すなわち等温ではあるが、有限波長、有限振幅(有限粗密比)で定常解を求める。上に注意したことからも想像がつくのであるが、少し波長が長くなると、condensation は各々独立し、density の形(z -dependency) は single の場合(Ledoux)と驚くほどよく似てくるのである。

§2 のもう一つの結論は波長と密度比の関係が単調であることである。(§2, 図1参照)。従って、jeans の波長より長い波長に対しては無限小振幅に対しては勿論不安定で、

その振幅が増大するが、一方どんな大きさでもその波長に対する定常解も存在する。polytrope (等温をふくめて) の条件が満足する場合、非平衡からの発展の問題については Kondo (1975) がある。 $\gamma > 1$ の polytrope では bounce し、 $\gamma = 1$ (等温) では critical である。(1次元では)。

§ 3 では分布関数が adiabatic invariance である $J = \frac{1}{2\pi} \oint p \delta q$ について

$$f = \exp \left[-\frac{k^2 J^2}{8 \sigma^2} \right] \quad (1.5)$$

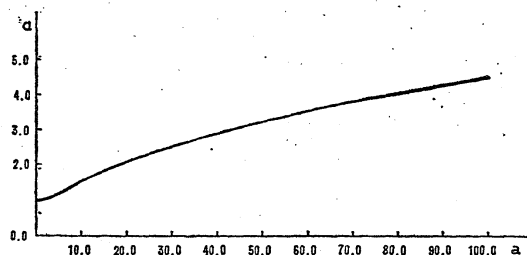
の形のものを考える。これは密度差が無限小の時は等温になるもので、 J が非常にゆっくりした potential の変化に対しては 1 次の order で不変であり、したがってエネルギーに代って積分の定数とほぼ見做されるものである。しかし結果はかなり違って来たものになるのは後に見る通りである。

§ 4~6 は完全に collisionless の場合である。初期値として等温ではあるが非平衡から出発した場合分布がどうなるかを数値的に求めるものである。

§ 2. 非線形等温定常解

§ 1 について周期的な解を求めた。§ 1 で述べたようにこれは jeans と Ledoux との中間にあたるものである。詳しくは別に発表したので、それを参照されたい (Aoki, 1976)。こ

こでは主な結果
を述べる。右方
向の波数を k と
すると k_J/k
は jeans 波長に
対する比となる。



Lengthening factor (α) against density contrast (a), where α is the ratio of the non-linear critical wavelength to the (linear) Jeans critical wavelength ($\alpha = k_J/k_c$), and a is the dimensionless potential difference ($\Delta\psi/\sigma^2$ where σ^2 is the velocity dispersion) and corresponds to the logarithm of the density contrast as given by equation (3.5) for isothermal case.

これを α とおい

図 1.

た (図 1). 横

軸の a は maximum density の所での potential と minimum density の所の ^{それの}差を σ^2 を単位としてはかったものである。

等温の場合 density contrast は $\exp a$ で表わされる。

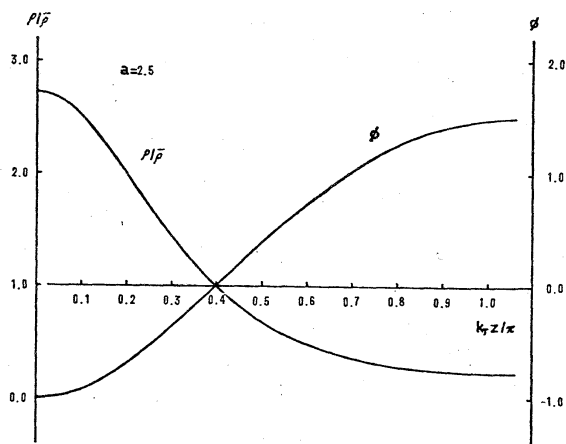
$a < 10$ の場合は

$$\alpha - 1 \propto a^2$$

で表わされるが $a > 20$

では $\alpha \propto \sqrt{a}$

に近い形をしていることが
わかる。



次に図 2 は一つの場合
($a=2.5$) での density
contrast を示す。線形の
場合は cosine 形になるが、

図 2 density contrast と potential の形

横軸: $\frac{1}{2}$ (jeans 波長) を単位にした z
縦軸: $P/\bar{P}$, ここで $\bar{P}$ は平均密度,
 ϕ は potential を σ^2 を単位ではか
った non-dimension の量

ここでは少しずれている。一方波長はそれほど変わっていない。
density の低い部分 ($k_J z/\pi > 0.4$) がかなりのびていることがわかる。図3は Ledoux solution (1951) との比較、我々の

場合 $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(z) dz$ は発散してしまうので

$$\int_{-k_J z/\pi}^{k_J z/\pi} \rho(z) dz = M \quad (2.1)$$

とし、式

(1.3) で与

えられる

M と見做

す。この

ような対

応をつけ

ることに

より Ledoux

との比較

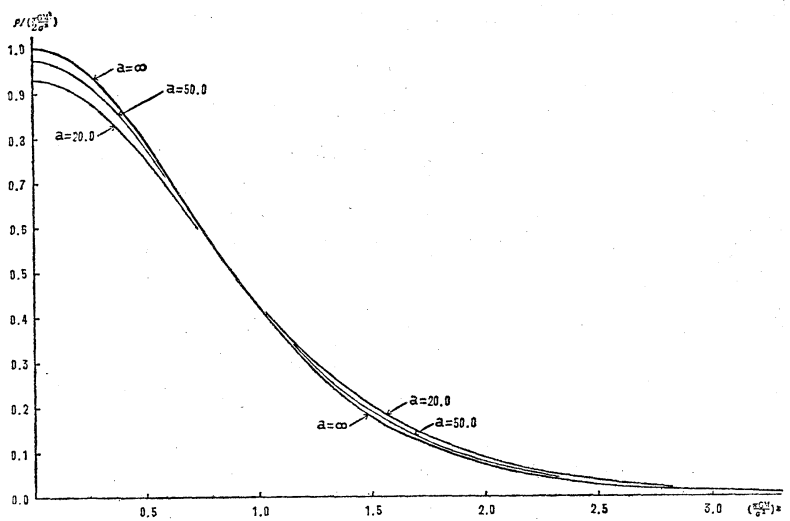
が出来る。

縦横軸を

それぞれ説明に書いたように normalize すると、 $a=20$ で形と

してはほとんど一致することがわかる。

次にこの平衡解に無限小振幅の disturbance を与え^た時の安定性を述べる。結論を言うと今考えている波長の所が丁度



Density against coordinate, compared with LEDOUX's (1951) solution ($a=\infty$).

Abscissa: $\pi GMz/\sigma^2$ is the argument in LEDOUX's (1951) solution (4.6), where M is the total mass per unit column for the both sides of central maximum density. For our non-linear periodic solution we have identified it with the total mass per unit column per unit wavelength.

Ordinate: density in units of $\pi GM^2/(2\sigma^2)$. For LEDOUX's (1951) solution this quantity is unity for $\xi=0$ (central condensation).

図3.

critical になって、それより長い波長の disturbance では不安定となる。つまりここでの平衡解はある意味で neutral である。

§ 3. adiabatic invariance (Aoki, S. 1977)

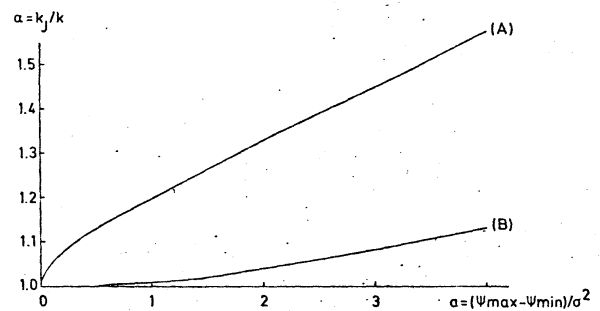
次に既に § 1 で述べたように、等温のかわりに式(1.5)で与えられる分布を考える。J は trapped particle に対しては

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p \delta q \quad (3.1)$$

で定義されるが、untrapped では一義的でない。そこで J として

$$J = \frac{1}{\pi} \mathcal{R} \int_{-k/\pi}^{k/\pi} [2(\epsilon - \Phi)]^{\frac{1}{2}} \delta z, \quad (3.2)$$

ここで $\mathcal{R}$ は real part
を取る operator, ϵ
は energy, Φ は potential
とする。trapped particle
に対しては全波長に
わたって根号内が
real にならず、一部
imaginary となるの



Lengthening factor $\alpha = k_j/k$ is given against α , the relative difference of maximum and minimum potential in terms of velocity dispersion σ^2 . Here k_j is the Jeans' critical wavenumber for the gravitational instability in linear analysis, whereas k is that of non-linear analysis for the present Case (A) and for the isothermal Case (B).

図 4.

で、 $\mathcal{R}$ はその部分を無視するという意味である。こうすると trapped でも untrapped でも同じ式で表わされ、しかも二

つの場合の境目……一周に無限の時間のかゝる critical な場合
 で双方が連続^的につながれる。trapped と untrapped それぞれ
 では勿論 potential の変化が非常にゆっくりしていれば、 J
 は adiabatically invariant になるが、critical の所はいくら
 どもその面積 (J に対する contribution) を小さくすること
 ができるので、critical を越えてもやはり adiabatically
 invariant であると考えられる。このようにして、双方の場
 合同じ分布で結びつけられていると考えられるのである。か
 くしてその結果図4に見るような対応を得る。ここで (B) は
 §2 で述べた等温の場合である。(A) はここでの結果で

$$\alpha = 1 + 0.1537\sqrt{a} + 0.031a + 0.017a^{\frac{3}{2}} \quad (3.3)$$

と表わされる。これは condensed part が温度が上って、等
 温の場合ほど密度高くなり得ない結果、きまつた波長に対し
 て potential の差が大きくならないことを意味している。

§4. Collisionless Boltzmann 方程式

自己重力を考慮に入れた collisionless の system を考える。こ
 れは我々の関心のある恒星系ではほぼ満されていると考えら
 れる。この system は一方 collisionless plasma の Vlasov -
 Poisson と方程式系としては全く同一である。ただし力の関
 数の符号がことなるという差異がある。したがって別稿(

鵜飼氏)の特別な場合となり、その数値計算例を示したことになる。しかしまだ十分結論を得るには至っておりず、ここでは中間報告の形であることをお断りしておきたい。

さて、この場合の非定常解を初期値問題として解くわけであるが、次の様な動機から来ている。§2,3で述べたように、もしも最初等温であっても、*Jeans*の波長より長いものに対しては、不安定の結果その振幅は増大する、けれども、我々の場合 *density* は負にはなり得ないという制限がある。一方等温の場合でも任意の波長に対して *neutral* な平衡解がある。また *collisionless* では、熱の交換がないので、§3の *adiabatic* の近似(もっともここではゆっくりと変化すると仮定したので、その仮定の悪さは残る)がある程度満足されているかも知れない。そうすると、無限に *density contrast* がつくということはありそうにもない(証明ではないが)、そうなった場合、ある種の平衡解のまわりの振動が起きるのではないかと想像される。非常に長い時間の後には種々の(時間的)周波数の運動が^{互いに} *incoherent* になれば *Landau damping* 的に巨視的には平衡解に近づくのではないかと想像される。

このような *working hypothesis* のもとに計算を行っている最中である。

さて、方程式は1次元の *Lionville* 方程式 (*collisionless Boltzmann*)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + w \frac{\partial f}{\partial z} + K \frac{\partial f}{\partial w} = 0 \quad (4.1)$$

で与えられる。ここで w は z 方向の速度、 K は力の関数で、
自己重力系では

$$K = \frac{-\partial(\Phi - \Phi_0)}{\partial z} \quad (4.2)$$

$$\nabla^2(\Phi - \Phi_0) = 4\pi G(\rho - \bar{\rho}) \quad (4.3)$$

$$\rho = \int_{-\infty}^{\infty} f dw \quad (4.4)$$

で与えられる。 Φ は potential, G は重力定数, $\rho(z)$ は密度
 $\bar{\rho}$ は平均(時間的および空間的)密度。

ここで 分布関数 f が

$$f = \frac{\bar{\rho}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-w^2/2\sigma^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{\ell,n}(t) H_{\ell}\left(\frac{w}{\sigma}\right) e^{nkwz} \quad (4.5)$$

で表わされると仮定する。ここで H_{ℓ} は Hermite の多項式、

$$H_{\ell}(x) = (-1)^{\ell} e^{x^2/2} \frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}} (e^{-x^2/2}) \quad (4.6)$$

初期 $t=0$ に対し等温(その dispersion は σ^2), すなわち

$$\left. \begin{aligned} f_{00}(0) &= 1, \quad f_{0,\pm 1}(0) = C \text{ (constant)}, \\ \text{以上以外で } f_{m,n}(0) &= 0 \text{ とする.} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

(4.4) に $H_m(\frac{w}{\sigma})$ を掛けて積分し, non-dimensionalization

$$\sqrt{4\pi G \bar{\rho}} t = \tau, \quad k_J = \sqrt{4\pi G \bar{\rho}} / \sigma, \quad \alpha = k_J / k, \quad (4.8)$$

を行うと,

$$i \frac{df_{m,n}}{d\tau} = \alpha^{-1} n \{ (m+1) f_{m+1,n} + f_{m-1,n} \} - \alpha \sum_{n' \neq 0} \frac{f_{0,n'} f_{m-1,n-n'}}{n'} \quad (4.9)$$

となる。因みに plasma (electron) の場合, α のかわり

$$\alpha_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m_e}} / \omega_k, \quad (4.10)$$

$$\tau \text{ は } \tau = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m_e}} t$$

とし左辺の 2 行目の符号を変えれば形式的に全く同じである。Plasma の数値計算例として Knorr (1961), Armstrong et al. (1970), Joice et al. (1971), Knorr (1973), Cheng & Knorr (1976) 等参照。

§ 5. 力のない時および線形近似

力のない時, すなわち式 (4.9) の右辺の 2 行目のない時の一般解 (初期値の条件は考えない) は

$$f_{m,n}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\mu) \frac{H_m(\mu)}{m!} \exp\left(-\frac{n\mu}{\alpha} i \tau\right) d\mu, \quad (5.1)$$

$$\text{ここで } n\mu\tau/\alpha = n k \sigma t \quad \text{となる.}$$

(4.7) を満足させるためには,

$$h_{\pm 1}(\mu) = \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\mu^2}{2}\right], \quad \forall \mu \neq 0, \quad (5.2)$$

$$\text{すなわち } f = \frac{\bar{p}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left\{ 1 + 2c \cos k(z - wt) \right\} \exp \left[-\frac{w^2}{2\sigma^2} \right] \quad (5.3)$$

となつて、勿論もとの方程式を直接解いたのと同じ一致する。

$$\text{そこで } \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m(x) H_m(y) \exp[-x^2/2]}{\sqrt{2\pi} m!} = \delta(x-y) \quad (5.4)$$

(δ は Dirac delta function) を用いた。

(5.1) で $\frac{H_m(\mu)}{m!}$ の factor は (4.9) の右辺の第 1 行の terms から由来するが、これは m が無限の場合である。実際の場合有限項で打切るわけであるが、その時最後の方程式は

$$i \frac{dH_{M,n}}{dt} = \omega^{-1} \left\{ 0 + f_{M-1,n} \right\} \quad (5.5)$$

となる。これは別の言い方をすると $H_{M+1}(\mu) = 0$ の附加条件を課したことになる。すなわち (5.1) ですべての μ についての和 (積分) を取ることは出来ず、この条件を満足した μ についての和を取らなければならない。同様なことは plasma の非線形振動を論ずる場合の準備として Joyce et al. (1971) が注意している。 M が大きいとすると、 M が奇偶に応じて

$$\left. \begin{aligned} H_{2M'+1}(\mu) &\equiv \frac{(-1)^{M'} 2^{M'+1} M'!}{(M')^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}} \sin \sqrt{2M'} \mu = 0 \quad (M=2M') \\ \text{即ち } \mu &\equiv \frac{l\pi}{\sqrt{M}}, \quad l: \text{integer} \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{又は } H_{2M'}(\mu) &\equiv \frac{(-1)^{M'} 2^{M'} M'!}{(M')^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}} \cos \sqrt{2M'} \mu = 0 \quad (M=2M'-1) \\ \text{即ち } \mu &\equiv \frac{(\frac{1}{2}+l)\pi}{\sqrt{M+1}}, \quad l: \text{integer} \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

となる。これは μ が $\frac{\pi}{\sqrt{M+1}}$ の整数倍又は $\frac{2\pi}{\sqrt{M+1}}$ の半整数倍になっていることを意味し、solution がほぼ周期解になることである。(実際の数値例は次節参照)。

次に力の線形の部分だけを考慮に入れると、(4.9) は

$$i \frac{df_{m,n}}{dt} = \alpha^{-1} n \left\{ (m+1) f_{m+1} + f_{m-1, n} \right\} - \frac{\alpha}{n} f_{0,n} \delta_{m,1} \quad (5.8)$$

となり、その一般解は

$$f_{m,n} = \frac{1}{m!} \left\{ H_m(\mu) - \frac{\alpha^2}{n^2} \sum_{J=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^J \frac{J(m-J-1)!}{(m-2J)!} H_{m-2J}(\mu) \right\} h_n(\mu) e^{(n\mu/\alpha)it} \quad (5.9)$$

で与えられる。しかし(4.7)の初期値に対応する解は見易い形ではまだ与えられていない。

§ 6. 数値計算例

ここでは(4.9)を数値的に解くことを考える。(4.9)を見てわかるように m が1ずつ増えるごとに f は real と pure imaginary が交代する。

それ故

$$\left. \begin{aligned} f_{2m,n} &= G(2m,n) = G(2m,-n) \\ f_{2m+1,n} &= iG(2m+1,n) = -iG(2m+1,-n) \end{aligned} \right\} (6.1)$$

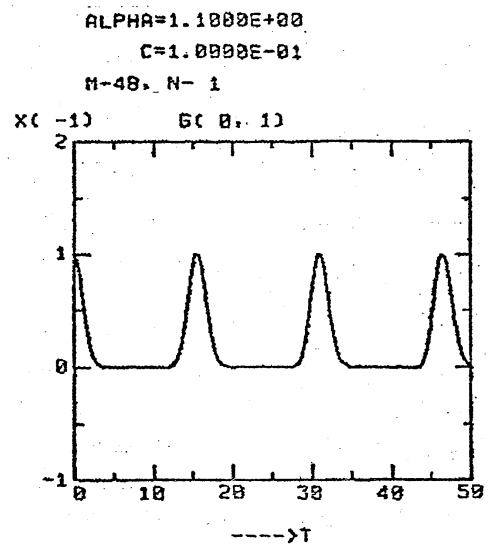


図 5.

とあいて方程式を全部 real の形になおす。次に check の式と

して

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^m (2m-1)!! f_{2m,n} &= 0 \\ \frac{d}{d\tau} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+n} (2m-1)!! f_{2m,n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

を用いる。

実際の計算では勿論有限項

で打ち切らなければならない。

図5は力のない場合で、 M (m の最大値) = 48, N (n の最大値) = 1 としてある。

$\alpha = 1.1$

この場合 $T=15$ を周期とす

る周期関数で表わされるが、

これは(5.6)の評価と一致して

いる。 $\tau=4$ までの下り方は勿論(5.1)の積分を実行した値

$$f_{0,1} = G(0,1) = c \cdot e^{-\frac{\alpha^2 \tau^2}{2}} \quad (5.3)$$

と一致している。即ち、

$$\tau \equiv \text{整数} \times 15$$

あたりの山は ghost である。図6は $M=47$ でこの時は周期は約30。ただし $\tau=15$ の附近では逆側に ghost が出ている。

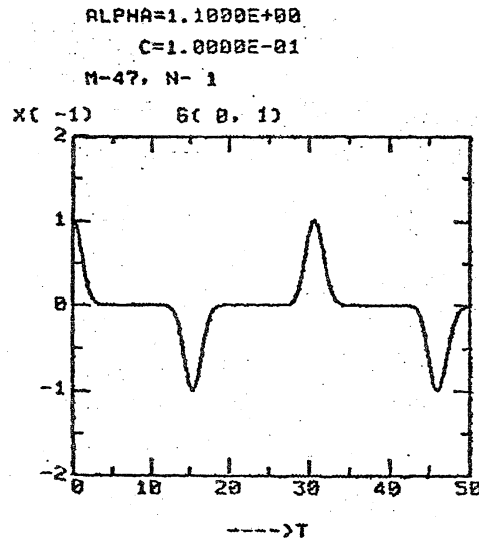


図6

図7は $M=396$ として ghost
を $T=44$ あたり $T=1$ に shift させ
たもの。

図8, 図9は non-linear の
場合で図8が $M=28$, 図9は
 $M=27$ この場合でも $T=15\sim 18$
あたりの peak が real であ
るかどうかわからない。

図10, 11 は $\alpha > 1$ 即ち不安
定な場合である。 linear

theory からは振幅が当初増大することは期待されるが、それ

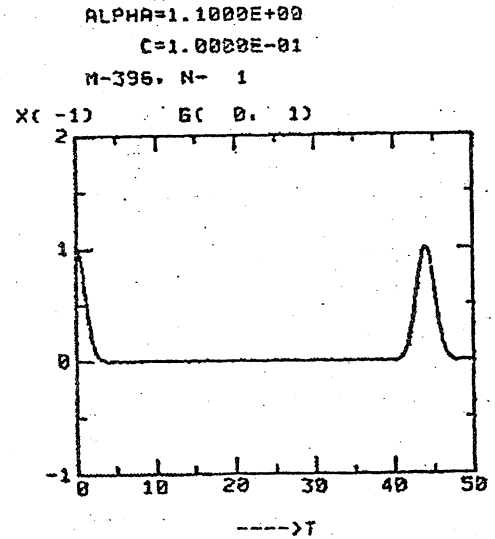


図7.

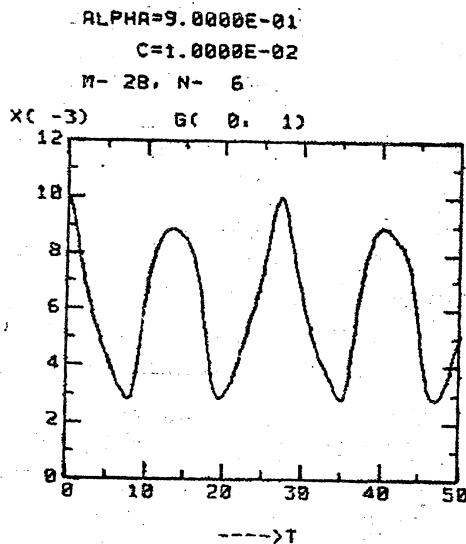


図8.

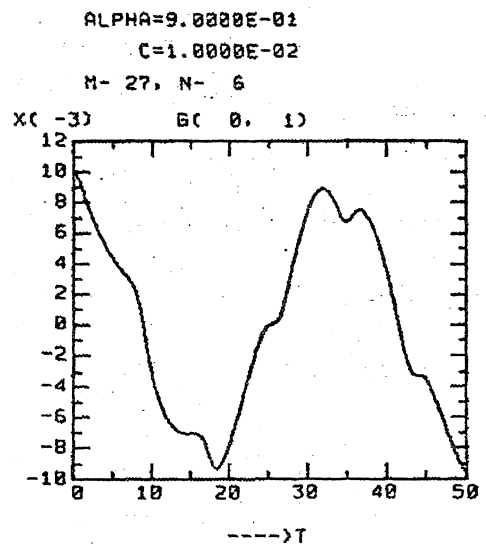
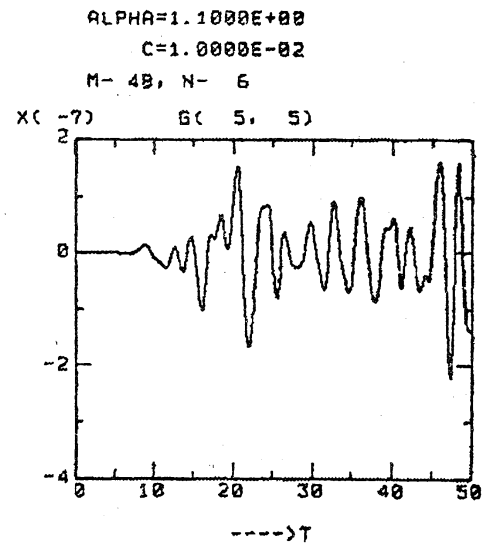
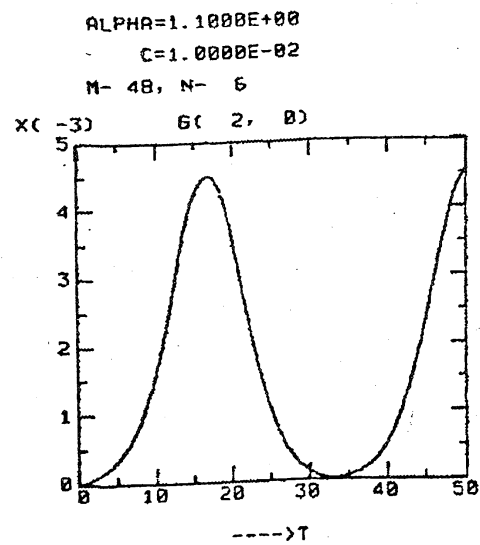
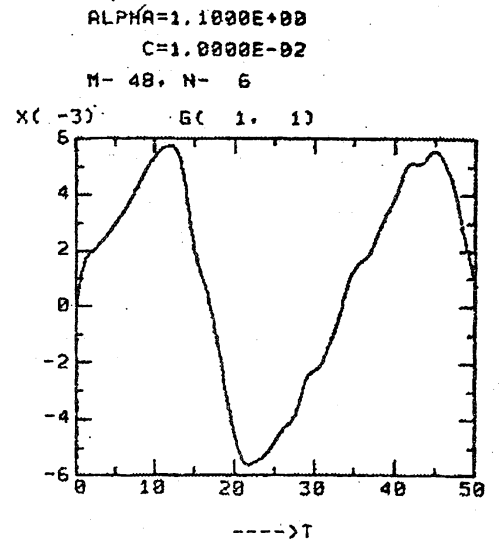
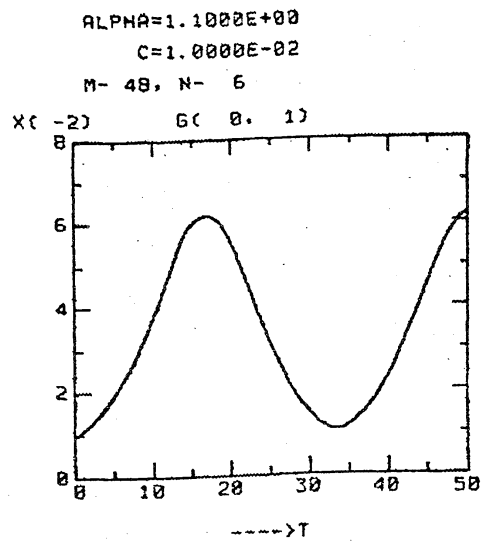


図9.

がどこまで大きくなるかということが実は問題なのであり、
 $M=48$, (図10)と $M=394$ (図11) の場合の例をあげた。
 前者では初期の振幅(c)の約6倍で peak になるが、後者では約8倍になっている。しかも peak の位置に対する τ は前者では18位なのに、後者では約20。この傾向は一般的のようである。しかしこの二つの例からは τ の位置と peak の高さ、についてはまだ何とも言えない。これが ghost である可能性を否定するわけには行かないからである。ここで双方の図の $m=n=5$ を比較されたい。図10ではかなり高周波の波がふくまれているのに、図11ではそれが無い。

計算の都合上、図11は $G(m, n)$ のかわりに $G^*(m, n) = m!! G(m, n)$ を取っている。

尚この計算は東大大学院博士課程 佐藤耕一君による。計算機は東京天文台の FACOM 230-58 を使用した。ここに感謝の意を表する。

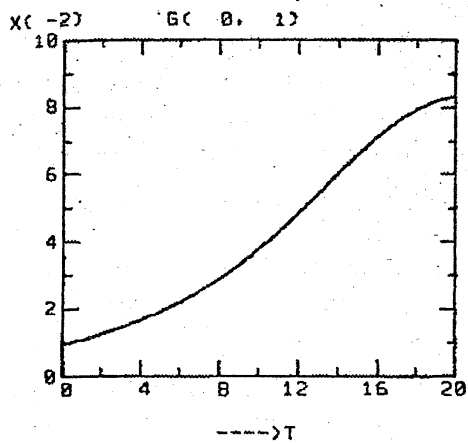


10.

ALPHA=1.1000E+00

C=1.0000E-02

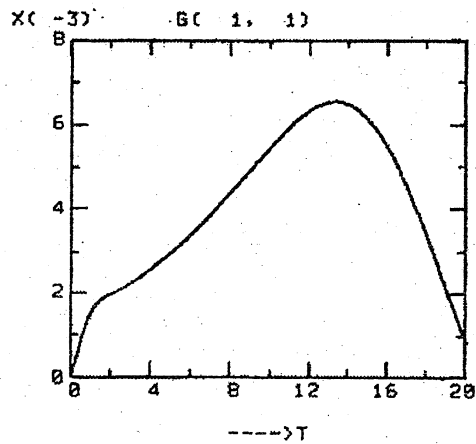
M-396, N= 6



ALPHA=1.1000E+00

C=1.0000E-02

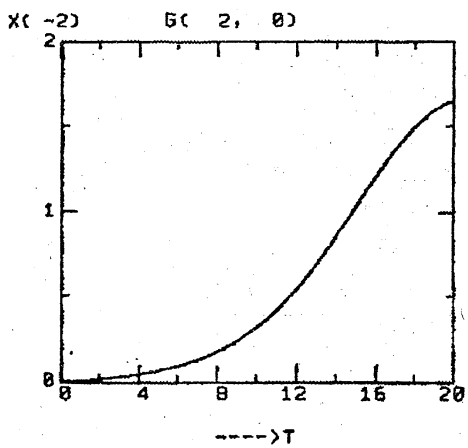
M-396, N= 6



ALPHA=1.1000E+00

C=1.0000E-02

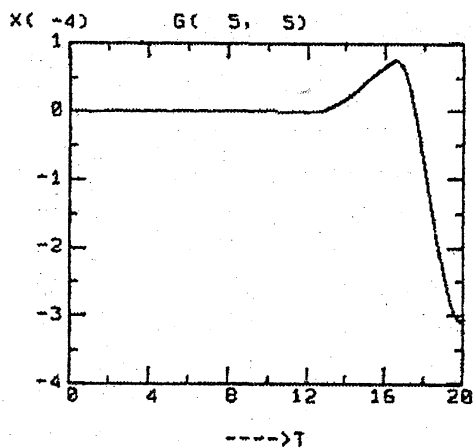
M-396, N= 6



ALPHA=1.1000E+00

C=1.0000E-02

M-396, N= 6



☒ 11

参考文献

Aoki, S. 1976, Publ. Astron. Soc. Japan, 28, 371.

Aoki, S. 1977, Astron. and Astrophys.

Armstrong, T. et al., 1970, in Method in Computing Physics, 8, 29.

Cheng, C. Z. and Knorr, G. 1976, Jour. Computing Physics, 22, 330.

Jeans, Sir J. 1929, Astronomy and Cosmogony, (Cambridge University Press), p. 345.

Joice, G., Knorr, G and Meier, H. K. 1971, J. Comput. Phys., 8, 53.

Knorr, G. 1961, Z. Naturforschung, 16a, 1320.

Knorr, G. 1973, J. Comput. Phys., 13, 165.

Kondo, M. 1975, Publ. Astron. Soc. Japan, 27, 215.

Ledoux, P. 1951, Ann. d'Astrophys. 14, 438.