

Hadamard 行列について

イリノイ大学

伊藤 昇

北大 理学部

木村 浩

H を $n (> 2)$ 次の Hadamard 行列とす。すなわち $H = (h_{ij}) = (\pm 1)$ で $H^t \cdot H = H \cdot H^t = nI$ をみたすものとす。
 $P = \{1, 2, \dots, n\}$, $P^* = \{1^*, 2^*, \dots, n^*\}$ とし,
 $P \cup P^*$ の n 個からなる部分空間 α_i を次の様に定義す。

$$\alpha_i \ni j \iff h_{ij} = 1,$$

$$\ni j^* \iff h_{ij} = -1.$$

さらに $\alpha_i^* = P \cup P^* - \alpha_i$ とおく。 $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$,
 $B^* = \{\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*\}$. $P \cup P^*$ の元を点, $B \cup B^*$ の元を
block と云う。このとき $M(H) = (P \cup P^*, B \cup B^*)$ を
 H の matrix design と呼ぶ。これは i, i^* を含む block
は存在しないから 2-design ではない。又 $i, j (\neq i^*)$ を
含む block の個数は $\frac{n}{2}$ 個である。

次に $i^{**} = i (1 \leq i \leq n)$ と仮定しておく。 G を次を満
たす $P \cup P^*$ 上の置換全体の作る群とする。 $\sigma(i) = j \iff$

$\sigma(i^*) = j^*$, $(B \cup B^*)^\sigma = B \cup B^*$. $G \in M(H)$ の自己同型群と呼ぶ。これは H の自己同型群に同型である。

$\bar{P} = \{\bar{i} = \{i, i^*\} \mid 1 \leq i \leq n\}$, $\bar{B} = \{\bar{\alpha}_i = \{\alpha_i, \alpha_i^*\} \mid 1 \leq i \leq n\}$ とおく。 $\bar{G} = G/\langle \zeta \rangle$ は $\bar{P}$, $\bar{B}$ 上の置換群と考えられる。ここで $\zeta = \pi(i, i^*) = \pi(\alpha_i, \alpha_i^*)$ である。

[2] で伊藤は次の結果を得た。

「 $\bar{G}$ が $\bar{P}$ 上現在知られている 2 重可移群で regular normal subgroup を含むなければ次のいずれかである。(i) $n = g+1$, $g = \text{素数}$ かつ $g \equiv 3 \pmod{4}$, H は quadratic residue type である。(ii) $n = 36$, $(\bar{G}, \bar{P}) \cong Sp(6, 2)$, H は新 L のものである。」

ここでは $\bar{G}$ が $\bar{P}$ 上 2 重可移群で regular normal subgroup を含む場合を考える。次の予想の下にその性質をしらべた。

「上の仮定の下で H は elementary abelian group of order n の character table に相似である」

Kantor [3] の定理 ($\bar{G}$ が $\bar{P}$ 上 2 重で, $\bar{B}$ 上 faithful なければ H は上のものに限る) によつて以下 $\bar{G}$ は $\bar{B}$ 上 faithful としてよい。

N を G の正規部分群 ($\ni \zeta$) で $N/\langle \zeta \rangle$ が $\bar{G}$ の regular normal subgroup とはするものとする。 $n = 4$ のときはよくわかってゐるから $n > 4$ とする。置換論の一般的性質より $n = 2^m$

($m > 2$) である。以下証明はして性質を述べる。

Lemma 1. N は elementary abelian である。

Lemma 2. $\bar{G}$ は $\bar{B}$ 上 2 重可移である。

この lemma から以下の出発点である。 Γ を $\bar{B}$ を含まない N の maximal subgroup の集合とする。 $|\Gamma| = n$ で G は Γ 上に働く。

Lemma 3. $\Delta \in M \in \Gamma$ の $P \cup P^*$ 上の orbit とすれば、任意の $\alpha \in B$ に対して $|\Delta \cap \alpha| = (n \pm \sqrt{n})/2$ が成り立つ。

この lemma より特に

Proposition 1. $\sqrt{n}$ は整数である。

Lemma 4. Γ は少なくとも 2 つ以上の G -conjugate class からなっている。

これよりただちに次を得る。

Proposition 2. G は可解ではない。

Lemma 5. p (素数) を $(|G|, (n-2)/2)$ の約数とすれば、 $i < m-1$ があって p は $2^i - 1$ の約数である。特に G は $\bar{B}$ 上 3 重可移ではない。

Lemma 6. G は $P \cup P^*$ 上の置換群として rank 4 である。

G の $P \cup P^*$ 上の permutation character $1_G^G(a \in P)$ の irreducible character への分解を $1_G + \chi + \varphi_1 + \varphi_2$ とす

3. ここで χ は $(\bar{G}, \bar{P})$ から出てくる次数 $n-1$ の character である. この character の性質より次を得る.

Lemma 7. Γ は 2 つの G -conjugate class Γ_1, Γ_2 からなっている. さらに $|G : N_G(M_i)| = |\Gamma_i| = \varphi_i(1)$ としてよい. $\Gamma_2 \subset M_i \in \Gamma_1$.

Lemma 8. $\varphi_1(1) \geq \varphi_2(1)$ とすれば $\varphi_1(1) = (n + \sqrt{n})/2$, $\varphi_2(1) = (n - \sqrt{n})/2$ である.

N は $P \cup P^*$ 上 regular であるから N の元と $P \cup P^*$ の元を同一視できる. G_1 は N 上 4 つの orbit をもっているからそれらを $\{1\}, \{5\}, C_1, C_2 = 5C_1$ とおく. $b \in C_1$ に対して $u = |\{M \in \Gamma_1 \mid b \in M\}|$, $b \in C_2$ に対して $v = |\{M \in \Gamma_1 \mid b \in M\}|$ とおく.

Lemma 9. $u \neq v$.

C_1 を $u > v$ なる標に取っておく.

Proposition 3.

$$\bar{C}_1^2 = (n-1)\bar{1} + \frac{n-4}{2}\bar{C}_1 + \frac{n}{2}\bar{C}_2,$$

$$u = \frac{n+2\sqrt{n}}{4}, \quad v = \frac{n}{4}.$$

ここで $\bar{}$ は N の group ring $\mathbb{F}$ の G_1 -conjugate の class sum である.

今後の問題として elementary abelian group N の部分集合 C_1, C_2 で Proposition 3 をみたすものがあるか. そしてそれはどんな性質をもっているかを知る必要がある.

References

1. M. Hall, Combinatorial theory, Blaisdell, 1967.
2. N. Ito, Hadamard matrices with doubly transitive automorphism groups, to appear.
3. W. M. Kantor, Automorphism groups of Hadamard matrices, J. Combinatorial Theory, 6 (1969), 279 - 281.