

開代数曲面における完備 Einstein-
Kähler 計量について

東北大学理学部

小林 亮一

(Ryoichi Kobayashi)

0. 序

S をコンパクトリーマン面とすると, S の種数が 2 以上の時, S は負定曲率の曲面になる。T. Aubin は, この現象を高次元の場合に拡張し, 次の定理を得た。「 M をコンパクト複素多様体で, その第 1 Chern 類は負定値の $(1,1)$ 型式で代表されるとする。この時, M は負の Ricci 曲率をもつ Einstein-Kähler 計量を許容する。」[4] 一方, S を 1 次元複素射影空間とし, $\{p_1, \dots, p_k\}$ を S の有限個の点とする。この時, $k \geq 3$ なら, $S - \{p_1, \dots, p_k\}$ は完備な負定曲率空間となり, その体積は有限である。この稿の目的は, この現象を高次元の場合に拡張することにある。第 1 の拡張は, $\bar{M}$ を一般次元のコンパクト複素多様体, D を単純正規交叉のみもつ因子とし, $K_{\bar{M}} \otimes [D]$ が正定値の Chern 型式を持つ場合である。例えば $P^n(\mathbb{C})$ では標準束 $= [-H]^{\otimes (n+1)}$ 故, D は $n+2$ 枚以上の超平面, $n+2$ 次以上の非特異超曲面などである。この場合, $\bar{M} - D$ には負の Ricci 曲率をもつ完備 Einstein-Kähler 計量が定数倍を除いて唯一存在する ([9])。次に第 2 の方法を述べる。第 1 の方法は

コンパクト複素多様体から充分多くの超曲面を除くという発想であったが、第2の見方では、非正断面曲率ということにこだわる。(例) M を、 $\mathbb{C}^n$ の単位球の双正則同型の離散群による商多様体で、体積有限のものとする。これに因子 D をつけて加えて非特異複素射影多様体としたものを $\bar{M} = M \cup D$ とする。 $M = \bar{M} - D$ は Bergman 計量から自然に定まる計量で Einstein-Kähler であるが、 $K_{\bar{M}} \otimes [D]$ はアンプルにならないから、第1の拡張には入らない。第2の見方ではこういう例が含まれるようにしたいわけである。この稿では、第2の拡張について述べる。これについて、次の結果が得られる。

定理1. $\bar{M}$ を非特異複素射影曲面とする。 D を $\bar{M}$ 上の因子で、正規交叉のみをもつとする。もし、 D が以下の条件(*)を満たせば、 $M = \bar{M} - D$ には負の Ricci 曲率をもつ完備 Einstein-Kähler 計量が定数倍を除いて唯一に存在する。

(*) : $L := K_{\bar{M}} \otimes [D]$ とおけば、

$$L^2 > 0,$$

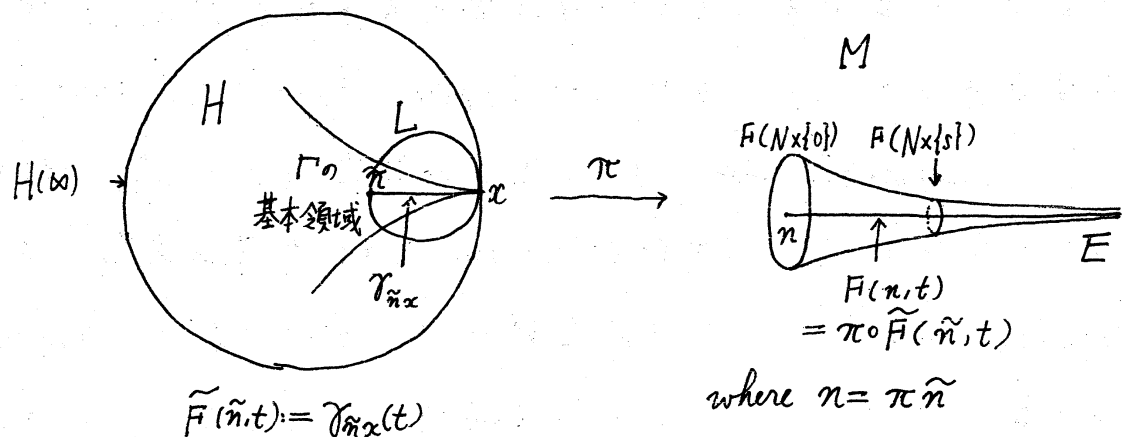
$L \cdot C \geq 0$ が $\bar{M}$ 上の任意の既約曲線 C に対して成立つ、

$L \cdot C = 0$ となるのは C が D の既約成分になることと同値である。

条件(*)の意味を述べる為、まずいくつかの定義をする。

H^n を Hadamard 多様体とし、 $I(H)$ を等長同型全体のなす Lie 群とする。 $\gamma_1, \gamma_2: [0, \infty) \rightarrow H$ を弧長で parametrize された geodesic rays とする。 γ_1, γ_2 が asymptotic であるとは、 $[0, \infty) \ni t \mapsto d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ が有界であることを言う。 $H(\infty) = \{\text{all asymptotic classes of all geodesic rays parametrized by arc length}\}$ とおく。 $\bar{H} = H \cup H(\infty)$ とおき、"cone topology" を入れると n 次元胞体に同相になる。 H の等長同型は、自然に $\bar{H}$ の位相同型に拡張される。もし H の断面曲率 K が $K \leq -a < 0$ を満たせば、 $I(H)$ の元は次の 3 種に分類される。 $\mathcal{G} \in I(H)$ が、 H 上に固定点をもつ、 H に固定点をもたず $H(\infty)$ に 2 度の固定点をもつ、 H に固定点をもたず $H(\infty)$ に唯 1 つの固定点をもつ時、それぞれ elliptic, hyperbolic, parabolic という。hyperbolic isom. $\mathcal{G}$ の 2 つの固定点を $x, y \in H(\infty)$ とすると、 $\mathcal{G}$ は x と y を結ぶ geodesic line を translate する。parabolic isom. $\mathcal{G}$ は、その固定点 $x \in H(\infty)$ における horosphere を不変にする。今、 $\Gamma \subset I(H)$ を離散部分群とし、 H に真に不連続かつ固定点なしに作用するものとする。 $M = H / \Gamma$ は自然に完備 Riemann 多様体になる。 M は非コンパクトかつ体積有限としよう。 M の構造について、次が知られている [5]。
 M の end は有限個であり、各 end は次の様な構造をもつ。

$\gamma: [0, \infty) \rightarrow M$ を divergent geodesic ray で, end E に収束する
 としよう。 γ の H への持ち上げ $\tilde{\gamma}$ は $H(\infty)$ の点 x を決める。すると,
 x は Γ のある parabolic element の固定点になる。さらに, L
 を x における horosphere で, Γ の任意の元 g に対して $g(x) = x$
 $\Rightarrow g(B) = B$, $g(x) \neq x \Rightarrow g(B) \cap B = \emptyset$ となるものとする。こ
 のようなものは存在する。ここで B は x での horoball で,
 L に bound されるものとした。すると, $N = L / \Gamma_x = \pi(L)$
 $(\pi: H \rightarrow M)$ はコンパクトである。さらに, E のある近傍
 U が存在し, $F: N \times (0, \infty) \rightarrow U$; $t \mapsto F(n, t)$ は $n \in N$
 を発する minimizing geodesic ray で E に収束するもの, は C^1
 微分同相で, $\{F(n, t)\} \perp F(N \times \{s\})$ である。下図参照。



我々はまず N がコンパクトであることに着目する。次に, n_1
 $, n_2$ を N の任意の異なる 2 点とし, $t \mapsto d_{N \times \{t\}}(F(n_1, t), F(n_2, t))$
 を考える。 $F(n_i, t)$ は E に収束する geodesic rays 故, もし H の
 断面曲率 $\leq -a < 0$ なら, これは指数函数的に減少して 0 に

なる。これは容易に確かめられるので、その証明を書いておこう。
 $f(t) = d_{N \times t}(F(n_1, t), F(n_2, t))$ とし、 n_1 と n_2 を結ぶ N 上の curve $c(s)$ をとる ($0 \leq s \leq 1$)。 $t_1 < t_2$ に対して $f(t_2)/f(t_1)$ を評価すればよい。
 $E(s, t) = F(c(s), t)$ とし、 t に関する微分を $\cdot$ で表わそう。

$$f(t_2)/f(t_1) \leq \sup_{0 \leq s \leq 1} \frac{|E_s(s, t_2)|}{|E_s(s, t_1)|} \quad (E_s = \frac{\partial E}{\partial s})$$

$$= \sup_{0 \leq s \leq 1} \exp \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \log \|E_s(s, t)\| dt \right)$$

だから、 $\frac{d}{dt} \log \|E_s(s, t)\|$ を上から評価すればよい。

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \langle E_s, E_s \rangle &= 2 (\langle \dot{E}_s, \dot{E}_s \rangle + \langle \ddot{E}_s, E_s \rangle) \\ &= 2 (\langle \dot{E}_s, \dot{E}_s \rangle - \langle R(E_s, \dot{E}_s) \dot{E}_s, E_s \rangle) \\ &(\because \text{Jacobi eq. } \ddot{E}_s + R(E_s, \dot{E}_s) \dot{E}_s = 0) \\ &\text{where } R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]} \\ &\geq 2 (\langle \dot{E}_s, \dot{E}_s \rangle + a \langle E_s, E_s \rangle) \end{aligned}$$

だから、 $\langle E_s, E_s \rangle$ は t の凸関数である。Rauch 比較定理から

$\langle E_s, E_s \rangle$ は有界だから $\frac{d}{dt} \langle E_s, E_s \rangle \uparrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ 。特に、

$t \mapsto \langle E_s, E_s \rangle$ は $[0, \infty)$ 上可積分。従って、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \log \langle E_s, E_s \rangle \Big|_t &= \frac{\frac{d}{dt} \langle E_s, E_s \rangle}{\langle E_s, E_s \rangle} (t) = \frac{- \int_t^\infty \frac{d^2}{dt^2} \langle E_s, E_s \rangle dt}{\langle E_s, E_s \rangle} \\ &\leq -a \cdot \frac{\int_t^\infty \langle E_s, E_s \rangle}{\langle E_s, E_s \rangle}, \end{aligned}$$

特に $f(t_2)/f(t_1) \leq e^{-ka(t_2-t_1)}$ ($\exists k > 0$) だから、 $\langle E_s, E_s \rangle$

$\rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$)。従って、平均値定理により、任意の正数 ε

に対してある $t' > t$ があり、

$$\left| \frac{d}{dt} \log \|E_s\|(t) - \frac{\frac{d^2}{dt^2} \langle E_s, E_s \rangle(t')}{2 \frac{d}{dt} \langle E_s, E_s \rangle(t')} \right| < \varepsilon,$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dt} \log \|E_s\|(t) &\leq \frac{\langle \dot{E}_s, \dot{E}_s \rangle + \langle \ddot{E}_s, E_s \rangle(t')}{2 \langle E_s, \dot{E}_s \rangle(t)} + \varepsilon \\ &\leq \frac{\langle \dot{E}_s, \dot{E}_s \rangle(t') + a \langle E_s, E_s \rangle(t')}{2 \langle E_s, \dot{E}_s \rangle(t')} + \varepsilon \\ &\leq -\sqrt{a} + \varepsilon, \end{aligned}$$

従って $\frac{d}{dt} \log \|E_s\|(t) \leq -\sqrt{a}$, 特に $f(t_2)/f(t_1) \leq e^{-\sqrt{a}(t_2-t_1)}$.

条件(*)の直観的意味を述べよう。今、 H の断面曲率 K が $-b \leq K \leq -a < 0$ を満たすとする。 N が或るコンパクト多様体 N' 上の S^1 束の構造をもち、 U が N' 上の *punctured disc* 束の構造をもつとしよう。すると、自然な計量は *punctured disc* 上では所謂 Poincaré 計量に近いであろう。今 H を完備 Kähler 多様体とし、 N' (に同相な因子)をつけ加えて M をコンパクト複素多様体にできたとする。 N' が *local*に $z=0$ で書けるとすると、 M の

自然な体積要素は *local*に $\frac{1}{|z|^2 \left(\log \frac{1}{|z|^2}\right)^k}$ の order になるであ

らう。実際、Poincaré 計量の与えられた *punctured disc* にお

$$\text{いて, } a, b \in (0, 1) \text{ 間の距離} = \int_a^b \frac{ds}{s \log \frac{1}{s}} = \int_{\log a}^{\log b} \frac{dt}{|t|}$$

$$= \log \log \frac{1}{a} - \log \log \frac{1}{b} \quad (a < b \text{ と仮定した。)} \quad \text{であり, 上の notation}$$

$$\text{で, } f(t_2)/f(t_1) \leq O\left(\exp\left(-\log \log \frac{1}{|z|}\right)\right) = O\left(\frac{1}{\log \frac{1}{|z|}}\right) \quad \text{である。}$$

$\bar{M} = M \cup N'$ とし、 $\sigma \in \Gamma(\bar{M}, [N'])$ を $N' = \{\sigma=0\}$ なる如くと

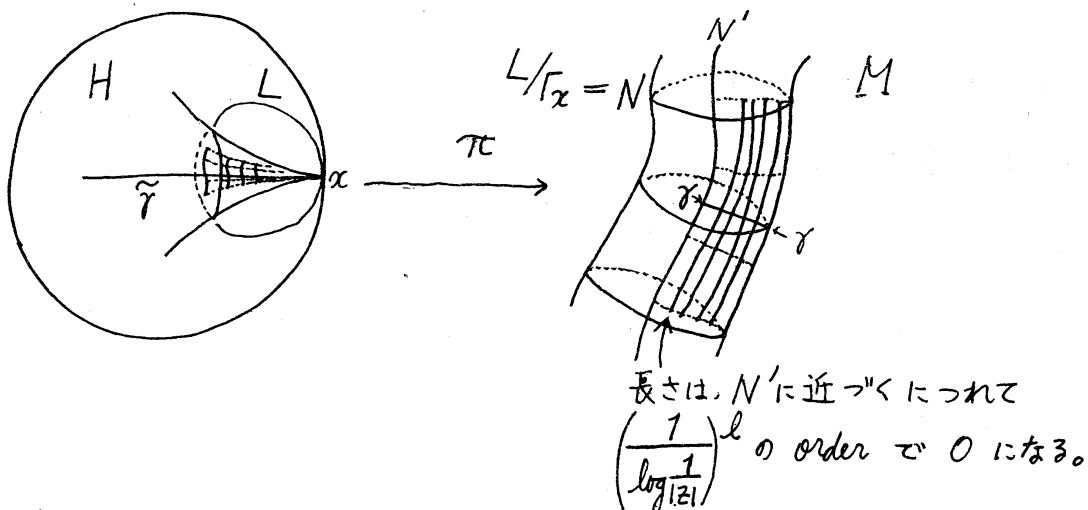
り、自然な計量を $O\left(\frac{\Omega}{|o|^{1/2}(\log \frac{1}{|o|^{1/2}})^k}\right)$ としよう。ここで Ω は $\bar{M}$ のある体積要素である。 M の自然な Kähler 計量の Ricci 型式は、大変大雑把ではあるが、*) $O(\text{Ric}(\Omega/|o|^{1/2}(\log \frac{1}{|o|^{1/2}})^k))$ と思っ
てよいであろう。

$$*) = O(\text{Ric}\{\Omega/|o|^{1/2}\} + \sqrt{-1} 2\bar{o} \log(\log \frac{1}{|o|^{1/2}})^k)$$

$$\text{ここで第2項} = O\left(\frac{|dz|^2}{|z|^2(\log \frac{1}{|z|^2})^2} + \frac{|dw|^2}{\log \frac{1}{|z|^2}}\right)$$

(w は N' に parallel な方向を表わす局所座標),

第1項は $K_{\bar{M}} \otimes [N']$ の第1 Chern 類を代表する。曲率 K が $-b \leq K \leq -a < 0$ を仮定しているから、 $-\text{Ric}$ はもとの計量に equivalent である。従って、第1項は、 N' に tangent な方向が、 N' に沿って 0 になっていることが必要になる。



H の複素次元が 2 の時、上のことは、 $K_{\bar{M}} \otimes [N']$ と $[N']$ の交点数が 0 になることを含意している。何故なら、交点数は $K_{\bar{M}} \otimes [N']$ の第1 Chern 類を N' 上で積分することにより得られるからである。 $L^2 > 0$ は、^{vol} 体積 > 0 に相当する。以上が (*) の意

味である。定理1の1つの応用として次の結果を得る。

定理2. $(\bar{M}, D)$ を定理1のとおりとする。 $(\bar{M}, D)$ の第 i 対数的 Chern 類を $\bar{c}_i$ で表わそう。すると、次の不等式が成立つ。 $\therefore 3\bar{c}_2 \geq \bar{c}_1^2$,

等号が成立するのは、 $M = \bar{M} - D$ が $\mathbb{C}^2$ の単位球により正則に cover されるとき、しかもその時に限る。

ここで、対数的 Chern 類は次の様に定義される。 $\bar{M}$ をコンパクト複素多様体、 D を単純正規交叉のみもつ因子とする。 Δ^n を $\bar{M}$ の座標多重円板とし、 $\Delta^n \cap D = \bigcup_{i=1}^k (z_i = 0)$ とする。 Δ^n 上での切断が $\sum_{i=1}^k a_i(z) \frac{dz_i}{z_i} + \sum_{j=k+1}^n b_j(z) dz_j$, $a_i(z), b_j(z)$ は正則函数、与えられるような正則ベクトル束を $\Omega^1(\log D)$ と記す。そこで、 $(\bar{M}, D)$ の第 i 対数的 Chern 類 $\bar{c}_i$ を、 $\bar{c}_i = (-1)^i c_i(\Omega^1(\log D)) = c_i(\Omega^1(\log D)^*)$ で定義する。Mumford のコンパクト化 [1] は、定理2における equality case を与える。 $D = \phi$ なら定理2は Yam [12] の結果である。

定理1の証明の概略は次の様なものである。定理1の D を無限遠の因子と呼ぶことにする。 D の近傍の複素構造を決定することによって、2次元有界対称領域 B^2, Δ^2 との関連がわ

かり、 $M = \bar{M} - D$ 上の体積要素でそのRicci型式の符号を変えたものが M の完備Kähler計量となり、その体積要素が元の体積要素と同値になるものが構成できる。その完備Kähler計量をdeformして、完備Einstein-Kähler計量が得られるわけである。その証明は、コンパクトの場合におけるAubin, Yauの方法が我々の場合に適用可能になることを確かめることによりなされる([4]を参照)。以下の章で、定理1の証明を与える。

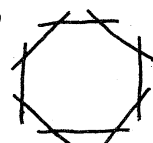
1. 体積要素の構成

補題1. (M, D) を定理1のとおりとし、 $L := K_{\bar{M}} \otimes [D]$, D を連結成分に分解して $\sum_{\nu} D_{\nu}$ になるとする。この時、各 D_{ν} は次の3つのtypeに分類される。(i)負の自己交点数をもつ非特異楕円曲線、(ii)負の自己交点数をもつ有理曲線で、唯1つのnodeをもつ、(iii)非特異有理曲線のcycle。

証明. $\{C_i\}$ を D の既約成分 $\wedge$ の分解とする。 D の形の決定にはadjunction formulaとHodge's index theorem [7]が有効である。まず仮定とadjunctionより、 $0 = L \cdot C_i = K \cdot C_i + C_i^2 + \sum_{j \neq i} C_j \cdot C_i$
 $= 2g(C_i) - 2 + \deg L_i + \sum_{j \neq i} C_j \cdot C_i$, ここで L_i は C_i の導手とよばれる C_i の非特異モデル $\widehat{C}_i$ 上の因子、 $g(C_i)$ は $\widehat{C}_i$ の種数である。
 $\deg L_i \geq 0$ であり、 $L_i = 0$ と $C_i = \widehat{C}_i$ とは同値である。上の式から
 (i) $g(C_i) = 1$, $\deg L_i = 0$, $\sum_{j \neq i} C_j \cdot C_i = 0$; (ii) $g(C_i) = 0$, $\deg L_i = 2$,

$\sum_{j \neq i} C_j \cdot C_i = 0$; (iii) $g(C_i) = 0$, $\deg L_i = 0$, $\sum_{j \neq i} C_j \cdot C_i = 2$ の場合のみ可能である。ここで D が正規交叉ということを用いた。自己交点数についての主張は, Hodge index th. から出る。証終。

注意. 補題 1 (iii) の configuration は, 右図のようになる。



この cycle の既約成分の中に第 1 種例外曲線 E , すなわち $E^2 = -1$ となる $E = P'$ が含まれているとしよう。この E を blow down しても有理曲線の cycle であり, 新しく得られる $(\bar{M}', D')$ も定理 1 の条件を満たしている。従って, 定理 1 で, D は始めから第 1 種例外曲線を既約成分に含まないとしてよい。特に, 補題 1 (iii) で, 各既約成分の自己交点数は -2 以下, 少なくとも 1 つは -3 以下である (Hodge index th.)。

命題 1. $(\bar{M}, D)$ を定理 1 のとおりとする。この時, 次の様な正整数 $m_0(\bar{M}, D)$ が存在する: $m \geq m_0$ なる任意の整数 m に対して $|mL|$ は基底点を含まない。さらに, $N = \dim_{\mathbb{C}} H^0(\bar{M}, mL) - 1$ とし, $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N\}$ を $H^0(\bar{M}, mL)$ の基底とすれば, $\Phi_{mL}: \bar{M} \rightarrow \mathbb{P}^N$; $z \mapsto (\phi_0(z): \phi_1(z): \dots: \phi_N(z))$ は次の様な正則写像である。 $\Phi_{mL}^{-1}(\Phi_{mL}(z)) = \begin{cases} z & \text{if } z \in \bar{M} - D, \\ D_\nu & \text{if } z \in D_\nu, \end{cases}$ しかも $\Phi_{mL}|_{\bar{M}-D}$ は双正則写像である。

証明は, Kodaira [10] の *slight modification* なので 省略する。*)_{脚注}

補題 2. $(\bar{M}, D)$ を定理 1 のとおりとする。この時, $C_1(L)$ は次の性質をもつ実閉 (1,1) 型式 γ により代表される: (i) γ は $M = \bar{M} - D$ 上正定値, (ii) C を D の任意の既約成分とし $\iota_D: C \hookrightarrow \bar{M}$ を埋込みとすれば $\iota_C^* \gamma = 0$ となる。

証明. 命題 1 の $\mathbb{P}^N$ の Fubini-Study 計量型式をひき戻したものを $m\gamma$ とすればよい。証終。

次に, A を D の 1 つの連結成分とし, $\bar{M}$ の非特異楕円曲線とする。 A の近傍について考察する。まず, A の近傍に次の Grauert の結果 [6] を適用する: $\pi: (\tilde{X}, A) \rightarrow (X, x)$ を正規 2 次元特異点 (X, x) の *minimal resolution* で $\pi^{-1}(x) = A$ が種数 g の非特異曲線から成るとする。 N を $\tilde{X}$ における A の法束とする。もし, $A \cdot A < 4 - 4g$ ならば, $\tilde{X}$ における A の近傍 N と N における零切断 A の近傍 V を適当にとれば $\phi|_A = \text{identity}$ となる双正則写像 $\phi: U \rightarrow V$ が存在する。— 今 $g(A) = 1$, $A \cdot A = -b < 0$ なので $\bar{M}$ における A の適当な近傍 V は N の零切断の近傍と思ってよい。 N は degree $-b$ の A 上の直線束である。 $A = \mathbb{C}/L$, $L = \{\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \omega; \text{Im } \omega > 0\}$, $\pi: \mathbb{C} \rightarrow A$ を射影としよう。 $a > 0$ を, $|dz|^2$ に関する L の基本領域の面積とする。 A 上の実閉 (1,1) 型式 η で, $\pi^* \eta = \frac{\sqrt{-1}}{2a} dz \wedge d\bar{z}$ となるものをとる。 $[\eta]$ は

*) 15頁と19-20頁における 注意 を考慮に入れればよい。

$H^2(A; \mathbb{R})$ の生成元である。正則直線束 $N \rightarrow A$ の Hermite 計量 ρ でその曲率型式が $-2\pi b\eta$ となるものをとる。 $\pi^*N \rightarrow \mathbb{C}$ の誘導計量の曲率型式は $-\frac{\sqrt{1}b\pi}{a} dz \wedge d\bar{z}$ である。 $H^1(\mathbb{C}, \mathbb{C}^*) = \{1\}$ ゆえ、正則直線束の同型 $\mathbb{C}^2 \cong \pi^*N$ ($\mathbb{C}^2$ は $\mathbb{C}$ 上の自明束) が存在する。特に $\pi^*\rho$ は $\mathbb{C}$ 上の正值の函数と思ってよい。 $\mathbb{C}$ 全体で定義された正則函数 $\zeta(z)$ が存在して $\pi^*\rho(z) = (e^{-|z|^2} |e^{\zeta(z)}|^2)^{\frac{b\pi}{a}}$ となる。 $\mathbb{C}^2$ の双正則写像 $(w, z) \mapsto (e^{-\frac{b\pi}{a}\zeta(z)} w, z)$ は $\mathbb{C}$ 上の自明束の同型で、Hermite 計量 $(e^{-|z|^2})^{\frac{b\pi}{a}}$ は $\pi^*\rho(z)$ にひき戻される。従って $\pi^*N = \mathbb{C}^2$, $\pi^*\rho(z) = (e^{-|z|^2})^{\frac{b\pi}{a}}$ としてよい。 U を、 $\overline{U}$ が L の基本領域に入る様な開集合とする。 $\mathbb{C} \times U$ と $\mathbb{C} \times (U + \gamma)$ はともに $N/\pi(U)$ の局所自明化だから、 U 上で定義された零にならない正則函数 $g(z)$ で、 $(w, z) \in \mathbb{C} \times U$ と $(w', z') \in \mathbb{C} \times (U + \gamma)$ が $N/\pi(U)$ の同じ点を表わす $\Leftrightarrow z' = z + \gamma$, $w' = g(z) \cdot w$ となるものが存在する。 $g(z)$ は次の式を満たす： $|w|^2 / (e^{-|z|^2})^{\frac{b\pi}{a}} = |g(z)|^2 |w|^2 / (e^{-|z+\gamma|^2})^{\frac{b\pi}{a}}$, ($\forall z \in U, \forall w \in \mathbb{C}$)。従って $g(z) = e^{-\frac{b\pi}{a}(z\bar{\gamma} + \frac{|\gamma|^2}{2} + i\theta(\gamma))}$, ここで $\theta(\gamma)$ は γ により $\text{mod } \frac{2a}{b}\mathbb{Z}$ で決まる実定数である。さて $\theta(\gamma)$ を調べよう。 $z' = z + \gamma$, $z'' = z' + \gamma' (\gamma, \gamma' \in L)$ とすると $(w, z), (w', z'), (w'', z'')$ が N の同じ点を表わすための必要十分条件は、次の3式が成立することである： $w'' = e^{-\frac{b\pi}{a}(z(\bar{\gamma} + \bar{\gamma}') + \frac{(\gamma + \gamma')^2}{2} + i\theta(\gamma + \gamma'))} w$,
 $w'' = e^{-\frac{b\pi}{a}(z'\bar{\gamma}' + \frac{|\gamma'|^2}{2} + i\theta(\gamma'))} w'$,
 $w' = e^{-\frac{b\pi}{a}(z\bar{\gamma} + \frac{|\gamma|^2}{2} + i\theta(\gamma))} w$.

特に $\theta(\gamma + \gamma') = \theta(\gamma) + \theta(\gamma') - \operatorname{Im}(\bar{\gamma}\gamma') \pmod{\frac{2a}{b}\mathbb{Z}}$ である。 $L = \{\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\cdot\omega; \operatorname{Im}\omega = a > 0\}$ であった。従って, α, β を $\theta(1), \theta(\omega)$ の代表元として固定すれば, $\theta(m+n\omega) = m\alpha + n\beta - mn\alpha \pmod{\frac{2a}{b}\mathbb{Z}}$ となる。こうしてわかった $\theta(\gamma)$ ($\gamma \in L$) を用いて (3×3) 行列の群 Γ を次の様に定義する;

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2i\bar{\gamma} & i|\gamma|^2 - 2h(\gamma) \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \right. \\ \left. \begin{array}{l} \gamma \in L, \quad h(m+n\omega) \text{ は } \theta(m+n\omega) \text{ の代表元,} \\ \text{つまり } m\alpha + n\beta - mn\alpha \pmod{\frac{2a}{b}\mathbb{Z}} \text{ の元.} \end{array} \right\}$$

$\mathbb{C}^2$ の単位球に双正則な $\mathbb{C}^2$ の領域 $\mathcal{S}$ を $\{(u, v) \in \mathbb{C}^2; \operatorname{Im} u - |v|^2 > 0\}$ で定義する。 $z_1 = \frac{u-i}{u+i}, z_2 = \frac{2v}{u+i}$ は単位球への双正則写像である。正数 k に対して $W = \{(u, v) \in \mathcal{S}; \operatorname{Im} u - |v|^2 > k\}$ を考える。単位球で言えば, 無限遠点 $(1, 0)$ における horoball である。 Γ は $\mathcal{S}$ の双正則同型の離散群で $\mathcal{S}$ に真に不連続かつ固定点なしに作用して, W を不変にしている。この作用は,

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 2i\bar{\gamma} & i|\gamma|^2 - 2h(\gamma) \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + 2i\bar{\gamma}v + i|\gamma|^2 - 2h(\gamma) \\ v + \gamma \\ v \end{pmatrix}$$

によって与えられる。写像 $F: W \rightarrow \mathbb{C}^2, (u, v) \mapsto (e^{\frac{b\pi}{2a}i}u, v)$ により $F(W) = V' = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 \mid 0 < |w|^2 / (e^{-|z|^2})^{\frac{b\pi}{a}} < e^{-\frac{b\pi}{a}k}\}$ になる。

$V = \{w \in \mathbb{C}^2; 0 < \rho(w, w) < e^{-\frac{b\pi}{a}k}\}$ とおけば $V' = \pi^{-1}(V)$ となる。 V は楕円曲線 A 上の punctured disk 束である。以下, W/Γ が V に双正則なることを証明する。 W の元 (u, v) と (u', v') が Γ の元で移り合うとすると, $\pi \circ F(u, v) = \pi \circ F(u', v')$ となることにまず注意する。これは Γ の ρ の作用の定義と $\rho(z)$ の定義からわかる。

従って, $W \xrightarrow{\text{proj.}} W/\Gamma$ が可換となる様な正則写像 $\tilde{F}: W/\Gamma \rightarrow V$

$\mathbb{C}^2 \supset \pi^{-1}(V) = V'$ $\tilde{F}$ が唯一存在することがわかる。

$\pi \downarrow$ Γ の ρ の作用を始め天下り式に定義したが, 実は $\pi \circ F(u, v) = \pi \circ F(u', v') \iff (u', v')$ と

(u, v) は Γ の元で移り合う, となる様に Γ の作用を定義すれば前の定義と一致する。 F は本質的に上半平面を punctured disk に写す正則写像だから, 序で述べた見地から見れば Γ および Γ の ρ の作用の定義は自然に出てくるわけである。従って

$\tilde{F}: W/\Gamma \rightarrow V$ は双正則である。 B^2 の Bergman 計量を $\rho = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 \mid \text{Im } u - |v|^2 > 0\}$ に移したものは,

$$\sqrt{-1} \left\{ \frac{du \wedge d\bar{v}}{\text{Im } u - |v|^2} + \frac{\left(-\frac{\sqrt{-1}}{2} du - \bar{v} dv\right) \wedge \left(\frac{\sqrt{-1}}{2} d\bar{u} - v d\bar{v}\right)}{(\text{Im } u - |v|^2)^2} \right\}$$

だから, $W/\Gamma \cong V$ により V に自然に誘導される Kähler 計量は, V の局所座標 (w, z) (ただし, $F(u, v) = (w, z)$, i.e., $z = v$, $w = e^{\frac{b\pi}{2a}iu}$) に関して表せば,

$$\sqrt{-1} \left\{ \frac{dz \wedge d\bar{z}}{\frac{a}{b\pi} \log \frac{1}{|w|^2} - |z|^2} + \frac{\left(-\frac{a}{b\pi} \frac{dw}{w} - \bar{z} dz\right) \wedge \left(-\frac{a}{b\pi} \frac{d\bar{w}}{\bar{w}} - z d\bar{z}\right)}{\left(\frac{a}{b\pi} \log \frac{1}{|w|^2} - |z|^2\right)^2} \right\}$$

となる。そこで, $V = \{w \in N; 0 < p(w, w) < e^{-\frac{a}{b\pi} k}\}$ 上の函数 $f: V \rightarrow \mathbb{R}^+$ を, $f(w) = \log \frac{1}{p(w, w)}$ で定義すれば, $\text{proj}^* \tilde{F}^*(\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log f)$ は B^2 の Bergman 計量を δ に移したものの W への制限になる。

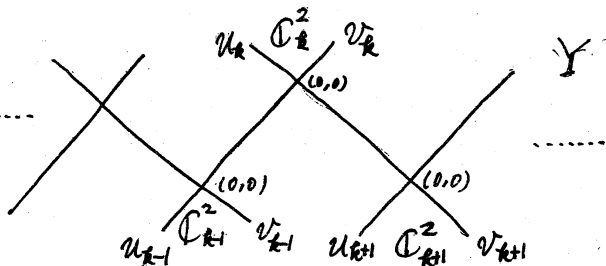
注意. A を非特異楕円曲線で負の自己交点数をもつものとすれば, $K \otimes [A]$ は A の近傍で解析的に自明である。実際, A の或る近傍 V は, A 上の負の直線束の零切断の近傍である。前の議論により, $(w, z), (w', z') \in \mathbb{C}^2$ が N の同じ点を表わす $\Leftrightarrow z' = z + \gamma, w' = g(z) \cdot w$ である。 $[A]$ の変換函数は $\frac{w'}{w} = g(z)$ であり, K の変換函数は $dw' \wedge dz' = g(z) dw \wedge dz$, すなわち $K \otimes [A]$ は A の近傍で自明である。

今度は, A を補題 1 (ii) における有理曲線の cycle としよう。この節では, A が非特異楕円曲線の際に前節で構成した様な函数 $f: V \rightarrow \mathbb{R}^+$ の, アナロジーを構成するのだが, それは, Hirzebruch によるカスプ特異点の resolution [8] と実質的に同じである。 A を既約成分に分解して $\sum_{i=0}^{r-1} A_i$ ($r \geq 2$) にならとし, $b_i = -A_i \cdot A_i \geq 2$ (少なくとも 1 つの $b_j \geq 3$) とおく。周期函数 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, $k \mapsto g_k$ を, $g_k = b_k$ ($0 \leq k \leq r-1$), $g_{k+r} = b_k$ ($\forall k$) により定義する。さて, $E \rightarrow \mathbb{P}^1$ を tautological 束の δ -tensor 積とする

と, E は 2 枚の $\mathbb{C}^2$, $U_i = \{(u_i, v_i)\}$, $i=1, 2$, で cover され, その変換則は $u_2 = \frac{1}{u_1}$, $v_2 = u_1^2 v_1$ (on $U_1 - \{u_1=0\} = U_2 - \{u_2=0\}$)

で与えられる。曲面上の非特異有理曲線で自己交点数 $-\delta$ のものは, 適当な近傍が *tautological* 束の δ -tensor 積の零切断の近傍に双正則になる。以上 2 つの事を念頭におき, 有理曲線の chain を含むような複素多様体 Y' を次の様に構成する。

$\mathbb{C}^2$ を $\mathbb{C}^2$ の copy で, (u_k, v_k) をその標準座標とする。そこで, トロジ-束の変換則にならって, $u_{k+1} = u_k^{\delta_k} v_k$, $v_{k+1} = \frac{1}{u_k}$ (*) なる同一視による $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}_k^2$ の商空間を Y とする。



同一視のは方から, $\mathbb{C}_k^2$ では $v_k=0$, $\mathbb{C}_{k+1}^2$ では $u_{k+1}=0$ で表わされる曲線は, 自己交点数 $-\delta_k$ の非特異有理曲線である。この曲線を S_k で表わす。これからの目標は, 前節と同様に, $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} S_j$ の或る近傍が, (H^2, ds^2) (H は上半平面で ds^2 は Poincaré 計量) の或る無限遠点における horo-ball を或る双正則同型の離散群で割ったものとして実現することである。

まず, (*) から, 漸化式 $\delta_k R_k = R_{k-1} + R_{k+1}$ を満たす任意の $\mathbb{R}$ 上一次独立な 2 つの数列 $\{R_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $\{R'_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ に対して,

$$(*) \quad \begin{cases} e^{2\pi i(R'_{k-1} z_1 - R_k z_2)/D_k} = u_k \\ e^{2\pi i(-R'_k z_1 + R_{k+1} z_2)/D_k} = v_k \end{cases} \quad \text{where } D_k = \det \begin{pmatrix} R_{k-1} & R_k \\ R'_{k-1} & R'_k \end{pmatrix},$$

($(u_k, v_k) \in Y - \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} S_j$)

が成立つような $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ が次の意味で well-defined になる。

まず $\{R_k\}$ の漸化式から $\begin{pmatrix} R_k & R_{k+1} \\ R'_k & R'_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{k-1} & R_k \\ R'_{k-1} & R'_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & g_k \end{pmatrix}$ であることに注意する。上式を満たす様な $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ が存在することは明かだが, 上式で k を $k+1$ にかえても式はそのまま成立つ。また, $z'_1 = z_1 + \mu_1, z'_2 = z_2 + \mu_2$ も上式を満たせば, μ_1, μ_2 は

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{k-1} & R_k \\ R'_{k-1} & R'_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \quad (n, m \in \mathbb{Z})$$

という形でなければならない。 $\{R_k\}, \{R'_k\}$ を次の様にとる。まず, 連分数 $[g_0, g_1, \dots, g_{s-1}] := g_0 - \frac{1}{g_1 - \frac{1}{g_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{g_s}}}}$ $= \frac{P_s}{Q_s}$, $(P_s, Q_s) = 1$ と書くと,

$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{P_s}{Q_s} = [g_0, g_1, \dots] =: w_0$, $g_s P_s = P_{s-1} + P_{s+1}$, $g_s Q_s = Q_{s-1} + Q_{s+1}$ となる。そこで, $R_s = P_s - Q_s \cdot w_0^{*)}$ とおく。 $\{R_s\}$ は勿論 $g_s R_s = R_{s+1} + R_{s+1}$ をみたす。定義から, $R_0 = 1, R_1 = \frac{1}{w_1}, R_2 = \frac{1}{w_1 w_2}, \dots, R_s = \frac{1}{w_1 \dots w_s}$, $R_{-1} = w_0, R_{-2} = w_0 w_1, \dots, R_{-s} = w_0 \dots w_{s-1}$, $w_s = [g_s, g_{s+1}, \dots] > 1$ である。 w_0 は 2 次無理数だから, $\{R_s\}$ を $\{R_s\}$ の共役無理数にとれる。この時, $M = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot w_0$ とおけば M は自由 $\mathbb{Z}$ 加群で, $\{1, w_0\}$, 一般に $\{R_{s+1}, R_s\} (s \in \mathbb{Z})$ はその基底である。数列 $\{g_s\}$ は周期 T をもつから, $R_r R_k = R_{k+r}$ となる。従って, $R_x \xleftrightarrow{n} n$ により $V := \{R_x^n\}_{n \in \mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}$ である。以上により $\mathbb{C}^2$ に M と V の作用が, $(n, m) \cdot (z_1, z_2) = (z_1 + n R_{k+1} + m R_k, z_2 + n R'_{k+1} + m R'_k)$ 及び $n \cdot (z_1, z_2) = (R_x^n z_1, R_x'^n z_2)$ により定義され, これらは真性不連続かつ固定点なしである。

*) $\frac{P_s}{Q_s}$ は w_0 を近似し,

$P_s - Q_s w_0 \rightarrow 0 (s \rightarrow \infty)$ である。

**) (n, m) は $n R_{k+1} + m R_k \in M$ のこと。

実際, R_s を w_s で表示した式から, $\lim_{s \rightarrow \infty} R_s = 0$, $\lim_{s \rightarrow \infty} R'_s = \infty$ になるから。これらの作用は H^2 に制限できる。実際, w_k は *totally positive* であることが次の様にしてわかる。 $w_{k+1} = g_{k+1} - \frac{1}{w_k}$ だから, $w_k^{-1} = g_{k+1} - \frac{1}{w_{k+1}^{-1}}$, 従って $w_k^{-1} = [g_{k+1}, g_{k+2}, \dots]$ (ここで $\{w_s\}$ は周期 Γ をもつことに注意)。以上から, 次の事がわかった。 $G(M, V) = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \varepsilon \in V, \mu \in M \right\}$ は, H^2 に双正則かつ真性不連続かつ固定点なしに作用し, それは $\begin{pmatrix} \varepsilon & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (z_1, z_2) = (\varepsilon z_1 + \mu, \varepsilon' z_2 + \mu')$ で与えられる。特に注意すべきことは $R_r M = M$ ($\because M = \langle R_{s+1}, R_s \rangle_{\mathbb{Z}}, R_r R_s = R_{s+r}$) により $R_r, R_{-r} = R_r^{-1}$ とともに代数的整数^{*}), 特に $R_r' = R_{-r} = R_r^{-1}$ となることである。その為, H^2 上の函数 y_1, y_2 は $G(M, V)$ の作用で不変である。式 (4) と $\{R_k\}$ の定義から, $\mathbb{C}^2/M \cong Y - \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} S_j$ となる。 H^2/M の像の Y の中での閉包を Y_+ とすれば, Y_+ は $R_{k+1} \log \frac{1}{|u_{k+1}|} + R_k \log \frac{1}{|v_{k+1}|} > 0$, $R_{k+1}' \log \frac{1}{|u_{k+1}|} + R_k' \log \frac{1}{|v_{k+1}|} > 0$ で定義される。補題 1 (iii) における有理曲線の *cycle* を得るには Y_+ に周期的な同一視を施せばよいのだが, $\mathbb{Z}$ の $Y_+ \cap$ の作用を $m \cdot ((\alpha, \beta) \text{ in } \mathbb{C}_R^2) = ((\alpha, \beta) \text{ in } \mathbb{C}_{k+mr}^2)$ により定義すれば双正則, しかも自然な同型 $V \cong \mathbb{Z}$ により, V の $H^2/M \cap$ の作用と $\mathbb{Z}$ の $Y_+ - \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} S_j \cap$ の作用は *compatible* である。さらに, $\mathbb{Z} \curvearrowright Y_+$ は真性不連続かつ固定点なしである。前者は次の様にしてわかる。 $H^2/M \cong Y_+ - \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} S_j$, $V \curvearrowright H^2/M$ は真性不連続だから, $p, q \in Y_+$ 少なくとも一方が $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} S_j$ に入っている時,

^{*}) Hamilton-Cayley の定理による。

p, q の Y_+ における適当な近傍 U_1, U_2 をとれば $q U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ なる $j \in \mathbb{Z}$ は有限個であることを示せばよい。一方だけ $\bigcup_j S_j$ に入っている時は、他方は或る $\text{horoball} \{y_1 \cdot y_2 > k\}$ の外にあるから明らか。両方 $\bigcup_j S_j$ に入っている時、 $p, q \in \bigcup_j S_j$ の近傍 U_1, U_2 として $|u_j| < \varepsilon, |v_j| < \frac{1}{\varepsilon}$ in $\mathbb{C}_j^2$, $|u_k| < \varepsilon, |v_k| < \frac{1}{\varepsilon}$ in $\mathbb{C}_k^2$ の形にとれる。 $(u_j, v_j) \in \mathbb{C}_j^2$ が n により $(u_k, v_k) \in \mathbb{C}_k^2$ に写れば、 $u_k = u_j^a v_j^b, v_k = u_j^{-c} v_j^{-d}$ *) (ここで、 $\begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} g & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g+1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdots$ なる連続的な有限積。 P_s, Q_s の定義より $\begin{pmatrix} P_k & P_{k+1} \\ Q_k & Q_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_k & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} g_0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{-1} & P_0 \\ Q_{-1} & Q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 故、 $\begin{pmatrix} P_{k+1} & Q_{k+1} \\ -P_k & -Q_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_k & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} g_0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とくに $c > d > 0$ となる。) である

が、 ε を十分小にとれば $|u_j| < \varepsilon, |v_j| < \frac{1}{\varepsilon}$ と $|u_k| < \frac{1}{\varepsilon}$ は両立できない。従って $\mathbb{Z} \curvearrowright Y_+$ は真性不連続。以上から、次の双正則同型が示せた： $H^2/G(M, V) \cong Y_+ \setminus \bigcup_j S_j / \mathbb{Z}$; $\cong$ を代表元で書けば $2\pi i z_1 = R_{k+1} \log u_k + R_k \log v_k, 2\pi i z_2 = R'_{k+1} \log u_k + R'_k \log v_k$ となる。(式*)。特に、 $\{y_1 \cdot y_2 > k\}_{k>0}$ の像 $\{(u_k, v_k) \mid (R_{k+1} \log \frac{1}{|u_k|} + R_k \log \frac{1}{|v_k|}) \cdot (R'_{k+1} \log \frac{1}{|u_k|} + R'_k \log \frac{1}{|v_k|}) > k\}_{k>0}$ は、 A の基本近傍系となる。 $f(u_k, v_k) = (R_{k+1} \log \frac{1}{|u_k|} + R_k \log \frac{1}{|v_k|}) (R'_{k+1} \log \frac{1}{|u_k|} + R'_k \log \frac{1}{|v_k|})$ は A の近傍で定義された関数で、 $-\sqrt{7} \sqrt{2} \log f$ を上の同型を通して H^2 にひき戻せば H^2 の Poincaré 計量になる。これは前節の f に相当する。

注意 A を上のとおりとすれば $K \otimes [A]$ は A の或る近傍で解

*) k と l は逆がわからない。
が証明に差つかえはない。

析的に自明。実際, $u' = u^8 v, v' = u^{-1}$ により $du' \wedge dv' = u^{8-2} du \wedge dv$,
 $[A]$ の変換関数系は $u'v'/uv = u^{8-2}$ である。

A が補題 1 (ii) のものの時, $A^2 = -b_0$ とすると, 前節で $\forall g_i = b_0 + 2, r = 1$ として同様の構成を行なうことにより, 自己交点数 $-b_0$ で通常 2 重点を 1 つだけもつ有理曲線を得る。従って f は前節と同様のものがとれる。

無限遠の因子の近傍におけるこれらの強多重調和函数 $-\log f$ を用いて, M の体積要素で D に沿って pole をもつものを作る。 M の C^∞ な体積要素 Ω , 各 $[C_i]$ の Hermite 計量 $|\cdot|$ を適当にとることにより, $-\text{Ric} \left\{ \frac{\Omega}{\prod_i |s_i|^2} \right\} =: \gamma$ が補題 2 の条件を満たすようにする。ここで, $C_i = (s_i = 0)$ にとっている。

(1) まず, A を非特異楕円曲線とする。前の様に A の近傍の座標 (u, z) (A は $w=0$) をとれば $f(w, z) = \log \left\{ \left(e^{-|z|^2} \right)^{\frac{b\pi}{a}} / |w|^2 \right\}$ である。

A の近傍で f と一致する様な M 上の C^∞ 函数 $\tilde{f}$ をとると, $\gamma - \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log \tilde{f}$ は A の近くで正定値でも A から離れたところか不明である。そこで, 正数 C に対して $-\partial \bar{\partial} \log(f+C) = \frac{b\pi dz \wedge d\bar{z}}{a(f+C)} + \frac{2f \wedge \partial \bar{\partial} f}{(f+C)^2} (\text{near } A)$ となることに注意すると次がわかる。 $\tilde{f}: M \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}_{>0}$ があり, 或正数 C に対して A の或近傍で $\tilde{f} = f + C$, A 以外の D の連結成分の或近傍 U では constant, $M - U$ 上で

$\gamma - \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log \tilde{f} \gg 0$ が成立つ。さらに正数 c' を十分大きくとれば
 $\gamma - \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log(\tilde{f} + c')$ が正定値になる範囲は, A 以外の D の連結成
 分の補集合の中で好きなだけ (relatively cpt の範囲内) で大きくできる。

(2) 次に A を補題 1 の (iii) 又は (ii) のものとする。双正則写像

$H^2/M \cong Y_+ - \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} S_j$; $2\pi i z_1 = R_{k-1} \log u_k + R_k \log v_k$, $2\pi i z_2 =$
 $R'_{k-1} \log u_k + R'_k \log v_k$ を思い出しておく。(a₁, a₂) を H^2 の点とし固
 定する。 $Y_+ - \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} S_j$ の点 $(\alpha_k, \beta_k) \in \mathbb{C}_k^2$ を, $2\pi i a_1 = R_{k-1} \log \alpha_k +$
 $R_k \log \beta_k$, $2\pi i a_2 = R'_{k-1} \log \alpha_k + R'_k \log \beta_k$ とする様に固定する。

函数 $\tilde{f}_{\alpha_k, \beta_k}(u_k, v_k) = \left(R_{k-1} \log \frac{1}{|u_k| |\alpha_k|} + R_k \log \frac{1}{|v_k| |\beta_k|} \right) \left(R'_{k-1} \log \frac{1}{|u_k|^2 |\alpha_k|^2} + R'_k \log \frac{1}{|u_k|^2 |\beta_k|^2} \right)$
 は $Y_+/\mathbb{Z} - \bigcup_{j=0}^{r-1} S_j$ 上で well-defined である。 $\tilde{f}$ は (1) のとおりとし
 よう。 $-\partial \bar{\partial} \log \tilde{f} = \frac{2(R_{k-1} \log \frac{1}{|u_k| |\alpha_k|} + R_k \log \frac{1}{|v_k| |\beta_k|}) \wedge \bar{\partial} (=)}{(R_{k-1} \log \frac{1}{|u_k| |\alpha_k|} + R_k \log \frac{1}{|v_k| |\beta_k|})^2} + \left(R \text{ を } R' \text{ に} \right)$ が
 $\gg 0$ に注意すれば, (1) と同じく次がわかる。 $\tilde{f}: M \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}_{>0}$

があり, $Y_+ - \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} S_j$ の或元 (α_k, β_k) に対して A の或近傍で $\tilde{f} =$
 $\tilde{f}_{\alpha_k, \beta_k}$, $\tilde{A}$ 以外の D の連結成分の或近傍 U では constant, $M - U$
 上で $\gamma - \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log \tilde{f} \gg 0$ が成立つ。さらに, $(\alpha'_k, \beta'_k) \in Y_+ - \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} S_j$ を
 十分 $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} S_j$ に近くとれば, U が好きだけ小さくなるように $\tilde{f}$ を
 とれる。この事は, 式 $-\partial \bar{\partial} \log(g+h) = \frac{-\partial \bar{\partial}(g+h)}{g+h} + \frac{\partial(g+h) \wedge \bar{\partial}(g+h)}{(g+h)^2}$ に注
 意すればわかる。以上をまとめると, 次を得る。

補題 3. $(\bar{M}, D)$ を定理 1 のとおりとする。 D_ν ($1 \leq \nu \leq n$) を
 D の連結成分とする。 $1 \leq \nu \leq \mu$ に対し D_ν は非特異楕円曲線,

$\mu+1 \leq \nu \leq n$ に対し D_ν は有理曲線から成っているとす。この時、 $\bar{M}$ 上の C^∞ 体積要素 Ω , 各 $[C_i]$ の Hermitian 計量 $| \cdot |$, 各 D_ν の近傍 U_ν , M 上の C^∞ 函数 f_ν ($1 \leq \nu \leq n$) が存在して次の性質を満たす: $f_\nu|_{U_\nu}$ は, $1 \leq \nu \leq \mu$ の時, 20 項で作った函数 $\tilde{f} + C'$ に一致し, $\mu+1 \leq \nu \leq n$ の時, 21 項で作った函数 $\tilde{f}_{\alpha_k, \beta_k}$ に一致する。また, D に沿って pole を持つ体積要素 Ψ を,

$$\Psi = \frac{\Omega}{\prod_i |s_i|^2 \prod_{\nu=1}^{\mu} f_\nu^3 \prod_{\nu=\mu+1}^n f_\nu^2} \quad \text{で定義すれば,}$$

- (i) $(M, -\text{Ric} \Psi)^{*})$ は, 完備 Kähler 多様体で, その体積は有限,
 (ii) ある正定数 C が存在して, $C^{-1} < \Psi / (-\text{Ric} \Psi)^2 < C$ on M となる。

2. $(M, -\text{Ric} \Psi)$ の quasi-coordinate

定義 V を $\mathbb{C}^n$ の領域とする。 M を n 次元複素多様体とし, 正則写像 $\varphi: V \rightarrow M$ があるとする。 φ が quasi-coordinate であるとは, φ が V 上至る所極大階数なることと定義する。 $(V; \mathbb{C}^n$ の標準座標) を M の local quasi-coordinate という。

補題 4. $(\bar{M}, D)$ を定理 1 のとおりとする。 $M = \bar{M} - D$ には, 次の性質を満たす local quasi-coordinate system $\mathcal{V} = \{(V; v^1, v^2)\}$ が存在する: (i) V の images は M を覆い, 各 V の image は M の中で相対コンパクト, (ii) D のある近傍の外では V は通常の意味での局所座標近傍になっている, (iii) V に依らぬ或定数 $\delta > 0$ に対し, 各 V は

*) $-\text{Ric} \Psi$ は, 無限遠では B^2 or Δ^2 から来る metric に equivalent である。

直径 δ の球に一様に近い*)、(iv) $V \in \mathcal{V}$ に依らない正定数 c , A_k ($k=0, 1, 2, \dots$) があって次を満たす; $c^{-1}(\delta_{ij}) < (g_{ij}) < c(\delta_{ij})$, $|\left(\frac{\partial^{|\mu|+|\bar{\mu}|}}{\partial v^{\mu} \partial \bar{v}^{\bar{\mu}}}\right) g_{ij}| < A_{|\mu|+|\bar{\mu}|}$ ($\mu, \bar{\mu}$: 多重指標), 二で g_{ij} は座標 v^1, v^2 に関する $-Ric \Psi$ の成分である。

証明 $\eta \in (0, 1)$ に対して, $\Phi_{\eta}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, $(u, v) \mapsto (s, t)$ を $s = \frac{1-\eta}{1+\eta} u$, $t = \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}} v$ で定義する。 $\mathcal{S}(s, t) \supset B(R)$ を, $B(R) = \{ |s-c|^2 + 4|t|^2 < R^2 \mid |s+c|^2 \}$ ($0 < R < 1$: fix) で定義する。 $B_{\eta}(R) := \Phi_{\eta}^{-1}(B(R)) \subset \mathcal{S}(u, v)$ とすると, $\operatorname{Im} u - |v|^2 > \operatorname{Im} u - \{ R^2 |1+c|^2 - |1-c|^2 \}$, 二で $\operatorname{Im} u$ と $|c|$ は上下から正定数で押えられ, $u = \frac{1+\eta}{1-\eta} s$ 故から, $\forall k > 0$ に対し $1-\eta > 0$ を十分小にとれば $B_{\eta}(R) \subset W = \{ (u, v) \in \mathcal{S} \mid \operatorname{Im} u - |v|^2 > k \}$. $G := \{ (u, v) \in \mathcal{S} \mid \operatorname{Im} u - |v|^2 > k, -\frac{2\pi}{b} \leq \operatorname{Re} u \leq \frac{2\pi}{b} a, v=0, \operatorname{Im} u > K \}$ とおけば, $K > 0$ が十分大ならば $G \subset W \cap \bigcup_{0 < \eta < 1} B_{\eta}(R)$ となる。 $F: W \rightarrow V'$; $(u, v) \mapsto (e^{\frac{b\pi}{2a} iu}, v)$ は極大階数の全射であった。 $F(G) = \{ (w, 0) \in \mathbb{C}^2; 0 < |w| < e^{-\frac{b\pi}{2a} k} \}$ となる。従って, D の 1 つの連結成分 A が非特異楕円曲線の時は, A の或開近傍は F に由来する quasi-coordinate の像で (iii) を満すもの (具体的には $B(R)$) で cover できる。

(iv) については, $z = v$, $w = e^{\frac{b\pi}{2a} iu}$, $u = \frac{1+\eta}{1-\eta} s$, $v = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} t$ によ

$$\eta, \gamma = \alpha e^{-\frac{b\pi}{a} \frac{1+\eta}{1-\eta} \operatorname{Im} s} \left(\frac{1+\eta}{1-\eta} \right)^2 dt \wedge d\bar{t} + \beta e^{-\frac{b\pi}{a} \frac{1+\eta}{1-\eta} \operatorname{Im} s} \left(\frac{1+\eta}{1-\eta} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$dt \wedge ds + \beta' e^{-\frac{b\pi}{a} \frac{1+\eta}{1-\eta} \operatorname{Im} s} \left(\frac{1+\eta}{1-\eta} \right)^{\frac{3}{2}} ds \wedge d\bar{t} + \delta e^{-\frac{b\pi}{a} \frac{1+\eta}{1-\eta} \operatorname{Im} s} \left(\frac{1+\eta}{1-\eta} \right)^2$$

$$ds \wedge d\bar{s} \quad (\gamma \text{ は前章のもの}), \quad \partial \bar{\partial} \log(f+c) = \frac{dt \wedge d\bar{t}}{\operatorname{Im} s - |t|^2 + \frac{1-\eta}{1+\eta} c} + \frac{\left(-\frac{\sqrt{c}}{2} ds - \bar{t} dt \right) \wedge (\cdot)}{\left(\operatorname{Im} s - |t|^2 + \frac{1-\eta}{1+\eta} c \right)^2}$$

*) $\mathbb{C}^n$ の開集合として意味は証明の中にあるとおり。

, ここで $\alpha, \beta, \beta', \delta$ は (w, z) の C^∞ 函数である。従って, $\forall p > 0$ に対し $\lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^p e^{-t} = 0$ に注意すれば, (iv) も O.K.。次に, A を有理曲線から成る連結成分とする。 $\tilde{H}: H^2 \rightarrow Y_+ / \mathbb{Z} - \bigcup_{j=0}^{r-1} S_j$ を $H^2 \xrightarrow{p_{nj}} H^2/M \xrightarrow{F} Y_+ - \bigcup_j S_j \xrightarrow{p_{nj}} Y_+ / \mathbb{Z} - \bigcup_{j=0}^{r-1} S_j$ とする。 $W = \{(z_1, z_2) \in H^2; \operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2 > K\}$ とし, $\tilde{H}|_W$ を考える。 $\tilde{F}(W)$ は $\bar{M}$ における A の開近傍である。 $p: H^2 \rightarrow \{(w^1, w^2) \in \mathbb{C}^2; \operatorname{Im} w^1 > \operatorname{Im} a^1, \operatorname{Im} w^2 > \operatorname{Im} a^2\}$ (a^1, a^2 は前章のとおり) を, $p(z^1, z^2) = (z^1 + (\operatorname{Im} a_1)\sqrt{-1}, z^2 + (\operatorname{Im} a^2)\sqrt{-1})$ なる双正則写像とする。 $p^*(F^*(-\partial\bar{\partial} \log \tilde{f})) = \operatorname{Const.} p^*\left(\frac{dz_1 \wedge d\bar{z}_1}{(\operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} a_1)^2} + \frac{dz_2 \wedge d\bar{z}_2}{(\operatorname{Im} z_2 + \operatorname{Im} a_2)^2}\right) = \operatorname{Const.} \left\{ \frac{dw_1 \wedge d\bar{w}_1}{(\operatorname{Im} w_1)^2} + \frac{dw_2 \wedge d\bar{w}_2}{(\operatorname{Im} w_2)^2} \right\}$, ここで $\operatorname{Im} w_1 > \operatorname{Im} a_1 > 0, \operatorname{Im} w_2 > \operatorname{Im} a_2 > 0$ 。 $W_L = \{(w_1, w_2); \operatorname{Im} w_1 > \operatorname{Im} a_1 + L, \operatorname{Im} w_2 > \operatorname{Im} a_2 + \frac{K}{L}\}$ とおけば, $p(W) = \bigcup_{L>0} W_L$ 。 $\mu \in \mathbb{R}, \eta \in (0, 1)$ に対し $\Phi_{\mu, \eta}(w) = \frac{1-\eta}{1+\eta}(w-\mu) + \mu: H \rightarrow H$ とおく。 $B(a, r)$ で a 中心半径 r の円盤 $\mathbb{D}$ を表わす。この時, $W_L = \left\{ \bigcup_{\mu_i \in \mathbb{R}} \bigcup_{\eta_i \geq \eta_i(L)} \Phi_{\mu_i, \eta_i}^{-1}(B(\mu_i + \sqrt{-1}, \frac{1}{2})) \right\} \times \left\{ \bigcup_{\mu_2 \in \mathbb{R}} \bigcup_{\eta_2 \geq \eta_2(L)} \Phi_{\mu_2, \eta_2}^{-1}(B(\mu_2 + \sqrt{-1}, \frac{1}{2})) \right\}$ かつ, ある正定数 $\eta_i(L)$ ($i=1, 2$) が成立つ。注意すべきは, ある正数 a が存在して $\eta_i(L) \geq a$ ($\forall L > 0$) となることである。 $p^*(F^*(\partial\bar{\partial} \log \tilde{f}))$ ($\tilde{f}$ は補題3のもの) に, $t_i = \frac{1-\eta_i}{1+\eta_i}(w_i - \mu_i) + \mu_i$ を代入すると, $\operatorname{Const.} \left\{ \frac{dt_1 \wedge d\bar{t}_1}{(\operatorname{Im} t_1)^2} + \frac{dt_2 \wedge d\bar{t}_2}{(\operatorname{Im} t_2)^2} \right\}$ となる。 $w_i \in \Phi_{\mu_i, \eta_i}^{-1}(B(\mu_i + \sqrt{-1}, \frac{1}{2})) \iff t_i \in B(\mu_i + \sqrt{-1}, \frac{1}{2})$ である。一方, $\gamma = \alpha |u_k|^2 |v_k|^2 \left(\frac{1-\eta_1}{1+\eta_1} \right)^2 dt_1 \wedge d\bar{t}_1 + (\text{同類の項})$ (α は u_k, v_k の C^∞ 函数), $|u_k|^2 |v_k|^2 = \exp \left\{ (2\pi(R_{k-1}' - R_k') \frac{1+\eta_1}{1-\eta_1} \operatorname{Im} t_1 + (R_k - R_{k-1}) \frac{1+\eta_2}{1-\eta_2} \operatorname{Im} t_2) / (R_{k-1}R_k' - R_k R_{k-1}') \right\}$, ここで $R_{k+1} - R_k > 0, R_k' - R_{k-1}' > 0, R_{k+1}R_k' - R_k R_{k-1}' > 0$ である。証明終。

3. Ricci < 0 な完備 Einstein-Kähler 計量の存在

Cheng-Yau [4] に従って, 定理 1 が証明される。まず, 補題 4 を用いて次の函数空間を定義する。 k を非負整数, $\lambda \in (0, 1)$ とし, $u \in C^k(M)$ とする。 $\|u\|_{k, \lambda} := \sup \left\{ \sup_{V \in \mathcal{V}} \left(\sum_{z \in V} \left| \frac{\partial^{k+1} u}{\partial \bar{v}^k \partial v} \right| \right) + \sup_{z, z' \in V, |V| \leq k} \left(\sum_{z, z' \in V} |z - z'|^{-\lambda} \left| \frac{\partial^{k+1} u}{\partial \bar{v}^k \partial v} \right| \right) \right\}$ とおく。函数空間 $C^{k, \lambda}(M)$ が, $\{u \in C^k(M); \|u\|_{k, \lambda} < \infty\}$ で定義される。これはノルム $\|\cdot\|_{k, \lambda}$ に関して Banach 空間 (Hölder space の類似物)。

補題 5. 補題 3 の Ψ に対して, $\log \left\{ \frac{\Psi}{(-\text{Ric} \Psi)^2} \right\}$ は任意の k, λ に対して $C^{k, \lambda}(M)$ に入る。

証明. 補題 4 の計算と似たことなので省略する。

定理 1 は, 次の一般的な結果 (本質的には Cheng-Yau [4]) から, 補題 3, 4, 5 により直ちに出来る。

定理. X^n を非コンパクト複素多様体とする。 X 上の体積要素 Ψ で, $\omega = -\text{Ric} \Psi$ が X の完備 Kähler 多様体で, (X, ω) が "quasi-bounded geometry" をもつとする。この時, 任意の $f \in C^{k, \lambda}(X)$ ($k \geq 3$) に対して $(\omega + \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} u)^n = e^u e^f \omega^n$ は, $C^{k+2, \lambda}(X)$ の中に, $\omega + \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} u$ が ω と equivalent になる様な解が唯一存在する。特に, $\log(\Psi/\omega^n)$ が $C^{k, \lambda}(X)$ に ($\forall k, \lambda$ に対して) 入っているれば X は負の Ricci 曲率をもつ完備 Kähler-Einstein 計量を unique に許容する。 (前半は, ω が $-\text{Ric} \Psi$ の形で) (ある必要はない。)

ここで、 X が "quasi-bounded geometry" をもつとは、 X が補題 4 (i) (iii) (iv) をみたすような quasi-coordinate による covering が存在することを意味する。この定理の証明は本質的には Aubin [2] のやり方を、通常 of 最大値原理のかわりに Yau による ([14]) "generalized maximum principle" を使うことにより、非コンパクトの場合に拡張することである。高階の微分の local な評価は内部 Schauder 評価でなされるが、その時、補題 4 (i) (ii) (iv) が必要になる。方法を復習しておくと、まず写像 $\Phi: C^{k,\lambda}(M) \rightarrow C^{k-2,\lambda}(M)$ を $u \mapsto e^{-u} (\omega + \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} u)^2 / \omega^2$ で定義する。任意の $f \in C^{k-2,\lambda}(M)$ ($k \geq 5, \lambda \in (0,1)$) に対して $\Phi(u) = e^f$ が解を $U = \{u \in C^{k,\lambda}(M); \exists C > 0 \text{ s.t. } C^{-1}\omega < \omega + \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} u < C\omega\}$ の中にもつことを示すわけであるが、その為には、 $C = \{t \in [0,1]; \exists u \in U \text{ s.t. } \Phi(u) = e^{tf}\} \ni 0$ が open かつ closed を言う。我々の場合は、 $f = \log \Psi / (-\text{Ric} \Psi)^2$ にとるわけである。その解を u とおくと $\omega + \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} u$ は $u \in U$ により完備 Einstein-Kähler 計量で、 $(M, \omega + \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} u)$ は "quasi-bounded geometry", 体積有限である。C の openness は Φ の Fréchet 微分に陰函数定理を用いて示される。C の closedness は $\Phi(u) = e^f$ の解の a priori 評価を用いて Ascoli-Arzelà にもち込む。詳しくは Aubin [3], Cheng-Yau [4] を見られたい。(我々の場合は勿論 quasi-coordinate を使って解の微分の評価をするわけであるが、結局は解 u に対して高階の共変微分のノルムが次々に M 上

様におさえられるということが結論されるので、やっていることの幾何的意味は明瞭である。)

負の Ricci 曲率をもつ完備 Einstein-Kähler 計量の定数倍を除く uniqueness は、体積要素の比較に関する Yau の "generalized Schwarz lemma" [13] から直ちに得られる。以上で、定理 1 の証明が終わった。

4. 対数的 Chern 数による超球の商空間の特徴付け

この章では定理 2 の証明を与える。まず一般的な注意から始める。 (E, h) を Hermite vector 束, $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ を, U 上の E の局所正則枠としよう。 $h_{ij} := h(e_j, e_i)$, $h = (h_{ij})$ とする。 E の Hermite 接続, すなわち (i) 正則枠に関する接続型式は $\text{type } (1, 0)$, (ii) 計量接続, とする。その接続型式は $h^{-1} \partial h$, 曲率型式 $\Omega_U = \bar{\partial}(h^{-1} \partial h)$ で与えられる。 $e_U = e_V \cdot g_{VU}$ が局所正則枠の変換則とすると $\Omega_U = g_{VU}^{-1} \Omega_V g_{VU}$ となる。さて, $(\bar{M}, D)$ を定理 1 のとおりとする。 $\omega = -\text{Ric } \Psi$ (Ψ は補題 3 のもの), $\tilde{\omega} = \omega + \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} u$ を定理 1 の Einstein-Kähler 計量とする。

補題 6. $\tilde{\omega}$ を M の正則接束の Hermite 計量と考え, その Hermite 接続から決まる Chern 型式を $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ とする。この時, $\tilde{\gamma}_1^2, \tilde{\gamma}_2$ は M 上可積分で, $\int_M \tilde{\gamma}_1^2 = C_1(\bar{M}, D)^2$, $\int_M \tilde{\gamma}_2 = C_2(\bar{M}, D)$ となる。ここで, $C_i(\bar{M}, D)$ は $(\bar{M}, D)$ の対数的 Chern 数を表わす。

証明 $\tilde{\omega} = \omega + \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} u$, $u \in U$ (U は 26 頁で定義した) だから,
 [9] の §4 の議論により, ω の Hermitian 接続から定まる Chern 型式 γ_1, γ_2
 に対して $\int_M \gamma_1^2 = \int_M \tilde{\gamma}_1^2$, $\int_M \gamma_2 = \int_M \tilde{\gamma}_2$ である。従って,
 $\int_M \gamma_1^2 = \bar{c}_1^2$, $\int_M \gamma_2 = \bar{c}_2$ を示せばよい。 $E = \Omega^1(\log D)^*$ とおき,
 h を E の smooth な Hermitian 計量とする。 ω を $\Omega^1(\log D)^*$ の Hermitian 計
 量と見て h' と書く。 h' は D に沿って singularity をもつ。 E
 の $\bar{M}$ における局所正則枠は、 D の補集合では $\mathbb{T}M$ の正則枠で
 もあるから、 h' の Hermitian 接続に関する Chern 型式は D の外で $\gamma_1,$
 γ_2 である。 γ_k で k 番目の Chern 型式を表わせば, $\gamma_k(E, h) -$
 $\gamma_k(E, h') = d\{(h, h')$ の接続型式の差), $(h$ の曲率型式), $(h'$ の曲率型式)
 の成分による universal polynomial $\}$ の形になる。

$\{ \}$ の中味を ζ_k で表わす。特に ζ_1 は 1 型式ゆえ, 接続型
 式の差のみに依る。今, Δ^2 を $\Delta^2 \cap D = \{(u, v) \mid u=0\}$ とすると,
 $\{\frac{du}{u}, dv\}$ に関する接続型式の成分 = $O\left(\frac{|du|}{|u|(\log \frac{1}{|u|})} + \frac{|dv|}{\log \frac{1}{|u|}}\right)$,
 曲率型式の成分 = $O\left(\frac{|du|^2}{|u|^2(\log \frac{1}{|u|})^2} + \frac{|dv|^2}{(\log \frac{1}{|u|})^2}\right)$
 $\Delta^2 \cap D = \{(u, v) \mid uv=0\}$ とすると, $\{\frac{du}{u}, \frac{dv}{v}\}$ に関する接
 続型式の成分 = $O\left(\frac{|du|}{|u|(\log \frac{1}{|u|} + \log \frac{1}{|v|})} + \frac{|dv|}{|v|(\log \frac{1}{|u|} + \log \frac{1}{|v|})}\right)$,
 曲率型式の成分 = $O\left(\frac{|du|^2}{|u|^2(\log \frac{1}{|u|} + \log \frac{1}{|v|})^2} + \frac{|dv|^2}{|v|^2(\log \frac{1}{|u|} + \log \frac{1}{|v|})^2}\right)$

となる。 $\gamma_1^2 = (\gamma_1(E, h) + d\zeta_1)^2 = \gamma_1(E, h)^2 + 2d(\gamma_1(E, h) \wedge \zeta_1)$
 $+ d(\zeta_1 \wedge d\zeta_1)$ となるが, ここで $\int_M d(\gamma_1(E, h) \wedge \zeta_1) = 0$,

$\int_M d(\zeta_1 \wedge d\zeta_1) = 0$ を示す。 U_ε で D の ε -tube を表わそう。

$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{U_\varepsilon} \zeta_1 \wedge d\zeta_1 = 0$ を言えばよい。これは *local* にやればよいから、今 $\Delta^2 \cap D = \{(u, v) \in \Delta^2; uv=0\}$ の中にある ε -tube の周辺での積分が $\varepsilon \rightarrow 0$ の時 0 に収束することを示す。後者の積分の場合は、

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|u| \leq \varepsilon} \int_{|v| = \varepsilon} \frac{|du|^2}{|u|^2 (\log \frac{1}{|u|})^2} \cdot \frac{|dv| \overset{\nearrow \varepsilon d\theta}{}}{|v| (\log \frac{1}{|v|})} = 0 \quad \dots (*)$$

に帰着する。理由は、接続型式の評価。前者も同様にわかる。

$\gamma_2 = \gamma_2(E, h) + d\zeta_2$ であるが、今度は曲率型式の評価も使ってやることにより、 $\int_M d\zeta_2 = 0$ は、やはり (*) に帰着する。従って、 $\int_M \gamma_1^2 = \int_{\bar{M}} \gamma_1(E, h)^2 = C_1(\bar{M}, D)^2$,

$$\int_M \gamma_2 = \int_{\bar{M}} \gamma_2(E, h)^2 = C_2(\bar{M}, D). \quad \text{証明終。}$$

定理 2 の証明.

$(M, \tilde{\omega})$ は Einstein-Kähler だから、よく知られている様に、 $3\tilde{\gamma}_2 - \tilde{\gamma}_1^2 \geq 0$ が M の各点で成立つ。これらは補題 6、或は $\tilde{\omega}$ が "quasi-bounded geometry" かつ体積有限であることにより、 M 上可積分である。故に *global* な不等式

$$3 \int_M \tilde{\gamma}_2 - \int_M \tilde{\gamma}_1^2 \geq 0 \text{ を得る。補題 6 から、}$$

$$3\bar{C}_2 \geq \bar{C}_1^2 \text{ となる。}$$

一方, 一般に $\tilde{\gamma}_1^2 = \frac{1}{8\pi^2}(\tau^2 - \|S\|^2)\tilde{\omega}^2$, $\tilde{\gamma}_2 = \frac{1}{16\pi^2}(\tau^2 - 2\|S\|^2 + \|R\|^2)$ である。ここで, R, S, τ はそれぞれ $\tilde{\omega}$ の曲率 tensor, Ricci tensor, scalar 曲率である。Einstein-Kähler なら $\|S\|^2 = \frac{\tau^2}{2}$ だから, $3\tilde{\gamma}_2 - \tilde{\gamma}_1^2 = \frac{1}{16\pi^2}(3\|R\|^2 - \tau^2)$ となる。一方, Einstein-Kähler ならば $3\|R\|^2 - \tau^2 \geq 0$ であり, 等号成立は正則断面曲率が一定の場合に限る。従って, 定理 1 の $(\bar{M}, D)$ で,

$$3\bar{C}_2 = \bar{C}_1^2 \iff \text{各点で } 3\tilde{\gamma}_2 = \tilde{\gamma}_1^2$$

$$\iff \tilde{\omega} \text{ の正則断面曲率は定数}$$

$$\begin{array}{c} \iff M \text{ は } \mathbb{C}^2 \text{ の単位球 } B^2 \text{ で正則に cover される。} \\ \uparrow \\ \tilde{\omega} \text{ は complete} \end{array}$$

証終。

- 参考文献 [1] Ash, A., Mumford, D., Rapoport, M., Tai, T.: "Smooth Compactification of Locally Symmetric Varieties", Math. Sci. Press, 1975
- [2] Aubin, T., Equations du type Monge-Ampère sur les variétés Kähleriennes compactes, C.R. Acad. Sci. Paris, 283 (1976) 119-121
- [3] Aubin, T., Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère equations, Springer, Grundlehren der Math. 252.
- [4] Cheng, S.-Y., Yau, S.-T., On the existence of a complete Kähler metric on noncompact complex manifolds and the regularity of Jefferyman's equation, Comm. Pure. Appl. Math. 33 (1980), 507-544.

- [5] Eberlein, P., Lattices in spaces of nonpositive curvature, *Ann. of Math.* 111 (1980), 435-476.
- [6] Grauert, H., Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, *Math. Ann.* 146 (1962) 331-368
- [7] Griffiths, P.A., Harris, J., "Principles of Algebraic Geometry", Wiley-Interscience, 1978
- [8] Herzbruch, F., van der Geer, G., "Lectures on Hilbert Modular Surfaces", Les Presses de Montréal, 1981
- [9] Kobayashi, R., Kähler-Einstein metric on open algebraic manifolds, to appear in *Osaka J. Math.*
- [10] Kodaira, K., Pluricanonical systems on algebraic surfaces of general type, *J. Math. Soc. Japan*, 20 (1968) 170-192.
- [11] Laufer, H., Taut two-dimensional singularities, *Math. Ann.* 205 (1973) 131-164.
- [12] Yau, S.-T., On Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry, *Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 74 (1977) 1798-1799
- [13] Yau, S.-T., A general Schwarz lemma for Kähler manifolds, *Amer. J. Math.* 100 (1978) 197-203
- [14] Yau, S.-T., Harmonic functions on complete Riemannian manifolds, *Comm. Pure. Appl. Math.* 28 (1975) 201-228
- [15] Persson, U., On degenerations of algebraic surfaces *MAMS.* 189 (1977)

補遺 定理1の完備 Einstein-Kähler 多様体の例をあげるのを忘れていた。ここで例をのべる。

例1. $P^2 \supset D$ を、一般の位置にある n 本の直線とする。各直線上で交点が2個だけ残るように他の交点を blow up する。blow up される点の個数は $n(n-3)/2$ 。得られる多様体を $\tilde{M}$, D の proper transform を $\tilde{D}$ とすると, $\tilde{D}$ は有理曲線の cycle である。

$$\pi^* D_i = \tilde{D}_i + \sum_{j=1}^{n-3} e_{ij}, \quad e_{ij} \text{ は } \neq 1 \text{ 種例外曲線。}$$

$$\pi^* D = \tilde{D} + 2 \sum_{i=1}^{n(n-3)/2} e_i, \quad e_i \text{ は } \dots$$

$$\pi^* k = \tilde{k} - \sum_{i=1}^{n(n-3)/2} e_i \quad \text{から、まず}$$

$$\begin{aligned} (\tilde{k} + \tilde{D}) \cdot D_i &= (\pi^*(k+D) - \sum e_i) \cdot (\pi^* D - \sum e_{ij}) \\ &= (k+D) D_i - (n-3) = (-3+n) - (n-3) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tilde{k} + \tilde{D})^2 &= (\tilde{k} + \tilde{D}) \tilde{k} = (\pi^*(k+D) - \sum e_i) \cdot (\pi^* k + \sum e_i) \\ &= -3(-3+n) + n(n-3)/2 = (n-3)(n-6)/2. \end{aligned}$$

$n \geq 7$ とすると $(\tilde{k} + \tilde{D})^2 > 0$ となる。 $\tilde{D}$ に含まれない任意の curve $\tilde{Z}$ と $\tilde{k} + \tilde{D}$ の交点数をみる。 $Z = \pi_*(\tilde{Z})$ は、blow up する点で ν_i 次の multiplicity ($1 \leq i \leq n(n-3)/2$) をもつとする。 Z を degree d とする。

$$(\tilde{k} + \tilde{D}) \cdot \tilde{Z} = (\pi^*(k+D) - \sum e_i) (\pi^* Z - \sum \nu_i e_i)$$

$$= -3d + nd - \sum \nu_i \quad \text{ここで } nd \geq 2 \sum \nu_i \text{ だから,}$$

$$\geq -3d + nd - \frac{nd}{2} = d \left(\frac{n}{2} - 3 \right) \quad n \geq 7 \text{ なら } (\tilde{k} + \tilde{D}) \cdot \tilde{Z} > 0.$$

したがって, $(\tilde{M}, \tilde{D})$ は定理1の1つの例である。なお, この時は

$$\bar{c}_1^2 = \frac{n^2 - 9n + 18}{2}, \quad \bar{c}_2 = n^2 - 4n + 3 \quad \text{である。} \quad (n \geq 7).$$

例2. $\mathbb{P}^2$ の一般の位置にある3本の非特異3次曲線を考える。

交点27点すべて *blow up* して得られる多様体を $\tilde{M}$, 3本の3次曲線 D の proper transform を $\tilde{D}$ とする。まず adjunction formula より

$$(\tilde{k} + \tilde{D}) \cdot \tilde{D}_i = 0 \quad (i=1, 2, 3)。$$

$$\pi^* D_i = \tilde{D}_i + \sum_{j \neq i} e_{ij} \quad (i=1, 2, 3, j=1, 2, 3)$$

各 e_{ij} は9本の第1種例外曲線から成る, とする。

$$\pi^* k = \tilde{k} - \sum_{i < j} e_{ij}$$

$$(\tilde{k} + \tilde{D})^2 = (\tilde{k} + \tilde{D}) \cdot \tilde{k} = (\pi^*(k + D_1 + D_2 + D_3) - e_{12} - e_{13} - e_{23}) \cdot$$

$$(\pi^* k + e_{12} + e_{13} + e_{23}) = -3(-3+3+3+3) + 9+9+9 = 9$$

Z を $\tilde{D}$ に含まれない $\tilde{M}$ の曲線とし $\pi_* Z$ を d 次曲線として, *blow up* する点で v_i 次の multiplicity をもつとする。

$$\begin{aligned} (\tilde{k} + \tilde{D}) \cdot \tilde{Z} &= (\pi^*(k + D) - e_{12} - e_{13} - e_{23}) \cdot (\pi^* Z - \sum v_i e_i) \\ &= -3d + 3 \times 3d - \sum v_i \quad \text{ここで } 9d \geq 2 \sum v_i \\ &\geq \frac{3}{2} d > 0 \end{aligned}$$

従って $(\tilde{M}, \tilde{D})$ は定理1の1つの例である。今は $\bar{c}_1^2 = 9$, $\bar{c}_2 = 57$ 。

例3. [5] p.134によれば, elliptic ruled surface X , その上の elliptic curve C で, C は base curve 上の5重被覆になっており,

$(k + C)^2 = 1$ となるものが存在する。 k は canonical divisor である。

N を X の minimal model X_0 からの *blow up* の回数とすると,

$(k+C)^2 = -N - C^2$ である。 ($\because$ C が n -section, 各 exceptional divisor と ν_i 回交わっていると仮定すると, $C = \pi^* C_0 - \sum_{i=1}^N \nu_i e_i$, $C_0 = \pi(C)$ は X の minimal model 中の curve で各 blown up point ν_i 回通るものである。 $k = \pi^* k_0 + \sum_{i=1}^N e_i$ である。 $H_2(X_0; \mathbb{Z})$ の生成元として fibre の homology 類 x , $y \cdot y = -e$ をみたす section の homology 類 y がとれる。 ($e = -1, 0, 1, 2, \dots$)。 adjunction より $k_0 = -2y - ex$, $C_0 = ny + \alpha x$ ($\exists \alpha$)。 Plücker relation から, $(k_0 + C_0) \cdot C_0 = \sum \nu_i (\nu_i - 1)$ 故に $\alpha = \frac{\sum \nu_i (\nu_i - 1)}{2(n-1)} + \frac{ne}{2}$, $(k+C)^2 = (\tilde{k}+C)k$ (by adjunction) $= (\pi^*(k_0 + C_0) - \sum (\nu_i - 1)e_i) \cdot (\pi^* k_0 + \sum e_i) = (k_0 + C_0)k_0 + \sum (\nu_i - 1) = -N - \sum_{i=1}^N \frac{\nu_i}{n-1} (\nu_i - n)$, $C^2 = (\pi^* C_0 - \sum \nu_i e_i)^2 = \sum_{i=1}^N \frac{\nu_i}{n-1} (\nu_i - n)$ 従って $(k+C)^2 = -N - C^2$) [15] の Prop. 1.2 及び 1.3 によれば, 各 $\nu_i \leq \frac{n}{2}$ と仮定してよい。 今 Z を fibre type の X の curve とすると,

$$\begin{aligned}
 (k+C) \cdot Z &= (\pi^*(k_0 + C_0) - \sum (\nu_i - 1)e_i) \cdot (\pi^* Z_0 - \varepsilon e_j) \quad (\varepsilon = 0 \text{ or } 1) \\
 &= (k_0 + C_0)Z_0 - \varepsilon(\nu_j - 1) \geq n - 1 - \nu_j \geq \frac{n}{2} - 1 > 0
 \end{aligned}$$

が, $n \geq 3$ とくに $n = 5$ なら成立つ。 次に Z を section type の C と相異なる X の curve として $\pi(Z) = Z_0$ が blown up pt. で r_i 次の重複度をもつとする。 $C_0 \cdot Z_0 \geq \sum_{i=1}^N \nu_i \cdot r_i$ より, $C_0 = ny + \alpha x$, $Z_0 = \delta y + p x$ と書けば, $p \geq \frac{e\delta}{2} + \frac{1}{n} \left(\sum \nu_i r_i - \delta \frac{\sum \nu_i (\nu_i - 1)}{2(n-1)} \right)$ を得る。

$$\begin{aligned}
 (k+C) \cdot Z &= (\pi^*(k_0 + C_0) - \sum (\nu_i - 1)e_i) (\pi^* Z_0 - \sum r_i e_i) \\
 &= (k_0 + C_0) \cdot Z_0 - \sum (\nu_i - 1)r_i = -\delta e(n-2) + \delta \left(\frac{\sum \nu_i (\nu_i - 1)}{2(n-1)} + \frac{ne}{2} - e \right) \\
 &\quad + p(n-2) \quad \text{ここで上の不等式を使えば,}
 \end{aligned}$$

$$\geq \frac{8 \sum \nu_i (\nu_i - 1)}{n(n-1)} + \frac{n-2}{n} \sum \nu_i r_i - \sum (\nu_i - 1) r_i$$

$$= \text{すなわち, } \frac{\nu_i (\nu_i - 1)}{n(n-1)} + \frac{n-2}{n} \nu_i - (\nu_i - 1) = 1 - \frac{(2n - \nu_i - 1) \nu_i}{n(n-1)} \dots (*)$$

今 $\nu_i \leq \frac{n}{2}$ を仮定しているから、(*) は $n \geq 4$ ならば正である。 $8 \geq r_i$

なので、結局 $(k+c) \cdot Z > 0$ となる。以上から、 (X, C) は定理1の仮定を満たすから、 $X-C$ は完備 Einstein-Kähler, 負の Ricci 曲率をもつ。

この例では、 $\overline{C}_1^2 = -N - c^2$, $\overline{C}_2 = N$ である。

[15] の例は定理1の例であるが、他の例についても N と $\sum_{i=1}^N \frac{\nu_i}{n-1} (\nu_i - n)$

の関係を調べることにより $(k+c)^2 > 0$ かどうかかわかる。 $\nu_i \leq \frac{n}{2}$

と仮定すると、 $\nu_i (n - \nu_i) - (n-1) = -(\nu_i - \frac{n}{2})^2 + \frac{n^2}{4} - (n-1)$

$$\geq -(1 - \frac{n}{2})^2 + \frac{n^2}{4} - n + 1 = 0 \quad "=" \iff \forall \nu_i = 1. \quad \text{全部 blow}$$

down しても C_0 は X_0 上の elliptic curve である。従って、定理1の例

になる為には、 $N > 0$, $\exists \nu_i \geq 2$, $n \geq 4$ ($\nu_i \leq \frac{n}{2}$ を仮定) であ

る事が必要十分である。