

隠された境界条件

京大・数理研

柏原正樹, 河合隆裕

近時 "単一特性" の仮定の下では過剰決定系迄こめて, 擬微分方程式の構造は(少くとも *micro-local* には)完全に明らかにされたと言ってもよい。そしてその構造を解明する際 "波田の定理" は指導原理として極めて有用であった。しかしながら "単一特性" という条件を落とすと, 事態は一転して極めて複雑な, 同時に解析的に興味ある現象が起きる。実際, "波田の定理" は各 *phase* に沿っての特異性は相互に無縁である, 即ち, 一つの *phase* につきみ特異性を持つ解も任意に作れることをその系として主張するけれど, これは極めて例外的に幸運な事態であった。これが, たとえば Leray が Tricomi の作用素にあれ程執着し, 又, 波田氏の仕事にショックを受けた理由であろう。実際, 彼は, 波田氏の扱った場合, モノトローが自明である点に最も興味を持たように我々には思える。

今, 我々の直面する事態を図式的に記すなら次のように言えよう:

(単一特性の作用素): (Monvel-Treves, *Gröstrand* の意味で) 二重特性の作用素) = 中函数: 超幾何函数

即ち、単一特性の仮定を落せば、解の特性は各 phase (かきれいに求まる場合でも) 毎に相互に関係し、従って特異点のまわりでの解の接続により、解が必然的に (たとえば 擬微分方程式) による関係式を満たす、という現象が起きる。この観点から単一特性でない作用素の解の構造を調べることは、興味ある approach の仕方であろう。少なくとも、幾何学的には描像がはっきりとえらぬけれど、単一特性の枠には納まらぬ問題、たとえば 回折波の現象や二重特性の作用素に対する可解性、正則性等の問題はこの観点から扱われるべきであると考え。以下その一、二の例を掲げよう。この方向の研究は現在まだ進行中の物故、全貌は次回に明らかとされよう。

1° Tricomi の作用素 $D_1^2 - \alpha_1 D_2^2$ について。

この方程式の解の characteristic variety $\{\eta_1^2 - \alpha_1 \eta_2^2 = 0\}$ の内、 $\eta_2 = -\sqrt{\alpha_1} \eta_1$ へのみ台を持つ場合は、 $\frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = v_1(x_2)$

と $u|_{x_1=0} = v_0(x_2)$ の間には、 $v_1 = \text{const} \cdot |D_2|^{\frac{2}{3}} v_0$ なる関係が必要である。これに対し、 $\left\{ \frac{\alpha_1^3}{9} \geq \frac{\alpha_2^2}{4} \right\}$ に台を持つ (基) 解が存在することの違ひに注目したい。

$$(\otimes = 2^{-\frac{2}{3}} 3^{-\frac{2}{3}} \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha_2^2}{4}} \Gamma(-\frac{1}{6}))$$

2° 二重特性の作用素、即ち、その主要部が $p_1(x, \eta) p_2(x, \eta)$

但し $\{p_1, p_2\} \neq 0, \bigvee^{\mathbb{R}} \{p_1 = p_1^c = 0\} = \{p_2 = p_2^c = 0\}$, なる作用

素に於し $\tau = \{p_1, p_2\} \setminus \{p_1^c, p_2^c\} / \{p_1^c, p_2^c\} \setminus \{p_1, p_2\}$ なる
 量を VIR 上で考える。ここで $\tau \geq 0$ なら、低階の項が generic
 であれば、 P に対し、可解性、正則性が成立することはほぼ証明
 されている。(接触幾何の部分が残っている) この現象の一つの
 原因としてやはり上と同様の現象がある。たとえば、簡単な
 例として $(D_1^2 + \lambda^2 D_2^2 + i\lambda D_2)u(x_1, x_2) = 0$ の $\{x_1 > 0\}$ で
 定義された解の $x_1 = 0$ への境界値を考えれば、 λ が一般で
 あれば (次の係数^{(c(\lambda))}が有限な値をとれば) $v_0(x_2) = u|_{x_1=0}$
 と $v_1(x_2) = \frac{\partial u}{\partial x_1}|_{x_1=0}$ の間には、次の関係式が存在する。

$$D_2 v_0 = c(\lambda) v_1, \quad \text{但し}$$

$$c(\lambda) = e^{\frac{\lambda}{4}\pi i} \left(\frac{1+\lambda}{2B(\frac{5+\lambda}{4}, \frac{1-\lambda}{4})} - \frac{1-\lambda}{2B(\frac{5-\lambda}{4}, \frac{1+\lambda}{4})} \right)$$

この関係式により、逆に、 $\{x_1 = 0\}$ 上での楕円型擬微分方程式の
 可解性を用いて、解の存在を得らぬ事等は見易いであろ
 う。