

A generalization of the Mehta-Wang determinant and the Askey-Wilson polynomials*

琉球大学・教育学部 石川 雅雄 (Masao Ishikawa)[†]

Faculty of Education, University of the Ryukyus

和歌山大学・教育学部 田川 裕之 (Hiroyuki Tagawa)[‡]

Faculty of Education, Wakayama University

1 序

2000 年に, Mehta-Wang [6] は物理的な動機付けから, 成分に Gamma function を含む行列式を計算し, 2002 年に M. Nishizawa [7] は, その一つの q -analogue となる結果を得た. 本稿では, Mehta-Wang と Nishizawa の結果の拡張となる行列式を Askey-Wilson polynomial を用いて表示することを目的とする.

以下, $\mathbb{C}$ を複素数全体の集合, $\mathbb{Z}$ を整数全体の集合, $\mathbb{N}$ を自然数 (正の整数) 全体の集合とする. まず, Mehta-Wang と Nishizawa の結果の厳密な紹介から行おう. $n, k \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{C}$ に対して

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{if } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (a)_n = \begin{cases} \prod_{k=0}^{n-1} (a+k) & \text{if } n > 0, \\ 1 & \text{if } n = 0, \\ \frac{1}{\prod_{k=0}^{|n|-1} (a-|n|+k)} & \text{if } n < 0 \end{cases}$$

とおく. 次が Mehta-Wang の結果である ([6]).

Theorem 1.1 (Mehta-Wang '00). $a, b \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}(b) > 0$), $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\det((a+j-i)\Gamma(b+i+j))_{0 \leq i, j \leq n-1} = D_n \prod_{k=0}^{n-1} k! \Gamma(b+k) \quad (1.1)$$

である¹. ただし, Γ は, Gamma function, i.e. $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ であり

$$D_n = \det(a\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1} + j(b+j)\delta_{i,j-1})_{0 \leq i, j \leq n-1}$$

とする². D_n は

$$D_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{b-a}{2}\right)_k \left(\frac{a+b}{2}\right)_{n-k} \quad (1.2)$$

*Joint work with Jiang Zeng (Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1).

[†]Partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No.21540015, Japan Society for the Promotion of Science.

[‡]Partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No.23540017, Japan Society for the Promotion of Science.

¹ $\operatorname{Re}(b)$ は b の実部とする.

² $\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタ, i.e. $\delta_{i,j} = 1$ if $i = j$, $\delta_{i,j} = 0$ if $i \neq j$ とする.

とも記述でき³, 次の漸化式を満たす.

$$D_0 = 1, D_1 = a, D_{n+1} = aD_n + n(b+n-1)D_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (1.3)$$

特に, $a = 0$ のときには次が成立する.

$$\det((j-i)\Gamma(b+i+j))_{0 \leq i, j \leq 2n-1} = \left(\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)! \Gamma(b+2k+1) \right)^2. \quad (1.4)$$

一般に, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ により, $n \in \mathbb{Z}$ ($n \geq 0$) に対して, $\Gamma(z+n) = (z)_n \Gamma(z)$ であるので, (1.1) を Gamma function を用いない形で記述すると

$$\det((a+j-i)(b)_{i+j})_{0 \leq i, j \leq n-1} = D_n \prod_{k=0}^{n-1} k! (b)_k \quad (1.5)$$

となる. 尚, (1.4) の符号を決定した形として, Ciucu-Krattenthaler は, 2次元の Dimer system に関連した動機付けから次を証明した (cf. [1]).

Theorem 1.2 (Ciucu-Krattenthaler '11). $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\text{pf}((j-i)\Gamma(b+i+j))_{0 \leq i, j \leq 2n-1} = \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)! \Gamma(b+2k+1). \quad (1.6)$$

さらに, $a, q \in \mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ ($m \geq 0$) に対して

$$(a; q)_n = \begin{cases} \prod_{k=0}^{n-1} (1 - aq^k) & \text{if } n > 0, \\ 1 & \text{if } n = 0, \\ \frac{1}{\prod_{k=0}^{|n|-1} (1 - aq^{-|n|+k})} & \text{if } n < 0, \end{cases} \quad [a] = \frac{1 - q^a}{1 - q}, \quad [m]! = \begin{cases} 1 & \text{if } m = 0, \\ [m][m-1]! & \text{if } m > 0 \end{cases}$$

とおくと次が成り立つ (cf. [7]).

Theorem 1.3 (Nishizawa '02). $n \in \mathbb{N}$, $a, b, q \in \mathbb{C}$ ($0 < |q| < 1$) に対して

$$\det([a+j-i]\Gamma_q(b+i+j))_{0 \leq i, j \leq n-1} = q^{na + \frac{n(n-1)b}{2} + \frac{n(n-1)(2n-7)}{6}} D_{n,q} \prod_{k=0}^{n-1} [k]! \Gamma_q(b+k) \quad (1.7)$$

である. ただし, $\Gamma_q(z) = (1-q)^{1-z} \frac{(q; q)_\infty}{(q^z; q)_\infty}$ (q -Gamma function), $(a; q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k)$ であり

$$D_{n,q} = \det(d_{i,j})_{0 \leq i, j \leq n-1}, \quad d_{i,j} = \begin{cases} (1-q)^{i-j-1} (q^{-b-j+1} - q^{-b+1} - 1) & \text{if } i > j, \\ q^{-a+j} [a-j] + q^{-b-j+1} [j] & \text{if } i = j, \\ q^{-b-j+1} [b+j-1] [j] & \text{if } i = j-1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする⁴. $D_{n,q}$ は次の漸化式を満たす.

$$D_{0,q} = 1, D_{1,q} = q^{-a} [a], D_{n+1,q} = q^{-a+n} [a] D_{n,q} + q^{-a-b} [b+n-1] [n] D_{n-1,q} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (1.8)$$

³Mehta-Wang [6] では $\binom{n}{k}$ が抜け落ちてしまっている.

⁴Nishizawa [7] においても誤植があるので, 注意が必要である.

一般に, $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $(a; q)_n = \frac{(a; q)_\infty}{(aq^n; q)_\infty}$ となるので, $\Gamma_q(z+n) = \frac{(q^z; q)_n}{(1-q)^n} \Gamma_q(z)$ である. 従って, (1.7) を $\Gamma_q(z)$ を用いない形で表すと

$$\det((1-q^{a+j-i})(q^b; q)_{i+j})_{0 \leq i, j \leq n-1} = q^{na + \frac{n(n-1)b}{2} + \frac{n(n-1)(2n-7)}{6}} (1-q)^n D_{n,q} \prod_{k=0}^{n-1} (q; q)_k (q^b; q)_k \quad (1.9)$$

となる. 特に, (1.3), (1.8) により

$$\lim_{q \rightarrow 1} D_{n,q} = D_n \quad (1.10)$$

であり, (1.9) の両辺に $\frac{1}{(1-q)^{n^2}}$ を掛けてから, $q \rightarrow 1$ とすると (1.5) が得られる.

次に, Mehta-Wang, Nishizawa の行列式の一つの拡張となる結果を述べるために, Askey-Wilson polynomial を定義しよう. $m, n \in \mathbb{Z}$ ($n \geq 0$), $r \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots, a_{r+1}, b_1, b_2, \dots, b_r, q \in \mathbb{C}$, $x, a, b, c, d \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} (b_1, b_2, \dots, b_r; q)_m &= (b_1; q)_m (b_2; q)_m \dots (b_r; q)_m, \\ {}_{r+1}\phi_r \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_{r+1}; \\ b_1, b_2, \dots, b_r \end{matrix}; q, z \right] &= \sum_{k \geq 0} \frac{(a_1, a_2, \dots, a_{r+1}; q)_k z^k}{(q; q)_k (b_1, b_2, \dots, b_r; q)_k}, \\ P_n(x; a, b, c, d; q) &= \frac{(ab, ac, ad; q)_n}{a^n} {}_4\phi_3 \left[\begin{matrix} q^{-n}, abcdq^{n-1}, ax, ax^{-1} \\ ab, ac, ad \end{matrix}; q, q \right] \end{aligned}$$

とおく. $P_n(x; a, b, c, d; q)$ は Askey-Wilson polynomial と呼ばれている. このとき次が成立する.

Theorem 1.4. $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned} &\det \left((1 - cq^{j-i}) \frac{(aq; q)_{i+j+r-2}}{(abq^2; q)_{i+j+r-2}} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= (-1)^n a^{\frac{n(n-3)}{2}} q^{\frac{n(n^2-3n-1)}{3} + \frac{n(n-3)r}{2}} (abcq^{r+1}; q^2)_n \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(q; q)_k (aq; q)_{k+r+1} (bq; q)_{k-1}}{(abq^2; q)_{k+n+r-1}} \\ &\quad \times {}_4\phi_3 \left[\begin{matrix} q^{-n}, a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} q^{\frac{r+1}{2}}, -a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} q^{\frac{r+1}{2}}, abq^{n+r} \\ aq^{r+1}, a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} q^{\frac{r+1}{2}}, -a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} q^{\frac{r+1}{2}} \end{matrix}; q, q \right] \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} &= (-\sqrt{-1})^n a^{\frac{n(n-2)}{2}} c^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n(2n^2-6n+1)}{6} + \frac{n(n-2)r}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(q; q)_k (aq; q)_{k+r} (bq; q)_{k-1}}{(abq^2; q)_{k+n+r-1}} \\ &\quad \times P_n(\sqrt{-1}; a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} q^{\frac{r+1}{2}} \sqrt{-1}, -a^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{2}} q^{\frac{r+1}{2}} \sqrt{-1}, b^{\frac{1}{2}} \sqrt{-1}, -b^{\frac{1}{2}} \sqrt{-1}; q). \end{aligned} \quad (1.12)$$

尚, $\frac{(aq; q)_m}{(abq^2; q)_m}$ は, little q -Jacobi orthogonal polynomial の m -th moment となることが知られている (cf. [2], [5]).

Theorem 1.4 を示すためには, 次の等式の証明が鍵となる.

Lemma 1.5. $n \in \mathbb{N}$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して

$$\begin{aligned} &\det \left((1 - cq^{j-t_i}) \frac{(aq; q)_{t_i+j-2}}{(abq^2; q)_{t_i+j-2}} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= (-1)^n a^{\frac{n(n-3)}{2}} q^{\frac{n(n-1)(n-5)}{6} - \sum_{k=1}^n t_k} \prod_{k=1}^n \frac{(aq; q)_{t_k-1} (bq; q)_{k-2}}{(abq^2; q)_{t_k+n-2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (q^{t_i} - q^{t_j}) \\ &\quad \times \sum_{k=0}^n (-1)^k (abcq^{2k+1}; q^2)_{n-k} (acq; q^2)_k R_{n,k}(t; a, b; q). \end{aligned} \quad (1.13)$$

ただし

$$R_{n,k}(t; a, b; q) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n \\ \{i_1, i_2, \dots, i_{n-k}\} \cup \{j_1, j_2, \dots, j_k\} = \{1, 2, \dots, n\}}} q^{\sum_{u=1}^{n-k} i_u - n + k} \prod_{u=1}^{n-k} (1 - aq^{t_{i_u} + k - i_u + u}) \prod_{u=1}^k (1 - abq^{t_{j_u} + j_u + k - 1 - u})$$

とする.

特に, (1.9), (1.10), (1.11), (1.12) により

$$\begin{aligned} D_{n,q} &= \frac{(-1)^n q^{-n(a+b)} (q^b; q)_n}{(1-q)^n} {}_3\phi_2 \left[\begin{matrix} q^{-n}, q^{\frac{a+b}{2}}, -q^{\frac{a+b}{2}} \\ q^b, 0 \end{matrix}; q, q \right] \\ &= \frac{(-\sqrt{-1})^n q^{-\frac{n(a+b)}{2}}}{(1-q)^n} P_n(\sqrt{-1}; q^{\frac{a+b}{2}} \sqrt{-1}, -q^{-\frac{a-b}{2}} \sqrt{-1}, 0, 0; q), \\ D_n &= (-1)^n (b)_n \cdot {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -n, \frac{a+b}{2} \\ b \end{matrix}; 2 \right] \end{aligned} \quad (1.14)$$

である⁵. ただし, $r \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots, a_{r+1}, b_1, b_2, \dots, b_r \in \mathbb{C}$ に対して

$${}_{r+1}F_r \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_{r+1} \\ b_1, b_2, \dots, b_r \end{matrix}; z \right] = \sum_{k \geq 0} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \dots (a_{r+1})_k z^k}{k! (b_1)_k (b_2)_k \dots (b_r)_k}$$

とする.

以下, 2 節で, Theorem 1.4 の証明を行い, 3 節で Askey-Wilson polynomial の関係式として得られた結果を解説し, 4 節では, 3 節で得られた結果を利用して, Theorem 1.4 の結果を n が偶数のときと奇数のときに分けて記述し, [3] で得られた結果, [4] での結果の系となる等式が導かれること, 及び Theorem 1.4, Lemma 1.5 の系として得られる様々な等式について述べる.

2 Theorem 1.4 の証明

$n \in \mathbb{N}$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して

$$T_t(a, b, c; q) = ((1 - cq^{j-t_i})(aq^{t_i-1}; q)_{j-1} (abq^{t_i+j-2}; q)_{n-j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

とおくと

$$\det \left((1 - cq^{j-t_i}) \frac{(aq; q)_{t_i+j-2}}{(abq^2; q)_{t_i+j-2}} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \det(T_t(aq, bq, c; q)) \times \prod_{k=1}^n \frac{(aq; q)_{t_k-1}}{(abq^2; q)_{t_k+n-2}} \quad (2.1)$$

である. 従って, $0 \leq k \leq n$ に対して

$$R_t^{(k)}(a, b; q) = R_{n,k}(t; aq^{-1}, bq^{-1}; q) \quad (2.2)$$

⁵(1.2) を ${}_2F_1$ を用いて書き直すと, (1.14) とは異なった D_n の表記が得られ, (1.14) と併せると, 結果的に [2] の Appendix III の (III-12) の系として得られる等式が導かれる.

とおくと, Lemma 1.5 を示すためには

$$\begin{aligned} \det(T_t(a, b, c; q)) &= (-1)^n a^{\frac{n(n-3)}{2}} q^{\frac{n(n-2)(n-7)}{6} - \sum_{k=1}^n t_k} \prod_{k=-1}^{n-2} (b; q)_k \prod_{1 \leq i < j \leq n} (q^{t_i} - q^{t_j}) \\ &\quad \times \sum_{k=0}^n (-1)^k (abcq^{2k-1}; q^2)_{n-k} (ac; q^2)_k R_t^{(k)}(a, b; q) \end{aligned} \quad (2.3)$$

を示せばよい. 本節では, (2.3) の証明を目指し, 最終的に Lemma 1.5 と Theorem 1.4 の証明を目的とする. (2.3) を証明するための鍵となるのが次である.

Proposition 2.1. $n \in \mathbb{N}$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して, $t' = (t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$ とおくと

$$\begin{aligned} \det(T_t(a, b, c; q)) &= a^{n-2} q^{-n-t_n+2} (b; q)_{n-2} \prod_{k=1}^{n-1} (q^{t_k} - q^{t_n}) \\ &\quad \times \left((1-ac)(1-abq^{t_n+n-3}) \det(T_{t'}(aq, b, cq; q)) \right. \\ &\quad \left. - q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (1-abcq^{2n-3})(1-aq^{t_n-1}) \det(T_{t'}(a, b, c; q)) \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

ただし, $t = (t_1)$ のときには, $\det(T_{t'}(a, b, c; q)) = 1$ とする.

Proposition 2.1 の証明としては, $T_t(a, b, c; q)$ を n 行が $(n, 1)$ 成分と (n, n) 成分以外が 0 となるように二種類の基本変形を行い, 行列式の展開を用いて整理するといった方針である.

まず, $T_t(a, b, c; q)$ の行列としての基本変形を行うために, 4 種類の行列 $X_t(a; q)$, $\tilde{X}_t(a, b; q)$, $Y_n(q)$, $\tilde{Y}_n(q)$ を

$$\begin{aligned} X_t(a; q) &= \left(-\frac{\delta(i \geq j) q^{t_j}}{(1-aq^{t_j-1}) \prod_{\substack{1 \leq k \leq i \\ k \neq j}} (1-q^{t_j-t_k})} \right)_{1 \leq i, j \leq n}, \\ \tilde{X}_t(a, b; q) &= \left(-\frac{\delta(i \geq j) q^{t_j}}{(1-abq^{t_j+n-3}) \prod_{\substack{1 \leq k \leq i \\ k \neq j}} (1-q^{t_j-t_k})} \right)_{1 \leq i, j \leq n}, \\ Y_n(q) &= \left((-1)^{i+j} q^{-\frac{(i-j)(2n+1-i-j)}{2}} \begin{bmatrix} n-j \\ i-j \end{bmatrix}_q \right)_{1 \leq i, j \leq n}, \\ \tilde{Y}_n(q) &= \left((-1)^{i+j} q^{\frac{(j-i)(j-i+1)}{2}} \begin{bmatrix} j-1 \\ j-i \end{bmatrix}_q \right)_{1 \leq i, j \leq n} \end{aligned}$$

と定義する. ただし,

$$\delta(P) = \begin{cases} 1 & \text{if } P \text{ is true,} \\ 0 & \text{if } P \text{ is false,} \end{cases} \quad \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q = \begin{cases} \frac{(q; q)_m}{(q; q)_n (q; q)_{m-n}} & \text{if } 0 \leq n \leq m, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする. さらに

$$W_t(a, b, c; q) = X_t(a; q) T_t(a, b, c; q) Y_n(q), \quad (2.5)$$

$$\tilde{W}_t(a, b, c; q) = \tilde{X}_t(a, b; q) T_t(a, b, c; q) \tilde{Y}_n(q) \quad (2.6)$$

とおく. $n \in \mathbb{N}$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して

$$\det(W_t(a, b, c; q)) = \frac{(-1)^n q^{\sum_{k=1}^n t_k} \det(T_t(a, b, c; q))}{\prod_{k=1}^n (1 - aq^{t_k-1}) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - q^{t_j-t_i})}, \quad (2.7)$$

$$\det(\tilde{W}_t(a, b, c; q)) = \frac{(-1)^n q^{\sum_{k=1}^n t_k} \det(T_t(a, b, c; q))}{\prod_{k=1}^n (1 - abq^{t_k+n-3}) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - q^{t_j-t_i})} \quad (2.8)$$

となることは, $X_t(a; q)$, $\tilde{X}_t(a, b; q)$, $Y_n(q)$ が下半三角行列で, $\tilde{Y}_n(q)$ が上半三角行列であることにより容易に分かる. 特に, $W_t(a, b, c; q)$, $\tilde{W}_t(a, b, c; q)$ の第 n 行については, 次が成立する.

Lemma 2.2. $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{N}^n$ とする.

(i) $1 \leq j \leq n$ に対して

$$[W_t(a, b, c; q)]_{n,j} = \begin{cases} \frac{(-1)^n a^{n-1} q^{-n+1+\sum_{k=1}^n t_k} (b; q)_{n-1} (1-ac)}{\prod_{k=1}^n (1 - aq^{t_k-1})} & \text{if } j = 1, \\ 0 & \text{if } 1 < j < n, \\ cq^n & \text{if } j = n. \end{cases}$$

ただし, 行列 $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ に対して, $[A]_{i,j} = a_{i,j}$ とする.

(ii) $1 \leq j \leq n$ に対して

$$[\tilde{W}_t(a, b, c; q)]_{n,j} = \begin{cases} cq & \text{if } j = 1, \\ 0 & \text{if } 1 < j < n, \\ -\frac{a^{n-1} q^{\frac{(n-1)(n-4)}{2} + \sum_{k=1}^n t_k} (b; q)_{n-1} (1-abcq^{2n-3})}{\prod_{k=1}^n (1 - abq^{t_k+n-3})} & \text{if } j = n. \end{cases}$$

従って, $m, n \in \mathbb{N}$ ($1 \leq m \leq n$) に対して

$$[m, n] = \{m, m+1, m+2, \dots, n\}$$

とおき, $I, J \subseteq [1, n]$, $I = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_r$), $J = \{j_1, j_2, \dots, j_s\}$ ($j_1 < j_2 < \dots < j_s$), $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ に対して

$$A_J^I = (a_{i_u, j_v})_{1 \leq u \leq r, 1 \leq v \leq s}$$

とおくと, Lemma 2.2 において行列式の展開を用いることにより, 次が即座に得られる.

Corollary 2.3. $n \in \mathbb{Z}$ ($n \geq 2$), $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して次が成立する.

$$\det(W_t(a, b, c; q)) = cq^n \cdot \det \left(W_t(a, b, c; q)_{[1, n-1]}^{[1, n-1]} \right) - \frac{a^{n-1} q^{-n+1+\sum_{k=1}^n t_k} (b; q)_{n-1} (1-ac)}{\prod_{k=1}^n (1 - aq^{t_k-1})} \det \left(W_t(a, b, c; q)_{[2, n]}^{[1, n-1]} \right). \quad (2.9)$$

$$\det(\tilde{W}_t(a, b, c; q)) = (-1)^{n+1} cq \cdot \det \left(\tilde{W}_t(a, b, c; q)_{[2, n]}^{[1, n-1]} \right) - \frac{a^{n-1} q^{\frac{(n-1)(n-4)}{2} + \sum_{k=1}^n t_k} (b; q)_{n-1} (1-abcq^{2n-3})}{\prod_{k=1}^n (1 - abq^{t_k+n-3})} \det \left(\tilde{W}_t(a, b, c; q)_{[1, n-1]}^{[1, n-1]} \right). \quad (2.10)$$

Lemma 2.2 の証明の前に補題を一つ示そう.

Lemma 2.4. (i) $n, r \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, $0 \leq r \leq n-1$ に対して

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^r}{(1-bx_k) \prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq k}} (x_k - x_s)} = \frac{b^{n-1-r}}{\prod_{k=1}^n (1-bx_k)}. \quad (2.11)$$

(ii) $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{k=1}^n \frac{(aq^{tk}; q)_{n-1}}{(1-bq^{tk}) \prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq k}} (q^{tk} - q^{ts})} = \frac{b^{n-1}(ab^{-1}; q)_{n-1}}{\prod_{k=1}^n (1-bq^{tk})}. \quad (2.12)$$

(iii) $n, r \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$, $-1 \leq r \leq n-1$ に対して

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^r}{\prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq k}} (x_k - x_s)} = \begin{cases} \frac{(-1)^{n-1}}{\prod_{k=1}^n x_k} & \text{if } r = -1, \\ 0 & \text{if } 0 \leq r \leq n-2, \\ 1 & \text{if } r = n-1. \end{cases} \quad (2.13)$$

Proof. (i) (resp. (ii)) は, 両辺に $\prod_{k=1}^n (1-bx_k)$ (resp. $\prod_{k=1}^n (1-bq^{tk})$) を掛けた等式を b についての $n-1$ 次式と考えるとよい. 詳細は略とする. (iii) は, 第 i 行が $(x_i^r, 1, x_i, \dots, x_i^{n-2})$ の行列を 1 列に関して展開して, Vandermonde 行列式を用いて整理すると, 成立が容易に示せる. $\square$

Proof of Lemma 2.2. (i) まず, 定義より

$$[W_t(a, b, c; q)]_{n,j} = - \sum_{k=1}^n \frac{q^{tk} U_k}{(1-aq^{tk-1}) \prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq k}} (1-q^{tk-ts})} \quad (2.14)$$

と表せる. ただし

$$U_k = \sum_{l=0}^{n-j} (1-cq^{j-tk+l})(aq^{tk-1}; q)_{j-1+l} (abq^{tk+j-2+l}; q)_{n-j-l} (-1)^l q^{-\frac{l(2n-2j+1-l)}{2}} \begin{bmatrix} n-j \\ l \end{bmatrix}_q$$

とする. ここで

$$(x; q)_{m+l} = (x; q)_m (xq^m; q)_l, \quad (xq^l; q)_{m-l} = \frac{(x; q)_m}{(x; q)_l}, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(-1)^k q^{\frac{k(2n-k+1)}{2}} (q^{-n}; q)_k}{(q; q)_k} \quad (2.15)$$

を用いると

$$\begin{aligned} U_k &= (aq^{tk-1}; q)_{j-1} (abq^{tk+j-2}; q)_{n-j} \sum_{l=0}^{n-j} \frac{(1-q^l + q^l(1-cq^{j-tk}))(aq^{tk+j-2}; q)_l (q^{-n+j}; q)_l}{(q; q)_l (abq^{tk+j-2}; q)_l} \\ &= \sum_{l=0}^{n-j-1} \frac{(aq^{tk-1}; q)_{j+l} (q^{-n+j}; q)_{l+1} (abq^{tk+j-1+l}; q)_{n-j-1-l}}{(q; q)_l} \\ &\quad + (1-cq^{j-tk})(aq^{tk-1}; q)_{j-1} (abq^{tk+j-2}; q)_{n-j} \cdot {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} q^{-n+j}, aq^{tk+j-2} \\ abq^{tk+j-2} \end{matrix}; q, q \right] \end{aligned}$$

となり, さらに, Vandermonde's formula の q -analogue に対応する等式 (cf. [2]-(1.5.3)):

$${}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} q^{-n}, b \\ c \end{matrix}; q, q \right] = \frac{(c/b; q)_n b^n}{(c; q)_n} \quad (2.16)$$

を用いると

$$U_k = \sum_{l=0}^{n-j-1} \frac{(aq^{t_k-1}; q)_{j+l} (q^{-n+j}; q)_{l+1} (abq^{t_k+j-1+l}; q)_{n-j-1-l}}{(q; q)_l} \\ + (1 - cq^{j-t_k})(aq^{t_k-1}; q)_{j-1} (b; q)_{n-j} a^{n-j} q^{(t_k+j-2)(n-j)}. \quad (2.17)$$

従って, (2.14), (2.17) と

$$\prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq k}} (1 - q^{t_k - t_s}) = (-1)^{n-1} q^{t_k - \sum_{s=1}^n t_s} \prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq k}} (q^{t_k} - q^{t_s})$$

を利用すると

$$[W_t(a, b, c; q)]_{n,j} = (-1)^n q^{\sum_{k=1}^n t_k} \sum_{l=0}^{n-j-1} \frac{(q^{-n+j}; q)_{l+1}}{(q; q)_l} \sum_{k=1}^n \frac{(aq^{t_k}; q)_{j+l-1} (abq^{t_k+j-1+l}; q)_{n-j-1-l}}{\prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq k}} (q^{t_k} - q^{t_s})} \\ + (-1)^n a^{n-j} q^{(j-2)(n-j) + \sum_{k=1}^n t_k} (b; q)_{n-j} \sum_{k=1}^n \frac{q^{t_k(n-j)} (1 - cq^{j-t_k})(aq^{t_k-1}; q)_{j-1}}{(1 - aq^{t_k-1}) \prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq k}} (q^{t_k} - q^{t_s})}.$$

従って, (2.13) により, 第 1 項は 0 となるので

$$[W_t(a, b, c; q)]_{n,j} = (-1)^n a^{n-j} q^{(j-2)(n-j) + \sum_{k=1}^n t_k} (b; q)_{n-j} \sum_{k=1}^n \frac{q^{t_k(n-j)} (1 - cq^{j-t_k})(aq^{t_k-1}; q)_{j-1}}{(1 - aq^{t_k-1}) \prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq k}} (q^{t_k} - q^{t_s})}. \quad (2.18)$$

Case 1. $j = 1$ のとき. (2.18) により

$$[W_t(a, b, c; q)]_{n,1} = (-1)^n a^{n-1} q^{-n+1 + \sum_{k=1}^n t_k} (b; q)_{n-1} \sum_{k=1}^n \frac{q^{t_k(n-1)} (1 - cq^{1-t_k})}{(1 - aq^{t_k-1}) \prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq k}} (q^{t_k} - q^{t_s})}.$$

ここで

$$\sum_{k=1}^n \frac{q^{t_k(n-1)} (1 - cq^{1-t_k})}{(1 - aq^{t_k-1}) \prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq k}} (q^{t_k} - q^{t_s})} \\ = -cq \sum_{k=1}^n \frac{q^{t_k(n-2)}}{\prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq k}} (q^{t_k} - q^{t_s})} + (1 - ac) \sum_{k=1}^n \frac{q^{t_k(n-1)}}{(1 - aq^{t_k-1}) \prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq k}} (q^{t_k} - q^{t_s})} \quad (2.19)$$

であり, (2.13) により (2.19) の第一項は 0 となるので

$$[W_t(a, b, c; q)]_{n,1} = (-1)^n a^{n-1} q^{-n+1 + \sum_{k=1}^n t_k} (b; q)_{n-1} (1 - ac) \sum_{k=1}^n \frac{q^{t_k(n-1)}}{(1 - aq^{t_k-1}) \prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq k}} (q^{t_k} - q^{t_s})}. \quad (2.20)$$

さらに, (2.11) の $r = n - 1$ の場合に対応する等式を利用すると, (2.20) により

$$[W_t(a, b, c; q)]_{n,1} = \frac{(-1)^n a^{n-1} q^{-n+1 + \sum_{k=1}^n t_k} (b; q)_{n-1} (1 - ac)}{\prod_{k=1}^n (1 - aq^{t_k-1})}. \quad (2.21)$$

Case 2. $1 < j < n$ のとき. (2.18) と (2.13) により

$$[W_t(a, b, c; q)]_{n,j} = (-1)^n a^{n-j} q^{(j-2)(n-j) + \sum_{k=1}^n t_k} (b; q)_{n-j} \sum_{k=1}^n \frac{q^{t_k(n-j)} (1 - cq^{j-t_k})(aq^{t_k}; q)_{j-2}}{\prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq k}} (q^{t_k} - q^{t_s})} = 0. \quad (2.22)$$

Case 3. $j = n$ のとき. (2.18) に (2.13) を適用すると

$$[W_t(a, b, c; q)]_{n,n} = (-1)^n q^{\sum_{k=1}^n t_k} \sum_{k=1}^n \frac{(1 - cq^{n-t_k})(aq^{t_k}; q)_{n-2}}{\prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq k}} (q^{t_k} - q^{t_s})} = cq^n. \quad (2.23)$$

従って, (2.21), (2.22), (2.23) により, (i) は成立する. (ii) 定義より

$$[\tilde{W}_t(a, b, c; q)]_{n,j} = - \sum_{k=1}^n \frac{q^{t_k} V_k}{(1 - abq^{t_k+n-3}) \prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq k}} (1 - q^{t_k-t_s})} \quad (2.24)$$

と表せる. ただし

$$V_k = \sum_{l=0}^{j-1} (1 - cq^{j-t_k-l})(aq^{t_k-1}; q)_{j-1-l} (abq^{t_k+j-2-l}; q)_{n-j+l} (-1)^l q^{\frac{l(l+1)}{2}} \begin{bmatrix} j-1 \\ l \end{bmatrix}_q$$

とする. ここで, (2.15) と

$$(x; q)_{m-l} = \frac{(-1)^l x^{-l} q^{\frac{l(l-2m+1)}{2}} (x; q)_m}{(x^{-1} q^{1-m}; q)_l}, \quad (2.25)$$

$$(xq^{-l}; q)_{m+l} = (-1)^l x^l q^{-\frac{l(l+1)}{2}} (x; q)_m (x^{-1} q; q)_l \quad (2.26)$$

を用いると

$$V_k = -cq^{j-t_k} (aq^{t_k-1}; q)_{j-1} (abq^{t_k+j-2}; q)_{n-j} X_k \quad (2.27)$$

と表せる. ただし

$$X_k = \sum_{l=0}^{j-1} (1 - c^{-1} q^{-j+t_k+l}) \frac{(bq^{j-1})^l (a^{-1} b^{-1} q^{3-t_k-j}; q)_l (q^{-j+1}; q)_l}{(a^{-1} q^{3-t_k-j}; q)_l (q; q)_l}$$

とする. さらに, Vandermonde's formula の q -analogue に対応する等式 (cf. [2]-(1.5.2)):

$${}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} q^{-n}, b \\ c \end{matrix}; q, cq^n/b \right] = \frac{(c/b; q)_n}{(c; q)_n} \quad (2.28)$$

を用いると

$$\begin{aligned} X_k &= {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} q^{-j+1}, a^{-1} b^{-1} q^{3-t_k-j} \\ a^{-1} q^{3-t_k-j} \end{matrix}; q, bq^{j-1} \right] - c^{-1} q^{-j+t_k} \sum_{l=0}^{j-1} \frac{q^{jl} (abq^{t_k+j-l-2}; q)_l (q^{-j+1}; q)_l}{(aq^{t_k+j-l-2}; q)_l (q; q)_l} \\ &= \frac{(-1)^{j-1} a^{j-1} q^{(j-1)(2t_k+j-4)/2} (b; q)_{j-1}}{(aq^{t_k-1}; q)_{j-1}} - c^{-1} q^{-j+t_k} \sum_{l=0}^{j-1} \frac{q^{jl} (abq^{t_k+j-l-2}; q)_l (q^{-j+1}; q)_l}{(aq^{t_k+j-l-2}; q)_l (q; q)_l} \end{aligned} \quad (2.29)$$

となる. 従って, (2.24), (2.27), (2.29) により

$$\begin{aligned} &[\tilde{W}_t(a, b, c; q)]_{n,j} \\ &= (-1)^n q^{\sum_{s=1}^n t_s} \left((-1)^j a^{j-1} cq^{j+(j-1)(j-4)/2} (b; q)_{j-1} \sum_{k=1}^n \frac{q^{(j-2)t_k} (abq^{t_k+j-2}; q)_{n-j}}{(1 - abq^{t_k+n-3}) \prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq k}} (q^{t_k} - q^{t_s})} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=0}^{j-1} \frac{q^{jl} (q^{-j+1}; q)_l}{(q; q)_l} \sum_{k=1}^n \frac{(aq^{t_k-1}; q)_{j-1-l} (abq^{t_k+j-l-2}; q)_{n-j+l}}{(1 - abq^{t_k+n-3}) \prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq k}} (q^{t_k} - q^{t_s})} \right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Case 1. $j = 1$ のとき. (2.30) により

$$[\tilde{W}_t(a, b, c; q)]_{n,1} = (-1)^{n-1} q^{\sum_{s=1}^n t_s} \left(cq \sum_{k=1}^n \frac{q^{-t_k} (abq^{t_k-1}; q)_{n-2}}{\prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq k}} (q^{t_k} - q^{t_s})} - \sum_{k=1}^n \frac{(abq^{t_k-1}; q)_{n-2}}{\prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq k}} (q^{t_k} - q^{t_s})} \right).$$

となるので, (2.13) により

$$[\tilde{W}_t(a, b, c; q)]_{n,1} = cq. \quad (2.31)$$

Case 2. $1 < j < n$ のとき. (2.30) と (2.13) により

$$[\tilde{W}_t(a, b, c; q)]_{n,1} = 0. \quad (2.32)$$

Case 3. $j = n$ のとき. (2.30) により

$$\begin{aligned} [\tilde{W}_t(a, b, c; q)]_{n,1} &= q^{\sum_{s=1}^n t_s} \left(a^{n-1} cq^{\frac{n^2-3n+4}{2}} (b; q)_{n-1} \sum_{k=1}^n \frac{q^{(n-2)t_k}}{(1 - abq^{t_k+n-3}) \prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq k}} (q^{t_k} - q^{t_s})} \right. \\ &\quad + (-1)^n \sum_{l=1}^{n-1} \frac{q^{ln} (q^{-n+1}; q)_l}{(q; q)_l} \sum_{k=1}^n \frac{(aq^{t_k-1}; q)_{n-1-l} (abq^{t_k+n-l-2}; q)_{l-1}}{\prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq k}} (q^{t_k} - q^{t_s})} \\ &\quad \left. + (-1)^n \sum_{k=1}^n \frac{(aq^{t_k-1}; q)_{n-1}}{(1 - abq^{t_k+n-3}) \prod_{\substack{1 \leq s \leq n \\ s \neq k}} (q^{t_k} - q^{t_s})} \right) \end{aligned}$$

となるので, (2.13), (2.11), (2.12) と

$$(b^{-1} q^{2-n}; q)_{n-1} = (-1)^{n-1} b^{-n+1} q^{-(n-1)(n-2)/2} (b; q)_{n-1}$$

により

$$\begin{aligned} [\tilde{W}_t(a, b, c; q)]_{n,1} &= (-1)^n q^{\sum_{s=1}^n t_s} \left(\frac{(-1)^n a^n bc q^{\frac{(n+1)(n-2)}{2}} (b; q)_{n-1}}{\prod_{k=1}^n (1 - abq^{t_k+n-3})} + \frac{(abq^{n-3})^{n-1} (b^{-1} q^{2-n}; q)_{n-1}}{\prod_{k=1}^n (1 - abq^{t_k+n-3})} \right) \\ &= \frac{-a^{n-1} q^{\frac{(n-1)(n-4)}{2} + \sum_{s=1}^n t_s} (b; q)_{n-1} (1 - abcq^{2n-3})}{\prod_{k=1}^n (1 - abq^{t_k+n-3})}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

従って, (2.31), (2.32), (2.33) により成立する. $\square$

さらに, Proposition 2.1 の証明の鍵となる補題を示そう.

Lemma 2.5. $n \in \mathbb{Z}$ ($n \geq 2$), $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して, $t' = (t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$ とすると次が成立する.

$$\det \left(W_t(a, b, c; q)_{[2,n]}^{[1,n-1]} \right) = \frac{(-1)^{n+1} q^{\sum_{k=1}^{n-1} t_k}}{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (1 - q^{t_j - t_i})} \det(T_{t'}(aq, b, cq; q)), \quad (2.34)$$

$$\det \left(\tilde{W}_t(a, b, c; q)_{[1,n-1]}^{[1,n-1]} \right) = \frac{(-1)^{n+1} q^{\sum_{k=1}^{n-1} t_k}}{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (1 - q^{t_j - t_i})} \det(T_{t'}(a, b, c; q)). \quad (2.35)$$

Lemma 2.5 を示すために, $n \in \mathbb{N}$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して

$$\begin{aligned} P_t(q) &= \left(-\frac{\delta(i \geq j) q^{t_j}}{\prod_{\substack{1 \leq k \leq i \\ k \neq j}} (1 - q^{t_j - t_k})} \right)_{1 \leq i, j \leq n}, \\ Z_t(a; q) &= \left(\frac{\delta_{i,j}}{1 - aq^{t_j-1}} \right)_{1 \leq i, j \leq n}, \quad \tilde{Z}_t(a, b; q) = \left(\frac{\delta_{i,j}}{1 - abq^{t_j+n-3}} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \end{aligned}$$

とおく. 定義より次が容易に分かる.

$$X_n(a; q) = P_t(q)Z_t(a; q), \quad \tilde{X}_n(a, b; q) = P_t(q)\tilde{Z}_t(a, b; q). \quad (2.36)$$

Proof of Lemma 2.5. (i) を示すためには, $n \geq 2$ に対して

$$P_{t'}(q)T_{t'}(aq, b, cq; q)Y_{n-1}(q) = W_t(a, b, c; q)_{[2, n]}^{[1, n-1]}$$

を示せばよい. まず

$$(P_t(q))_{[1, n-1]}^{[1, n-1]} = P_{t'}(q), \quad (Z_t(a; q)T_t(a, b, c; q))_{[2, n]}^{[1, n-1]} = T_{t'}(aq, b, cq; q), \quad (Y_n(q))_{[2, n]}^{[2, n]} = Y_{n-1}(q)$$

であり, $P_t(q)$, $Y_n(q)$ は下半三角行列であることが容易に分かる. 従って

$$W_t(a, b, c; q) = P_t(q)Z_t(a; q)T_t(a, b, c; q)Y_n(q)$$

であることから, 行列のブロック積を考えると

$$W_t(a, b, c; q)_{[2, n]}^{[1, n-1]} = [P_t(q)Z_t(a; q)T_t(a, b, c; q)Y_n(q)]_{[2, n]}^{[1, n-1]} = P_{t'}(q)T_{t'}(aq, b, cq; q)Y_{n-1}(q)$$

となり成立する. (ii) を示すためには, $n \geq 2$ に対して

$$P_{t'}(q)T_{t'}(a, b, c; q)\tilde{Y}_{n-1}(q) = \tilde{W}_t(a, b, c; q)_{[1, n-1]}^{[1, n-1]}$$

を示せばよい. まず

$$(P_t(q))_{[1, n-1]}^{[1, n-1]} = P_{t'}(q), \quad (\tilde{Z}_t(a, b; q)T_t(a, b, c; q))_{[1, n-1]}^{[1, n-1]} = T_{t'}(a, b, c; q), \quad (\tilde{Y}_n(q))_{[1, n-1]}^{[1, n-1]} = \tilde{Y}_{n-1}(q)$$

であり, $P_t(q)$ は下半三角行列, $\tilde{Y}_n(q)$ は上半三角行列であることが容易に分かる. 従って

$$\tilde{W}_t(a, b, c; q) = P_t(q)\tilde{Z}_t(a, b; q)T_t(a, b, c; q)\tilde{Y}_n(q)$$

であることから, 行列のブロック積を考えると

$$[\tilde{W}_t(a, b, c; q)]_{[1, n-1]}^{[1, n-1]} = [P_t(q)\tilde{Z}_t(a, b; q)T_t(a, b, c; q)\tilde{Y}_n(q)]_{[1, n-1]}^{[1, n-1]} = P_{t'}(q)T_{t'}(a, b, c; q)\tilde{Y}_{n-1}(q)$$

となり成立する. $\square$

さらに, 次が成立する.

Lemma 2.6. $n \in \mathbb{Z}$ ($n \geq 2$), $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して

$$\begin{aligned} & q^{n-1} \det \left(W_t(a, b, c; q)_{[1, n-1]}^{[1, n-1]} \right) \prod_{k=1}^{n-1} (1 - aq^{t_k-1}) \\ &= (-1)^{n+1} \det \left(\tilde{W}_t(a, b, c; q)_{[2, n]}^{[1, n-1]} \right) \prod_{k=1}^{n-1} (1 - abq^{t_k+n-3}). \end{aligned} \quad (2.37)$$

(2.37) を示すために, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} R_n(q) &= \left(q^{(j-i)(n+2-i)+1} \begin{bmatrix} n-j \\ i-j \end{bmatrix}_q \right)_{1 \leq i, j \leq n}, \quad \tilde{R}_n(q) = \left(q^{2(j-i)} \begin{bmatrix} j-1 \\ j-i \end{bmatrix}_q \right)_{1 \leq i, j \leq n}, \\ V_n(q) &= \left(\delta(i < n, j < n) q^{(j-i)(n+1-i)+1} \begin{bmatrix} n-1-j \\ i-j \end{bmatrix}_q \right)_{1 \leq i, j \leq n}, \\ \tilde{V}_n(q) &= \left(\delta(i > 1, j < n) q^{2(j-i+1)} \begin{bmatrix} j-1 \\ j-i+1 \end{bmatrix}_q \right)_{1 \leq i, j \leq n} \end{aligned}$$

とおく. このとき, 定義より

$$[V_n(q)]_{[1, n-1]}^{[1, n-1]} = R_{n-1}(q), \quad [\tilde{V}_n(q)]_{[1, n-1]}^{[2, n-1]} = \tilde{R}_{n-1}(q) \quad (2.38)$$

であることが容易に分かり, 次の関係式が Lemma 2.6 を示すための鍵となっている.

Lemma 2.7. $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$Y_n(q)V_n(q) = -\tilde{Y}_n(q)\tilde{V}_n(q). \quad (2.39)$$

Proof. $1 \leq i, j \leq n$ に対して

$$[Y_n(q)V_n(q)]_{i,j} = [-\tilde{Y}_n(q)\tilde{V}_n(q)]_{i,j} \quad (2.40)$$

を示そう. まず, $V_n(q)$, $\tilde{V}_n(q)$ の定義から, $V_n(q)$, $\tilde{V}_n(q)$ はいずれも n 列が 0 の行列であるので

$$[Y_n(q)V_n(q)]_{i,n} = 0 = [-\tilde{Y}_n(q)\tilde{V}_n(q)]_{i,n} \quad (2.41)$$

である. 以下, $1 \leq j < n$ とする. $Y_n(q)V_n(q)$ の (i, j) 成分を実際に計算してみよう. 定義に従って忠実に計算すると

$$\begin{aligned} & [Y_n(q)V_n(q)]_{i,j} \\ &= \delta(i \geq j) \sum_{k=j}^{\min\{i, n-1\}} (-1)^{i+k} q^{-\frac{(i-k)(2n+1-i-k)}{2} + (j-k)(n+1-k)+1} \begin{bmatrix} n-k \\ i-k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-1-j \\ k-j \end{bmatrix}_q. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Case 1. $i = n$ のとき. (2.42) と (2.15) を利用すると

$$[Y_n(q)V_n(q)]_{n,j} = (-1)^{n+j} q^{-\frac{(n-j-1)(n-j+2)}{2}} {}_1\phi_0(q^{-n+j+1}; -; q, q^{n-j-1}) \quad (2.43)$$

となるので, q -binomial theorem (cf. [2]-(1.3.14)):

$${}_1\phi_0(q^{-n}; -; q, z) = (zq^{-n}; q)_n \quad (2.44)$$

により

$$[Y_n(q)V_n(q)]_{n,j} = (-1)^{n+j} q^{-\frac{(n-j-1)(n-j+2)}{2}} (1; q)_{n-j-1} = \begin{cases} -1 & \text{if } j = n-1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.45)$$

Case 2. $i < n$ とする. (2.42) により

$$[Y_n(q)V_n(q)]_{i,j} = \frac{\delta(i \geq j)(-1)^{i+j} q^{1-\frac{(i-j)(2n-i-j+1)}{2}} (q; q)_{n-j-1}}{(q; q)_{n-i}} \sum_{k=0}^{i-j} \frac{(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} (q; q)_{n-j-k}}{(q; q)_k (q; q)_{i-j-k} (q; q)_{n-j-1-k}}. \quad (2.46)$$

ここで, (2.25) と (2.28) を利用すると

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{i-j} \frac{(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} (q; q)_{n-j-k}}{(q; q)_k (q; q)_{i-j-k} (q; q)_{n-j-1-k}} &= \frac{(q; q)_{n-j}}{(q; q)_{i-j} (q; q)_{n-j-1}} {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} q^{-i+j}, q^{-n+j+1} \\ q^{-n+j} \end{matrix}; q, q^{i-j-1} \right] \\ &= \frac{(q; q)_{n-j} (q^{-1}; q)_{i-j}}{(q; q)_{i-j} (q; q)_{n-j-1} (q^{-n+j}; q)_{i-j}}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

従って, (2.46), (2.47) と

$$(xq^{-m}; q)_k = (-1)^k x^k q^{-mk + \frac{k(k-1)}{2}} (x^{-1} q^{m-k+1}; q)_k$$

を利用すると

$$[Y_n(q)V_n(q)]_{i,j} = \frac{\delta(i \geq j)q(q^{-1}; q)_{i-j}}{(q; q)_{i-j}} = \begin{cases} q & \text{if } i = j, \\ -1 & \text{if } i = j + 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.48)$$

次に, $\tilde{Y}_n(q)\tilde{V}_n(q)$ の (i, j) 成分を計算しよう. まず, 定義に従って計算すると

$$[\tilde{Y}_n(q)\tilde{V}_n(q)]_{i,j} = \sum_{k=\max\{i,2\}}^{j+1} (-1)^{i+k} q^{\frac{(k-i)(k-i+1)}{2} + 2(j+1-k)} \begin{bmatrix} k-1 \\ k-i \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} j-1 \\ j+1-k \end{bmatrix}_q. \quad (2.49)$$

Case 1. $i = 1$ のとき. (2.49) により

$$[\tilde{Y}_n(q)\tilde{V}_n(q)]_{1,j} = -q^{2j-1} {}_1\phi_0(q^{-j+1}; -, q, q^{j-1})$$

となるので, (2.44) により

$$[\tilde{Y}_n(q)\tilde{V}_n(q)]_{1,j} = -q^{2j-1} (1; q)_{j-1} = \begin{cases} -q & \text{if } j = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.50)$$

Case 2. $i > 1$ のとき. (2.49) により,

$$[\tilde{Y}_n(q)\tilde{V}_n(q)]_{i,j} = \frac{(q; q)_{j-1}}{(q; q)_{i-1}} \sum_{k=0}^{j-i+1} \frac{(-1)^k q^{\frac{k(k+1)}{2} + 2(j-i+1-k)} (q; q)_{i-1+k}}{(q; q)_k (q; q)_{j-i+1-k} (q; q)_{i-2+k}}$$

となるので, (2.25), (2.28) と $(q; q)_{m+k} = (q; q)_m (q^{m+1}; q)_k$ により

$$[\tilde{Y}_n(q)\tilde{V}_n(q)]_{i,j} = \begin{cases} -q & \text{if } i = j, \\ 1 & \text{if } i = j + 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.51)$$

従って, (2.41), (2.45), (2.48), (2.50), (2.51) により (2.40) が成立する. $\square$

(2.40) を用いて Lemma 2.6 を示そう.

Proof of Lemma 2.6. $n \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} & (Z_{t'}(a; q))^{-1} P_{t'}(q)^{-1} (W_t(a, b, c; q))_{[1, n-1]}^{[1, n-1]} R_{n-1}(q) \\ &= -(\tilde{Z}_{t'}(aq, b; q))^{-1} P_{t'}(q)^{-1} (\tilde{W}_t(a, b, c; q))_{[2, n]}^{[1, n-1]} \tilde{R}_{n-1}(q) \end{aligned} \quad (2.52)$$

を示せばよい. まず, $Z_t(a; q)$, $\tilde{Z}_t(a, b; q)$ は対角行列, $P_t(q)$ は下半三角行列であることから, 次が容易に分かる.

$$Z_{t'}(a; q)^{-1} = (Z_t(a; q)^{-1})_{[1, n-1]}^{[1, n-1]}, \quad \tilde{Z}_{t'}(aq, b; q)^{-1} = (Z_t(a, b; q)^{-1})_{[1, n-1]}^{[1, n-1]}, \quad P_{t'}(q)^{-1} = [P_t(q)^{-1}]_{[1, n-1]}^{[1, n-1]}.$$

従って, $Z_t(a; q)^{-1}$, $\tilde{Z}_t(a, b; q)^{-1}$, $P_t(q)^{-1}$ は下半三角行列, $V_n(q)$ の n 行は全て 0, $\tilde{V}_n(q)$ の 1 行は全て 0 であることと (2.38) 利用して, 行列のブロック積を考えると

$$\begin{aligned} & (Z_{t'}(a; q))^{-1} P_{t'}(q)^{-1} (W_t(a, b, c; q))_{[1, n-1]}^{[1, n-1]} R_{n-1}(q) \\ &= [Z_t(a; q)^{-1} P_t(q)^{-1} W_t(a, b, c; q) V_n(q)]_{[1, n-1]}^{[1, n-1]} \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} & (\tilde{Z}_{t'}(aq, b; q))^{-1} P_{t'}(q)^{-1} (\tilde{W}_t(a, b, c; q))_{[2, n]}^{[1, n-1]} \tilde{R}_{n-1}(q) \\ &= [\tilde{Z}_t(a, b; q)^{-1} P_t(q)^{-1} \tilde{W}_t(a, b, c; q) \tilde{V}_n(q)]_{[1, n-1]}^{[1, n-1]} \end{aligned} \quad (2.54)$$

が得られる. さらに, (2.5), (2.6), (2.36), (2.39) により

$$Z_t(a; q)^{-1} P_t(q)^{-1} W_t(a, b, c; q) V_n(q) = -\tilde{Z}_t(a, b; q)^{-1} P_t(q)^{-1} \tilde{W}_t(a, b, c; q) \tilde{V}_n(q)$$

となるので, (2.53), (2.54) により (2.52) が成立する. $\square$

Proof of Proposition 2.1. $n = 1$ のときには直接の計算により成立が示せる. $n \geq 2$ とする. (2.7), (2.9), (2.34) により

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^n q^{\sum_{k=1}^n t_k} \det(T_t(a, b, c; q))}{(1 - aq^{t_n-1}) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - q^{t_j - t_i})} \\ &= cq^n \cdot \det \left(W_t(a, b, c; q)_{[1, n-1]}^{[1, n-1]} \right) \prod_{k=1}^{n-1} (1 - aq^{t_k-1}) \\ &+ \frac{(-1)^n a^{n-1} q^{-n+1+t_n+2 \sum_{k=1}^{n-1} t_k} (b; q)_{n-1} (1 - ac)}{(1 - aq^{t_n-1}) \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (1 - q^{t_j - t_i})} \det(T_{t'}(aq, b, cq; q)). \end{aligned} \quad (2.55)$$

(2.8), (2.10), (2.35) により

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^n q^{\sum_{k=1}^n t_k} \det(T_t(a, b, c; q))}{(1 - abq^{t_n+n-3}) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - q^{t_j - t_i})} \\ &= (-1)^{n+1} cq \cdot \det \left(\tilde{W}_t(a, b, c; q)_{[2, n]}^{[1, n-1]} \right) \prod_{k=1}^{n-1} (1 - abq^{t_k+n-3}) \\ &+ \frac{(-1)^n a^{n-1} q^{\frac{(n-1)(n-4)}{2} + t_n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} t_k} (b; q)_{n-1} (1 - abcq^{2n-3})}{(1 - abq^{t_n+n-3}) \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (1 - q^{t_j - t_i})} \det(T_{t'}(aq, b, cq; q)). \end{aligned} \quad (2.56)$$

従って, (2.37), (2.55), (2.56) により, (2.4) が成り立つ. $\square$

Proof of Lemma 1.5. $1 \leq k \leq n-1$ に対して

$$(1 - abq^{t_n+n-3}) R_{t'}^{(k-1)}(aq, b; q) + q^{n-1} (1 - aq^{t_n-1}) R_{t'}^{(k)}(a, b; q) = R_t^{(k)}(a, b; q) \quad (2.57)$$

となることに注意すれば, Proposition 2.1 の (2.4) を用いて, n についての帰納法で (2.3) が得られる. 従って, (2.1) と (2.2) を用いて, (2.3) を書き換えると Lemma 1.5 が得られる. $\square$

Theorem 1.4 の証明の前に補題をさらに一つ示そう.

Lemma 2.8. (i) $1 \leq k \leq n$ に対して

$$\sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} q^{-\sum_{u=1}^k j_u + k} \prod_{u=1}^k (1 - abq^{2j_u + k - 1 - u}) = q^{-\frac{k(2n-k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (abq^n; q)_k. \quad (2.58)$$

(ii) $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$ に対して

$$R_{n,k}((1, 2, \dots, n); a, b; q) = q^{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (aq^{k+1}; q)_{n-k} (abq^n; q)_k. \quad (2.59)$$

Proof. (i) $k \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} & \{(j_1, j_2, \dots, j_k) \in \mathbb{Z}^k; 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n\} \\ &= \{(j_1, j_2, \dots, j_{k-1}, n) \in \mathbb{Z}^k; 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{k-1} \leq n-1\} \\ & \cup \{(j_1, j_2, \dots, j_k) \in \mathbb{Z}^k; 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n-1\} \quad (\text{disjoint union}) \end{aligned}$$

に注意すれば, n についての帰納法で容易に示せる. (ii) (2.58) により

$$\begin{aligned} & R_{n,k}((1, 2, \dots, n); a, b; q) \\ &= (aq^{k+1}; q)_{n-k} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} q^{\frac{n(n+1)}{2} - \sum_{u=1}^k j_u - n + k} \prod_{u=1}^k (1 - abq^{2j_u + k - 1 - u}) \\ &= \begin{cases} q^{\frac{n(n-1)}{2}} (aq^{k+1}; q)_{n-k} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} q^{-\sum_{u=1}^k j_u + k} \prod_{u=1}^k (1 - abq^{2j_u + k - 1 - u}) & \text{if } 1 \leq k \leq n, \\ q^{\frac{n(n-1)}{2}} (aq; q)_n & \text{if } k = 0 \end{cases} \\ &= q^{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (aq^{k+1}; q)_{n-k} (abq^n; q)_k \end{aligned}$$

となり成立する. $\square$

Proof of Theorem 1.4. (i) Lemma 1.5 において $t_i = i$ ($1 \leq i \leq n$) とし, (2.59) と

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (q^i - q^j) &= q^{\frac{n(n-1)(n+1)}{6}} \prod_{k=1}^{n-1} (q; q)_k, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(-1)^k q^{\frac{k(2n-k+1)}{2}} (q^{-n}; q)_k}{(q; q)_k}, \\ (xq^k; q)_{m-k} &= \frac{(x; q)_m}{(x; q)_k}, \quad (x; q^2)_m = (x^{\frac{1}{2}}; q)_m (-x^{\frac{1}{2}}; q)_m \end{aligned}$$

であることを利用すると

$$\begin{aligned} & \det \left((1 - cq^{j-i}) \frac{(aq; q)_{i+j-2}}{(abq^2; q)_{i+j-2}} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= (-1)^n a^{\frac{n(n-3)}{2}} q^{\frac{n(n^2-3n-1)}{3}} (abcq; q^2)_n \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(q; q)_k (aq; q)_{k+1} (bq; q)_{k-1}}{(abq^2; q)_{k+n-1}} \\ & \quad \times {}_4\phi_3 \left[\begin{matrix} q^{-n}, a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}, -a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}, abq^n \\ aq, a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}, -a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} \end{matrix}; q, q \right]. \end{aligned} \quad (2.60)$$

(2.60) の a を aq^r と置き換えたあとで, 両辺に $\frac{(aq; q)_n}{(abq^2; q)_n^2}$ を掛けて整理すれば (1.11) が得られる.

(1.12) は (1.11) を Askey-Wilson polynomial の定義を用いて書き直せば得られる. $\square$

3 Askey-Wilson polynomials

本節では, Theorem 1.4 から得られる諸種の等式を導くために必要な Askey-Wilson polynomial $P_n(x; a, b, c, d; q)$, i.e.

$$P_n(x; a, b, c, d; q) = \frac{(ab, ac, ad; q)_n}{a^n} {}_4\phi_3 \left[\begin{matrix} q^{-n}, abcdq^{n-1}, ax, ax^{-1} \\ ab, ac, ad \end{matrix}; q, q \right],$$

に関する等式について述べることを目的とする. まず, 次が知られている.

Theorem 3.1 (well-known). $n \in \mathbb{Z}$ ($n \geq 0$), $\sigma \in S_4$ (4 次対称群) に対して

$$P_n(x; a, b, c, d; q) = P_n(x^{-1}; a, b, c, d; q), \quad (3.1)$$

$$P_n(x; a_1, a_2, a_3, a_4; q) = P_n(x; a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, a_{\sigma(4)}; q). \quad (3.2)$$

特に, $x = \sqrt{-1}$ のときには, 次が成立する.

Proposition 3.2. $n \in \mathbb{Z}$ ($n \geq 0$) に対して

$$P_n(\sqrt{-1}; a, b, c, -c; q) = \begin{cases} (-1)^m a^m b^m c^{2m} q^{m(3m-1)} (-c^2; q^2)_m \\ \quad \times P_m(-ab^{-1}; 1, q, ab, -a^{-1}b^{-1}c^{-2}q^{2-4m}; q^2) & \text{if } n = 2m, \\ (-1)^{m+1} a^m b^{m+1} c^{2m} (1 + ab^{-1}) q^{m(3m+1)} (-c^2; q^2)_{m+1} \\ \quad \times P_m(-ab^{-1}; q, q^2, ab, -a^{-1}b^{-1}c^{-2}q^{-4m}; q^2) & \text{if } n = 2m + 1. \end{cases}$$

Proposition 3.2 の証明の前に補題を一つ示そう.

Lemma 3.3. (i) $n \in \mathbb{Z}$ ($n \geq 0$) に対して

$$\begin{aligned} & (1 - cxq^{-1})(1 - adq^n)P_n(x; a, b, c, d; q) \\ &= (1 - acq^{n-1})(1 - dx)P_n(x; a, b, cq^{-1}, dq; q) \\ & \quad + q^{\frac{n}{2}-1}(a - x)(c - dq)P_n(xq^{-\frac{1}{2}}; aq^{\frac{1}{2}}, bq^{-\frac{1}{2}}, cq^{-\frac{1}{2}}, dq^{\frac{1}{2}}; q). \end{aligned} \quad (3.3)$$

(ii) $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} P_n(x; a, b, c, d; q) &= a^{-1}(1 - abq^{n-1})(1 - acq^{n-1})(1 - adq^{n-1})P_{n-1}(x; a, b, c, d; q) \\ & \quad - a^{-1}(1 - abcdq^{2n-2})(1 - ax)(1 - ax^{-1})P_{n-1}(x; aq, b, c, d; q), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} P_n(x; a, b, c, d; q) &= q^{\frac{n-1}{2}} x^{-1}(1 - ax)(1 - bd)(1 - cx)P_{n-1}(xq^{\frac{1}{2}}; aq^{\frac{1}{2}}, bq^{\frac{1}{2}}, cq^{\frac{1}{2}}, dq^{\frac{1}{2}}; q) \\ & \quad + x(1 - dx^{-1})(1 - acq^{n-1})(1 - bx^{-1})P_{n-1}(x; a, bq, c, dq; q). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Proof. まず

$$p_{n,k}(x; a, b, c, d; q) = \frac{(ab, ac, ad; q)_n (q^{-n}, abcdq^{n-1}, ax, ax^{-1}; q)_k q^k}{a^n (q, ab, ac, ad; q)_k}$$

とおくと, $p_{n,n+1}(x; a, b, c, d; q) = p_{n,-1}(x; a, b, c, d; q) = 0$ であり

$$P_n(x; a, b, c, d; q) = \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x; a, b, c, d; q) \quad (3.6)$$

となることに注意する. (i)

$$\begin{aligned} & (1 - cxq^{-1})(1 - adq^n)p_{n,k}(x; a, b, c, d; q) - (1 - acq^{n-1})(1 - dx)p_{n,k}(x; a, b, cq^{-1}, dq; q) \\ & \quad - q^{\frac{n}{2}-1}(a - x)(c - dq)p_{n,k}(xq^{-\frac{1}{2}}; aq^{\frac{1}{2}}, bq^{-\frac{1}{2}}, cq^{-\frac{1}{2}}, dq^{\frac{1}{2}}; q) = 0 \end{aligned}$$

となるので, (3.6) により成立する. (ii) $0 \leq k \leq n$ に対して

$$p_{n,k}(x; a, b, c, d; q) - a^{-1}(1 - abq^{n-1})(1 - acq^{n-1})(1 - adq^{n-1})p_{n-1,k}(x; a, b, c, d; q) \\ + a^{-1}(1 - abcdq^{2n-2})(1 - ax)(1 - ax^{-1})p_{n-1,k-1}(x; aq, b, c, d; q) = 0$$

となるので, (3.6) により (3.4) は成立する. (3.4) により

$$P_{n-1}(xq^{\frac{1}{2}}; aq^{\frac{1}{2}}, bq^{\frac{1}{2}}, cq^{\frac{1}{2}}, dq^{\frac{1}{2}}; q) \\ = a^{-1}q^{-\frac{1}{2}}(1 - abq^{n-1})(1 - acq^{n-1})(1 - adq^{n-1})P_{n-2}(xq^{\frac{1}{2}}; aq^{\frac{1}{2}}, bq^{\frac{1}{2}}, cq^{\frac{1}{2}}, dq^{\frac{1}{2}}; q) \\ - a^{-1}q^{-\frac{1}{2}}(1 - abcdq^{2n-2})(1 - axq)(1 - ax^{-1})P_{n-2}(xq^{\frac{1}{2}}; aq^{\frac{3}{2}}, bq^{\frac{1}{2}}, cq^{\frac{1}{2}}, dq^{\frac{1}{2}}; q), \quad (3.7)$$

$$P_{n-1}(x; a, bq, c, dq; q) = a^{-1}(1 - abq^{n-1})(1 - acq^{n-2})(1 - adq^{n-1})P_{n-2}(x; a, bq, c, dq; q) \\ - a^{-1}(1 - abcdq^{2n-2})(1 - ax)(1 - ax^{-1})P_{n-2}(x; aq, bq, c, dq; q) \quad (3.8)$$

であることに注意し, (3.5) を n についての帰納法で証明しよう. $n = 1$ のときには, (3.5) の両辺の一致が直接の計算により示すことができる. $n \geq 2$ とし, $n - 1$ まで (3.5) が成立したと仮定すると, n のときには, (3.4) と帰納法の仮定, さらに (3.7), (3.8) により成立が示せる. $\square$

Proof of Proposition 3.2. まず, (3.5) の q を q^2 に置き換え, 得られた等式の (x, a, b, c, d, n) を $(-ab^{-1}, q, 1, ab, -a^{-1}b^{-1}c^{-2}q^{-4m+2}, m)$ にさらに置き換えて整理すると

$$a^2c^2q^{4m-2}P_m(-ab^{-1}; q, 1, ab, -a^{-1}b^{-1}c^{-2}q^{-4m+2}; q^2) \\ = (1 - a^2c^2q^{4m-2})(1 - abq^{2m-1})(1 + ab^{-1})P_{m-1}(-ab^{-1}; q, q^2, ab, -a^{-1}b^{-1}c^{-2}q^{-4m+4}; q^2) \\ - q^{m-1}(1 + ab^{-1}q)(1 + abc^2q^{4m-2})(1 + a^2)P_{m-1}(-ab^{-1}q; q^2, q, abq, -a^{-1}b^{-1}c^{-2}q^{-4m+3}; q^2). \quad (3.9)$$

また, (3.3) の q を q^2 に置き換え, (3.1) を用いて変形すると

$$(1 - cxq^{-2})(1 - adq^{2n})P_n(x^{-1}; a, b, c, d; q^2) = (1 - acq^{2n-2})(1 - dx)P_n(x^{-1}; a, b, cq^{-2}, dq^2; q^2) \\ + q^{n-2}(a - x)(c - dq^2)P_n(x^{-1}q; aq, bq^{-1}, cq^{-1}, dq; q^2)$$

となり, (x, a, b, c, d, m) を $(-a^{-1}b, ab, q, q^2, -a^{-1}b^{-1}c^{-2}q^{-4m}, m)$ と置き換えて整理すると

$$-abq^{2m}(1 + ab^{-1})(1 + c^2q^{2m})P_m(-ab^{-1}; ab, q, q^2, -a^{-1}b^{-1}c^{-2}q^{-4m}; q^2) \\ = (1 - abq^{2m})(1 - a^2c^2q^{4m})P_m(-ab^{-1}; ab, q, 1, -a^{-1}b^{-1}c^{-2}q^{-4m+2}; q^2) \\ - q^m(1 + a^2)(1 + abc^2q^{4m})P_m(-ab^{-1}q; abq, 1, q, -a^{-1}b^{-1}c^{-2}q^{-4m+1}; q^2). \quad (3.10)$$

(3.9), (3.10) を利用して, n の帰納法で示そう. $n = 0$ のときには両辺ともに 1 となり成立している. $n - 1$ まで成立したと仮定し, n のときの成立を示そう ($n \geq 1$). $n = 2m$ (resp. $n = 2m + 1$) のときには, (3.4) と帰納法の仮定を用いて得られた等式に, (3.9) (resp (3.10)) を適用すれば成立が示せる. $\square$

Proposition 3.2 の系として次が容易に得られる.

Corollary 3.4. $n \in \mathbb{Z}$ ($n \geq 0$) に対して

$$P_n(\sqrt{-1}; a, -a, b, -b; q) = \begin{cases} (-1)^m(-a^2; q^2)_m(-b^2; q^2)_m(a^2b^2q^{2m}; q^2)_m(q; q^2)_m & \text{if } n = 2m, \\ 0 & \text{if } n = 2m + 1. \end{cases} \quad (3.11)$$

4 諸種の行列式

ここでは, Lemma 1.5, Theorem 1.4 と前節で得られた結果から得られる等式の紹介を目的とする. まず, Proposition 3.2 を用いて, Theorem 1.4 を n が偶数のときと奇数のときに分けて記述すると次が得られる.

Corollary 4.1. $m \in \mathbb{Z}$ ($m \geq 0$) に対して

$$\begin{aligned} & \det \left((1 - cq^{j-i}) \frac{(aq; q)_{i+j+r-2}}{(abq^2; q)_{i+j+r-2}} \right)_{1 \leq i, j \leq 2m} \\ &= (-1)^m a^{m(2m-1)} b^m c^m q^{\frac{m(8m^2-3m+1)}{3} + m(2m-1)r} (b; q^2)_m \prod_{k=0}^{2m-1} \frac{(q; q)_k (aq; q)_{k+r} (bq; q)_{k-1}}{(abq^2; q)_{k+2m+r-1}} \\ & \quad \times P_m(c; 1, q, aq^{r+1}, a^{-1}b^{-1}q^{-4m-r+1}; q^2), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} & \det \left((1 - cq^{j-i}) \frac{(aq; q)_{i+j+r-2}}{(abq^2; q)_{i+j+r-2}} \right)_{1 \leq i, j \leq 2m+1} \\ &= (-1)^m a^{m(2m+1)} b^m c^m (1-c) q^{\frac{m(m+1)(8m+1)}{3} + m(2m+1)r} (b; q^2)_{m+1} \prod_{k=0}^{2m} \frac{(q; q)_k (aq; q)_{k+r} (bq; q)_{k-1}}{(abq^2; q)_{k+2m+r}} \\ & \quad \times P_m(c; q, q^2, aq^{r+1}, a^{-1}b^{-1}q^{-4m-r-1}; q^2). \end{aligned} \quad (4.2)$$

(4.1) の c を 1 にして, $P_n(1; 1, b, c, d; q) = (b, c, d; q)_n$ であることに注意すれば次が得られる.

Corollary 4.2. $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} & \det \left((q^{i-1} - q^{j-1}) \frac{(aq; q)_{i+j+r-2}}{(abq^2; q)_{i+j+r-2}} \right)_{1 \leq i, j \leq 2m} \\ &= \left(a^{m(m-1)} q^{\frac{m(m-1)(4m+1)}{3} + m(m-1)r} \prod_{k=1}^m \frac{(q; q)_{2k-1} (aq; q)_{2k+r-1} (bq; q)_{2k-2}}{(abq^2; q)_{2(k+m)+r-3}} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

尚, (4.3) は, Ishikawa-Tagawa-Zeng [4] での同じ行列に対する pfaffian の結果からも得られる.

(1.13) の c に 0 を代入すると次が得られる (cf. [3]).

Corollary 4.3 (I.-T.-Zeng '09). $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\det \left(\frac{(aq; q)_{t_i+j-2}}{(abq^2; q)_{t_i+j-2}} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = a^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} \prod_{k=1}^n \frac{(aq; q)_{t_k-1} (bq; q)_{k-1}}{(abq^2; q)_{t_k+n-2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (q^{t_i} - q^{t_j}).$$

Corollary 4.3 を示す前に補題を一つ示そう.

Lemma 4.4. $n \in \mathbb{N}$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k R_t^{(k)}(a, b; q) = (-1)^n a^n q^{\frac{n(n-3)}{2} + \sum_{k=1}^n t_k} (bq^{-1}; q)_n. \quad (4.4)$$

Proof. $R_t^{(k)}(a, b; q)$ の定義式より, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ に対して

$$R_t^{(0)}(a, b; q) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^n (1 - aq^{t_k-1}), \quad R_t^{(n)}(a, b; q) = \prod_{k=1}^n (1 - abq^{t_k+n-3})$$

である. 従って, (2.57) を利用すれば, n についての帰納法で示せる. $\square$

Proof of Corollary 4.3. (1.13) の c を 0 とし, (4.4) を用いて整理すれば成立が示せる. $\square$

Lemma 1.5 において, c を $a^{-1}, a^{-1}b^{-1}q^{-2n+3}$ と置き換えると次が得られる.

Corollary 4.5. $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} & \det \left((1 - a^{-1}q^{j-t_i-1}) \frac{(aq; q)_{t_i+j-2}}{(abq^2; q)_{t_i+j-2}} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= (-1)^n a^{\frac{n(n-3)}{2}} q^{\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \sum_{k=1}^n t_k} (b; q^2)_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (q^{t_i} - q^{t_j}) \prod_{k=1}^n \frac{(aq; q)_{t_k} (bq; q)_{k-2}}{(abq^2; q)_{t_k+n-2}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} & \det \left((1 - a^{-1}b^{-1}q^{j-t_i-2n+1}) \frac{(aq; q)_{t_i+j-2}}{(abq^2; q)_{t_i+j-2}} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= (-1)^n a^{\frac{n(n-3)}{2}} b^{-n} q^{\frac{n(n-1)(n-11)}{6} - \sum_{k=1}^n t_k} (b; q^2)_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (q^{t_i} - q^{t_j}) \prod_{k=1}^n \frac{(aq; q)_{t_k-1} (bq; q)_{k-2}}{(abq^2; q)_{t_k+n-3}}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Proof. Lemma 1.5 において, c を $a^{-1}, a^{-1}b^{-1}q^{-2n+3}$ と置き換え

$$R_{n,0}(t; a, b; q) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{u=1}^n (1 - aq^{t_u}), \quad R_{n,n}(t; a, b; q) = \prod_{k=1}^n (1 - abq^{t_k+n-1})$$

となることに注意すれば容易に得られる. $\square$

(1.11) の (a, b, c) を (q^a, q^b, q^c) と置き換え, 両辺に $\frac{1}{(1-q)^n}$ を掛けて⁶, $q \rightarrow 1$ とすると次が得られる.

Corollary 4.6. $n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned} & \det \left((c + j - i) \frac{(a + 1)_{i+j+r-2}}{(a + b + 2)_{i+j+r-2}} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= (-2)^n \left(\frac{a + b + c + r + 1}{2} \right)_n \cdot {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, \frac{a+c+r+1}{2}, a + b + n + r \\ \frac{a+b+c+r+1}{2}, a + r + 1 \end{matrix}; 1 \right] \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k!(a+1)_{k+r+1}(b+1)_{k-1}}{(a+b+2)_{k+n+r-1}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

さらに, $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ (Catalan number) とおくと, $\frac{(a+1)_n}{(a+b+2)_n} \Big|_{a=-\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}} = \frac{C_n}{4^n}$ となるので, (4.7) から次が得られる.

Corollary 4.7. $n, r \in \mathbb{N}, r \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} & \det ((c + j - i) C_{i+j+r-2})_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= (-2)^n \left(\frac{c + r + 1}{2} \right)_n \cdot {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, \frac{2c+2r+1}{4}, n + r \\ \frac{c+r+1}{2}, r + \frac{1}{2} \end{matrix}; 1 \right] \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2k + 2r + 1)!(2k)!}{(k + r)!(k + n + r)!}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

⁶ $\sum_{k=0}^{n-1} k = \sum_{k=0}^{n-1} (k + n - 1)$ に注意.

尚, $A_n = \binom{2n}{n}$, $B_n = \binom{2n+1}{n}$ とおくと, $\frac{(a+1)_n}{(a+b+2)_n} \Big|_{a=-\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}} = \frac{A_n}{4^n}$, $\frac{(a+1)_n}{(a+b+2)_n} \Big|_{a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}} = \frac{B_n}{4^n}$ となるので, $\det((c+j-i)A_{i+j+r-2})_{1 \leq i, j \leq n}$, $\det((c+j-i)B_{i+j+r-2})_{1 \leq i, j \leq n}$ についても, (4.8) と同様の等式が得られる.

最後に, (4.1) と (4.2) において, $q \rightarrow 1$ として得られる結果について述べておこう. そのために, $n \in \mathbb{Z}$ ($n \geq 0$) に対して, Wilson polynomial $W_n(x; a, b, c, d)$ を

$$W_n(x; a, b, c, d) = (a+b, a+c, a+d)_n \cdot {}_4F_3 \left[\begin{matrix} a+x, a-x, a+b+c+d+n-1, -n \\ a+b, a+c, a+d \end{matrix}; 1 \right]$$

で定義する. このとき,

$$\frac{P_n(q^x; q^a, q^b, q^c, q^d; q^2)}{(1-q)^{3n}} \Big|_{q=1} = 2^{3n} W_n(x/2; a/2, b/2, c/2, d/2).$$

が成立しているので, (4.1) (resp. (4.2)) の (a, b, c) を (q^a, q^b, q^c) と置き換え, 両辺に $\frac{1}{(1-q)^{2m}}$ (resp. $\frac{1}{(1-q)^{2m+1}}$) を掛けて, $q \rightarrow 1$ として整理すると次が得られる.

Corollary 4.8. $m \in \mathbb{Z}$ ($m \geq 0$) に対して

$$\det \left((c+j-i) \frac{(a+1)_{i+j+r-2}}{(a+b+2)_{i+j+r-2}} \right)_{1 \leq i, j \leq 2m} = \begin{cases} (-1)^m 2^{4m} \left(\frac{b}{2}\right)_m W_m\left(\frac{c}{2}; 0, \frac{1}{2}, \frac{a+r+1}{2}, -\frac{a+b+4m+r-1}{2}\right) \prod_{k=0}^{2m-1} \frac{k!(a+1)_{k+r}(b+1)_{k-1}}{(a+b+2)_{k+2m+r-1}} & \text{if } n = 2m, \\ (-1)^m 2^{4m+1} c \left(\frac{b}{2}\right)_{m+1} W_m\left(\frac{c}{2}; \frac{1}{2}, 1, \frac{a+r+1}{2}, -\frac{a+b+4m+r+1}{2}\right) \prod_{k=0}^{2m} \frac{k!(a+1)_{k+r}(b+1)_{k-1}}{(a+b+2)_{k+2m+r}} & \text{if } n = 2m+1. \end{cases}$$

参考文献

- [1] M. Ciucu and C. Krattenthaler, “The Interaction of a gap with a free boundary in a two dimensional dimer system”, *Comm. Math. Phys.*, **302** (2011) 253 – 289.
- [2] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series (2nd ed)*, Cambridge Univ. Press, (1990, 2004).
- [3] M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, “A q -analogue of Catalan Hanken determinants”, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, B11 (2009), 19-42.
- [4] M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, “Pfaffian decomposition and a Pfaffian analogue of q -Catalan Hankel determinants”, *arXiv:1011.5941v1*.
- [5] R. Koekoek, P. Leskey and R. Swarttouw, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q -Analogues*, Springer-Verlag, (2000).
- [6] M. Mehta and R. Wang, “Calculation of a Certain Determinant”, *Commun. Math. Phys.* **214** (2000), 227 – 232.
- [7] M. Nishizawa, “Evaluation of a certain q -determinant”, *Linear Algebra and its Applications* **342** (2002), 107-115.