

非可換トーラス上の Yang-Mills

横浜市立大 中神祥臣 (Yoshiomi Nakagami)

1985年夏にIowa大学で開かれた“作用素環と数理物理学の会議”において、M. Rieffel は幾何学者が話題にしている Yang-Mills の理論を非可換微分幾何の枠組に取り入れ、無理数回転 C^* 環 A_θ 上の特定の加群に対して、Yang-Mills方程式を解き、解の成すゲージ同値類全体が具体的な位相空間と同相に成ることを示した。その後、この内容は A. Connesと共著で次のプレプリント

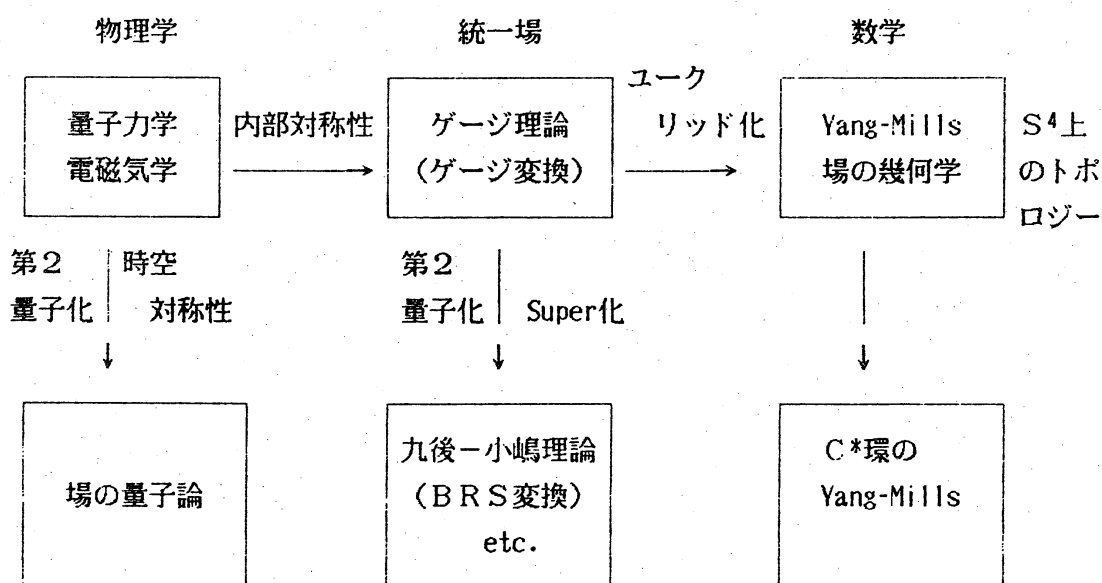
[1] Yang-Mills for non-commutative two-tori, Operator Algebras and Mathematical Physics (Ed. Jorgensen and Muhly) Contemporary Math., 60 AMS, 1986, to appear.

にまとめられ、その前書きで、この研究の目的の1つは、非可換多様体に対応する C^* 環から、その“多様体の影”を捉えることにあると述べている。ここでは、これと、この結果を利用した G. Elliott の

[2] The diffeomorphism group of the irrational rotation C^* -algebra, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 8, #5 (1986), 329-334.

の内容を紹介する。

元来 Yang-Mills理論というのは、物理学者が統一的場の理論を試みようとするゲージ理論の別名であったが、最近ではその中から生み出された数学的側面が広く知られるように成って来ている。



Connes達の非可換微分幾何 単位的C*環Aにおける微分構造は、それに作用する連結Lie群Gから導かれる。いま (A, G, α) をそのようなC*力学系とし、 A^∞ を作用 α に関する C^∞ ベクトルの全体とする。有限生成の射影的右 A^∞ 加群 Ξ に対し、線形写像 $\nabla: \Xi \rightarrow \Xi \otimes \mathfrak{g}^*$ が各 $X \in \mathfrak{g}$ に対し

$$\nabla_X (\xi a) = (\nabla_X \xi) a + \xi \delta_X (a) \quad , \quad \xi \in \Xi \quad , \quad a \in A^\infty$$

をみたすとき、 ∇ を Ξ の接続という。 Ξ 上にはAに値をもつ正定値内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ で $\langle \xi, \eta \rangle_A^* = \langle \eta, \xi \rangle_A$ と $\langle \xi, \eta a \rangle_A = \langle \xi, \eta \rangle_A a$ をみたすものが在る。接続 ∇ の中でも整合性の条件

$$\delta_X \langle \xi, \eta \rangle_A = \langle \nabla_X \xi, \eta \rangle_A + \langle \xi, \nabla_X \eta \rangle_A$$

をみたす接続の全体を $CC(\Xi)$ とする。接続 ∇ に対し

$$\Theta_\nabla (X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]} \in \text{End}_A(\Xi)$$

を ∇ の曲率(またはゲージ場)という。これは $\text{End}_A(\Xi)$ に値をもつ交代2形式である。

これを用いて Ξ のYang-Mills汎関数YMを

$$YM(\nabla) = -\tau_E(\{\Theta_\nabla, \Theta_\nabla\}) \quad , \quad \nabla \in CC(\Xi)$$

により定義する。ただし、2形式 Φ, Ψ の $\mathfrak{g}$ 値内積 $\{\Phi, \Psi\}$ の値は $\mathfrak{g}$ の規格直交基底 $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ を用いて $\sum_{i < j} \Phi(Z_i, Z_j) \Psi(Z_i, Z_j)$ で与え、 $E = \text{End}_A(\Xi)$ 上のトレイス τ の値をA上のG不変な忠実トレイス τ を用いて $\tau_E(\langle \xi, \eta \rangle_E) = \tau(\langle \eta, \xi \rangle_A)$ で与える。ここで、 $\langle \xi, \eta \rangle_E = \langle \xi, \eta \rangle_E \zeta = \xi \langle \eta, \zeta \rangle_A$ で与えられる。この場合のゲージ群は $E = \text{End}_A(\Xi)$ のユニタリ元の全体 $U(E)$ であって、 $YM(u \nabla u^*) = YM(\nabla)$, $u \in U(E)$ が成り立つ。 $CC(\Xi)$ の元のうちYMが極小値を取るものの全体 $MC(\Xi)$ の商空間

$MC(\Xi)/U(E)$ を Ξ のモジュラス空間といい、これを求めるのが本講の目的である。

定理([1]) Ξ を A_0^∞ の有限生成射影加群とし、 $d \in \mathbb{N}$ とする。 Ξ が他の有限生成射影加群との積でなければ、 Ξ^d のモジュラス空間は $(T^2)^d / \Sigma_d$ と同相である。ただし、 Σ_d は d 個の座標の置換群である。

この計算で用いられた方法を使うと

定理([2]) $\theta \in Q$ が Diophantine 条件をみたせば、

$$\text{Aut}(A_0^\infty) \cong PU_0(A_0^\infty) \rtimes \{T^2 \rtimes SL(2, \mathbb{Z})\} \quad .$$

ただし、 $PU_0(A_0^\infty)$ は $U(A_0^\infty)$ の主連結成分を中心で割った商群である。

第1 Yang-Mills 汎関数

この節では、次のような一般的 C^* 力学系 (A, G, α) に対して、Yang-Mills 汎関数、ゲージ群、モジュラス空間などを定義する。

$$\begin{cases} G \text{ は連結 Lie 群で, Lie 環 } \mathfrak{g} \text{ は正定値内積をもつ。} \\ A \text{ は } G \text{ 不変忠実トレースをもつ単位的 } C^* \text{ 環とする。} \end{cases}$$

さて、 C^* 環の微分構造は、その上に微分子を与えることにより定まる。ここでは、 A に対する Lie 群の作用 α の (無限小) 生成元により A の微分構造が与えられるものとする。作用 α に関する C^∞ ベクトルの全体 A^∞ は A の稠密部分多元環である。 α の生成元は Lie 環 $\mathfrak{g}$ が A^∞ 上の微分子への表現

$$\delta_x(a) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ (\exp tX)a - a \}, \quad x \in \mathfrak{g}, a \in A^\infty$$

を与える。

有限生成 α (以後、有限生成なものだけを考慮する、この言葉を省く) 射影的右 A 加群 Σ は通常、ベクトル空間

$${}^t(A \oplus \cdots \oplus A) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_j \in A \right\}$$

上の昇等元 $e \in M_n(A)$ を用いて、 $\Sigma = e {}^t(A \oplus \cdots \oplus A)$ と表せる。とくに e が単位元 1 のときには、射影的と言わず自由である。 e は ${}^t(A \oplus \cdots \oplus A)$ 上の可逆元により、射影元と相似にできる。すなわち e は C^* 環 $M_n(A)$ の射影元に送ることができる。 A の代りに A^∞ を用いても、射影的右 A^∞ 加群 Σ^∞ を上のように考えることができる。射影元 e を同

型の範囲内で $M_n(A)$ の元に変換直すことにより, 任意の Ξ は適当な Ξ^∞ により, $\Xi \cong \Xi^\infty \otimes_{A^\infty} A$ と表すことができる. 以後, A, Ξ の代りに, 主に A^∞, Ξ^∞ を扱う.

右 A^∞ 加群 Ξ^∞ 上には, A^∞ に値をもつエルミート計量 $\langle, \rangle_{A^\infty}$ が存在する: $\xi, \eta \in \Xi^\infty$ に対し, $\langle \xi + \eta, \zeta \rangle_{A^\infty} = \langle \xi, \zeta \rangle_{A^\infty} + \langle \eta, \zeta \rangle_{A^\infty}$ かつ

$$\langle \xi, \eta \rangle_{A^\infty}^* = \langle \eta, \xi \rangle_{A^\infty}, \quad \langle \xi, \eta a \rangle_{A^\infty} = \langle \xi, \eta \rangle_{A^\infty} a, \quad a \in A^\infty.$$

(例えば, $\Xi^\infty = e^*(A \oplus \cdots \oplus A)$ の場合には, $\langle \xi, \eta \rangle_{A^\infty} = \xi^* \eta$ と可示される). ここで,

$E = \text{End}_{A^\infty}(\Xi^\infty)$ とする. 任意の $\xi, \eta, \zeta \in \Xi^\infty$ に対し

$$\langle \xi, \eta \rangle_E \zeta = \xi \langle \eta, \zeta \rangle_{A^\infty}$$

とすれば, $\langle \xi, \eta \rangle_E$ は E の元であり, E の元はこのような $\langle \xi, \eta \rangle_E, \xi, \eta \in \Xi^\infty$ の有限1次結合で表される. したがって, Ξ^∞ は E - A^∞ 加群であり, $\langle, \rangle_E$ は E に値をもつエルミート計量である: $\langle \xi + \eta, \zeta \rangle_E = \langle \xi, \zeta \rangle_E + \langle \eta, \zeta \rangle_E$ かつ $\langle \xi, \eta \rangle_E^* = \langle \eta, \xi \rangle_E, \langle \xi, \eta \zeta \rangle_E = \zeta \langle \xi, \eta \rangle_E, \zeta \in E$. (上の例のように, $\langle \xi, \eta \rangle_{A^\infty} = \xi^* \eta$ の場合には, $\langle \xi, \eta \rangle_E = \xi \eta^*$ である). A 上に G 不変なトレイス τ が存在することを知覚しているので, E 上には

$$\tau_E(\langle \xi, \eta \rangle_E) = \tau(\langle \eta, \xi \rangle_{A^\infty})$$

をみたす忠実トレイス τ_E が存在する. ($\Xi^\infty = e^*(A \oplus \cdots \oplus A)$ の場合には, $\text{End}_A(\Xi), E = \text{End}_{A^\infty}(\Xi^\infty)$ はそれぞれ C^* 環 $e M_n(A) e$ とその稠密部分多元環 $e M_n(A^\infty) e$ により可視でき, τ_E は $M_n(A) = A \otimes M_n(\mathbb{C})$ 上の忠実トレイス $\tau \otimes \text{Tr}$ を $e M_n(A) e$ に制限したものと一致している).

E - A^∞ 加群 Ξ^∞ の双対加群 $\tilde{\Xi}^\infty$ は集合 $\{\xi: \xi \in \Xi^\infty \text{ に加群の演算}$

算 $a\tilde{\zeta} + \tilde{\eta} = (\zeta^* a + \eta)^{\sim}$, $a \in A^{\infty}$, $\zeta \in E$ が定義されたものであり,
 エルミート計量は通常 $\langle \tilde{\zeta}, \tilde{\eta} \rangle_{A^{\infty}} = \langle \zeta, \eta \rangle_{A^{\infty}}$, $\langle \tilde{\eta}, \tilde{\zeta} \rangle_E = \langle \eta, \zeta \rangle_E$ とな
 る。もちろん, $\tilde{\Sigma}^{\infty}$ は A^{∞} -E 加群である。($\tilde{\Sigma}^{\infty} = e^{\dagger}(A^{\infty} \oplus \dots \oplus A)$ の場合には,
 $\tilde{\Sigma}^{\infty} = (A^{\infty} \oplus \dots \oplus A^{\infty})e$) これを用いて,

$$\zeta \otimes \eta \in \tilde{\Sigma}^{\infty} \otimes_E \tilde{\Sigma}^{\infty} \mapsto \langle \zeta, \eta \rangle_{A^{\infty}} \in A^{\infty} \quad (\tilde{\Sigma}^{\infty} \text{ full のとき})$$

$$\zeta \otimes \tilde{\eta} \in \tilde{\Sigma}^{\infty} \otimes_{A^{\infty}} \tilde{\Sigma}^{\infty} \mapsto \langle \zeta, \eta \rangle_E \in E$$

はそれぞれ, 両側 A^{∞} 加群, 両側 E 加群としての同型写像である。($\tilde{\Sigma}^{\infty} = e^{\dagger}(A^{\infty} \oplus \dots \oplus A^{\infty})$ の場合は, $\zeta \otimes \eta = \zeta^* \eta$, $\zeta \tilde{\eta} = \zeta \eta^*$) したがって, 最初の同型
 写像は中への同型写像である。これ以上への同型写像 α とき, $\tilde{\Sigma}^{\infty}$ は
 full であるという。

$\tilde{\Sigma}^{\infty}$ の接続 ∇ : $\tilde{\Sigma}^{\infty}$ を射影的右 A^{∞} 加群とする。線形写像 ∇ :
 $\tilde{\Sigma}^{\infty} \rightarrow \tilde{\Sigma}^{\infty} \otimes \mathcal{O}$ へ, 各 $x \in \mathcal{O}$ に対し

$$\nabla_x(\zeta a) = (\nabla_x \zeta) a + \zeta \delta_x(a), \quad \zeta \in \tilde{\Sigma}^{\infty}, a \in A^{\infty}$$

をみたすとき, ∇ を $\tilde{\Sigma}^{\infty}$ の接続という。 $\tilde{\Sigma}^{\infty}$ の 2 つの接続 ∇^1, ∇^2 の差
 $\nabla^1 - \nabla^2$ は, $E = \text{End}_{A^{\infty}}(\tilde{\Sigma}^{\infty})$ の元である。したがって, $\tilde{\Sigma}^{\infty}$ の接続全体
 は E をバリエーション空間とするアフィン空間である。つまり, ある定めた接
 続に E に値を取る $\mathcal{O}$ 上の 1 形式を加えると, 任意の接続が得られる。

つまり, $\langle, \rangle_{A^{\infty}} \in \tilde{\Sigma}^{\infty}$ 上のエルミート計量とする。接続 ∇ へ

$$\delta_x(\langle \zeta, \eta \rangle_{A^{\infty}}) = \langle \nabla_x \zeta, \eta \rangle_{A^{\infty}} + \langle \zeta, \nabla_x \eta \rangle_{A^{\infty}}, \quad x \in \mathcal{O}$$

をみたすとき, ∇ は $\langle, \rangle_{A^{\infty}}$ と両立するという。このような, 両立する接続
 の全体を $CC(\tilde{\Sigma}^{\infty})$ で表す。($\tilde{\Sigma}^{\infty} = e^{\dagger}(A^{\infty} \oplus \dots \oplus A^{\infty})$) に対しては, $\nabla_x \zeta = e \tilde{\delta}_x(\zeta)$

と置いて得られる接続を グラスマン接続という。ただし,

$$\tilde{\delta}_x(e^{\psi(a_1, \dots, a_n)}) = e^{\psi(\delta_x(a_1), \dots, \delta_x(a_n))}.$$

容易に検証できるように, グラスマン接続は $\langle \xi, \eta \rangle_{A^\infty} = \xi^* \eta$ によって与えられるエルミート計量と両立している)

$CC(\Xi^\infty)$ の 2 元 ∇^1, ∇^2 はともに $\langle, \rangle_{A^\infty}$ と両立しているから, $\nabla_x^1 - \nabla_x^2$ は $\langle, \rangle_{A^\infty}$ に関して全随伴である. E の全随伴な元全体 E_S とすれば, $CC(\Xi^\infty)$ はベクトル空間として E_S を含むアフィン空間である.

また, Ξ^∞ 上の接続 ∇ に対して, $\tilde{\nabla}_x \xi = (\nabla_x \xi)^\sim$ とすれば, $\tilde{\nabla}$ は双対加群 $\tilde{\Xi}^\infty$ 上の接続である.

Ξ^∞ の曲率: Ξ^∞ の接続 ∇ に対し

$$(\Theta_\nabla)(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}, \quad X, Y \in \mathcal{O}$$

を ∇ の曲率という. これは E に値をもつ $\mathcal{O}$ 上の交代 2 形式である. ∇ が $CC(\Xi^\infty)$ の元るときは, (Θ_∇) は E_S に値をもつ $\mathcal{O}$ 上の交代 2 形式である. $\mathcal{O}$ 上には正定値内積が与えられていて, そこで $\{\omega_j : j=1, 2, \dots\}$ を $\mathcal{O}^*$ の規格直交基底とすれば

$$(\Theta_\nabla) = \sum_{i < j} (\Theta_\nabla)_{ij} \omega^i \wedge \omega^j, \quad (\Theta_\nabla)_{ij} \in E_S$$

と表せる. このような, 交代 2 形式 $\Phi = \sum_{i < j} \Phi_{ij} \omega^i \wedge \omega^j$, $\Psi = \sum_{i < j} \Psi_{ij} \omega^i \wedge \omega^j$ は E 値内積 $\langle \Phi, \Psi \rangle = \sum_{i < j} \Phi_{ij} \Psi_{ij}$ と置く.

定義 1.1 $CC(\Xi^\infty, \langle, \rangle_{A^\infty})$ 上の汎関数

$$YM(\nabla) = -\tau_E(\{\Theta_\nabla, \Theta_\nabla\}), \quad \nabla \in CC(\Xi^\infty)$$

を Yang-Mills 汎関数という.

この汎関数の変分問題の解全体, ここでこの汎関数が極小値を取るような接続の全体 $MC(\Sigma^0)$ の性質を調べることに, Yang-Mills の問題にあるが, 以下では $MC(\Sigma^0)$ のゲージ同値類の空間を調べることにする. (以上の議論はエルミート計量 $\langle, \rangle_{A_0}$ の選定方に依ることに注意しておく. 又, $\langle, \rangle_{A_0}$ をもう一つのエルミート計量とすれば, $\langle \xi, \eta \rangle_{A_0} = \langle u\xi, u\eta \rangle_{A_0}$ をみても, E の正逆元が存在する. したがって, $\nabla \in CC(\Sigma^0, \langle, \rangle_{A_0}) \mapsto u^{1/2} \nabla u^{-1/2} \in CC(\Sigma^0, \langle, \rangle_{A_0})$ なる全単射がある. $\oplus u^{1/2} \nabla u^{-1/2} = u^{1/2} \oplus u^{-1/2}$ であるから, $YM(u^{1/2} \nabla u^{-1/2}) = YM(\nabla)$).

$E = \text{End}_{A_0}(\Sigma^0)$ のユニタリ元の全体を $U(E)$ とし, これをゲージ群という. この群は $MC(\Sigma^0)$ 上へ

$$\nabla \in CC(\Sigma^0) \mapsto u \nabla u^* \in CC(\Sigma^0)$$

の作用に作用する. したがって, $(u \nabla u^*)_x \xi = u(\nabla_x(u^* \xi))$, $x \in \mathcal{Q}$ である. したがって, $\oplus_{u \nabla u^*}(x, Y) = u \oplus(x, Y) u^*$ となり, $YM(u \nabla u^*) = YM(\nabla)$ となる. したがって, $U(E)$ の元は $MC(\Sigma^0)$ を不変に作用する. このとき,

$$MC(\Sigma^0)/U(E)$$

を Σ^0 のモジュラス空間といい, これを無限次元可換 C^* 環 A_θ の場合に具体的に求めるのがこの節の目的である.

§2 定曲率の接続

この § では G は可換 Lie 群とする. したがって, 曲率は $\oplus(x, Y) = \nabla_x \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_x$ となっており, $\oplus$ がスカラー値のとき, ∇ は定曲

率の接続であるという ($\nabla \in CC(\Sigma)$).

定理 2.1 $\mathcal{M}$ は可換とする.

(i) $(\Sigma, \langle, \rangle_{A^0})$ が定曲率の接続をもてば, $MC(\Sigma)$ は両立する定曲率の接続全体と一致する.

(ii) (i) の接続の曲率の値はすべて一致している.

この定理は YM 汎関数の変分問題の解が, 交換関係という物理的にも意味のある接続を与えることを主張しており, 非可換論における接続の意味を考へる上参考になる.

証明 ∇^0 を定曲率の接続とし, $\Theta^0 = \Theta_{\nabla^0}$ と可換とし, $\Theta^0 = \kappa 1$, $\kappa \in \wedge^2 \mathcal{M}^*$.

$\nabla \in CC(\Sigma)$ ならば, $\nabla_X - \nabla_X^0 = \mu_X \in E_S$, $X \in \mathcal{M}$. したがって

$$\Theta_{\nabla}(X, Y) - \Theta^0(X, Y) = [\nabla_X^0, \mu_Y] - [\nabla_Y^0, \mu_X] + [\mu_X, \mu_Y] \in E_S$$

ここで, $\hat{\delta}_X(\zeta) = [\nabla_X, \zeta]$, $\zeta \in E$ と可換し, $\hat{\delta}_X$ は E 上の微分作用素である.

しかも, $\hat{\delta}_X(\langle \zeta, \eta \rangle_E) = \langle \nabla_X \zeta, \eta \rangle_E + \langle \zeta, \nabla_X \eta \rangle_E$ と可換し, $\tau_E(\hat{\delta}_X \langle \zeta, \eta \rangle_E) = \tau(\langle \eta, \nabla_X \zeta \rangle_{A^0} + \langle \nabla_X \eta, \zeta \rangle_{A^0}) = \tau(\delta_X \langle \eta, \zeta \rangle_{A^0}) = 0$. ゆえに, $\tau_E \circ \hat{\delta}_X = 0$.

ここで, $\Psi = \Theta_{\nabla} - \Theta^0$ と可換し, $\{\Psi, \Psi\}$ は非正定値であり, しかも

$$\{\Theta_{\nabla}, \Theta_{\nabla}\} = \{\Theta^0, \Theta^0\} + \{\Theta^0, \Psi\} + \{\Psi, \Theta^0\} + \{\Psi, \Psi\}.$$

$\tau_E(\Psi(X, Y)) = 0$ であるから, $\tau_E(\{\Theta^0, \Psi\}) = 0$. ゆえに

$$YM(\nabla) = YM(\nabla^0) - \tau_E(\{\Psi, \Psi\}).$$

となり, YM は ∇^0 で最小値を取ります.

YM が ∇ で最小値を取らば, $\tau_E(\{\Psi, \Psi\}) = 0$. τ_E は忠実だから, $\{\Psi, \Psi\} = 0$. ゆえに $\Psi = 0$ となり, $\Theta_{\nabla} = \Theta^0$.

§3 ハイゼンベルグ加群

この§以降, $A = A_0$, $G = \mathbb{T}^2 (= \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2)$ の場合だけを考える. $e(t) = e^{2\pi i t}$ とする. 交換関係 $U_2 U_1 = e(\theta) U_1 U_2$ をみたす 2つのユニタリ作用素 U_1, U_2 の生成する C^* 環 A_0 である. A 上への G の作用 α を

$$\alpha_{(r,s)}(U_1^m U_2^n) = e(rm + sn) U_1^m U_2^n$$

で与える. q の標準規格直交基底を x_1, x_2 とし, $\delta_j = \delta_{x_j}$ とすれば

$$\delta_k(U_k) = 2\pi i U_k, \quad \delta_k(U_j) = 0 \quad (j \neq k)$$

となる. このとき, A^∞ の元であることと, $\mathbb{Z}^2$ 上の複素数値急減少関数 f を用いて $\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} f(m,n) U_1^m U_2^n$ と表せることは同値である.

以後, エルミート計量をもつ射影的右 A^∞ 加群のうちの, ハイゼンベルグ群の表現空間に成るものを考える.

互に素な整数 p, q の対 $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ または $(p, q) = (0, 1)$ に対して, 射影的右 A^∞ 加群を作ることにする. 2つのユニタリ作用素 $w_1, w_2 \in \mathcal{L}(K)$ ($\dim K < \infty$) を

$$w_2 w_1 = \overline{e(p/q)} w_1 w_2, \quad w_1^q = 1 = w_2^p$$

をみたすものを考える (有限群 $\mathbb{Z}_q$ の交換関係). 例として

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & e^{2\pi i p/q} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{2\pi i p(q-1)/q} \end{pmatrix}.$$

$\varepsilon = (p/q) - \theta$ とする. $\mathbb{R}$ 上の複素数値急減少関数全体 $\mathcal{S}(\mathbb{R}) (\subset$

$L^2(\mathbb{R})$ の上の 2 つの 2-変数作用素 V_1, V_2 を

$$(V_1 \xi)(s) = \xi(s - \varepsilon), \quad (V_2 \xi)(s) = e(s) \xi(s)$$

とすれば, $V_2 V_1 = e(\varepsilon) V_1 V_2$. したがって, $W_j = V_j \otimes w_j$ とすれば, $W_2 W_1 = \overline{e(\theta)} W_1 W_2$ となる. したがって, $\Xi^\infty = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes K = \mathcal{S}(\mathbb{R}, K)$ とおき, その元 $\xi \in \Xi^\infty$ に対して, $U_j \xi = W_j \xi$ により定義すれば, $U_2 U_1 = e(\theta) U_1 U_2$ となる. したがって, Ξ^∞ は右 A^∞ 加群になる. また $\xi, \eta \in \Xi^\infty$ に対し,

$$\langle \xi, \eta \rangle_{A^\infty} = \sum_{m, n} \langle \xi U_1^m U_2^n, \eta \rangle_{L^2(\mathbb{R}, K)} U_1^m U_2^n$$

とすれば, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A^\infty}$ はエルミート計量である. また, Ξ^∞ が射影的であることも, 後に示す, Ξ^∞ が $\text{End}_{A^\infty}(\Xi^\infty) - A^\infty$ 加群であるという事実から導かれる. 今後このように得られた加群をハイゼンベルグ加群といい, 必要があれば p, q の添字を付けて $\Xi_{p,q}^\infty$ と書くこともある.

さて, ハイゼンベルグ群

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ t & s & 1 \end{pmatrix} : r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

の表現 $\{\pi, L^2(\mathbb{R}, K)\}$ を

$$\left(\pi \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ t & s & 1 \end{pmatrix} \right) \xi \right)(u) = e\left(\frac{ru - t}{\varepsilon}\right) \xi(u + s), \quad \xi \in L^2(\mathbb{R}, K)$$

で与える. H の実 Lie 環 $\mathfrak{h}$ の 2 つの元 X

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする. $\mathcal{Q}$ の任意の元 $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ に対して, $\nabla_X = d\pi(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2)$ とすれば, ∇ は $\Xi_{p,q}^\infty$ 上の接続を与えることがわかる. 例えは

$$(\nabla_{X_1} \xi)(s) = \frac{2\pi i s}{\varepsilon} \xi(s), \quad (\nabla_{X_2} \xi)(s) = \frac{d\xi}{ds}(s)$$

と成っている. しかも, $[\nabla_{X_1}, \nabla_{X_2}] = -\frac{2\pi i}{\varepsilon} 1$ かわかるように, $\mathcal{H}_\mathcal{Q}$ は定曲率であり, $\nabla \in MC(\Xi_{p,q}^\infty)$ となる.

モジュラス空間 $MC(\Xi_{p,q}^\infty)/U(E)$ の決定: $E = \text{End}_{\mathcal{H}_\mathcal{Q}}(\Xi_{p,q}^\infty)$ とする.

$MC(\Xi_{p,q}^\infty)$ の任意の元は $\nabla + \mu$ ($\mu_X \in E_s$) と表せる. μ_X は $L^2(\mathbb{R}, K)$ 上の作用素とみても有界であるから, $\nabla_X + \mu_X$ は ∇_X の有界摂動である. そこで, $\nabla + \mu$ を生成元にもつ $\mathcal{H}$ の表現 $\{\rho, L^2(\mathbb{R}, K)\}$ が存在する. この場合の C^∞ ハットルは, 表現 π の場合と同じように, $\mathcal{S}(\mathbb{R}, K)$ になることも確かめられる. π の既約表現の重複度は $\dim K$ であり $\Delta_{X_1} + i\Delta_{X_2}$ の指数と一致している. この値は有界摂動で変わらないから, π と ρ は $\mathbb{C}$ -等価である. つまり

$$\rho(z) = Q \pi(z) Q^*, \quad z \in \mathcal{H}$$

となる $L^2(\mathbb{R}, K)$ 上の $\mathbb{C}$ -等価作用素 Q が存在する. 以下

$$\pi^j(t) = \exp(i\nabla_{X_j}), \quad \rho^j(t) = \exp(t(\nabla_{X_j} + \mu_{X_j})) \quad j=1,2$$

とすれば, $\pi^j(t) = C^j(t) \rho^j(t)$ とする C^∞ $\mathbb{C}$ -等価 $\mathcal{H}$ から C^j が存在する.

C^j の C^∞ 性により, 関数 $t \mapsto \text{Ad}_{\pi^j(t)}(Q) = C^j(t)Q$ は C^∞ である.

また, $\pi(z)Q\xi = \text{Ad}_{\pi(z)}(Q)\pi(x)\xi$, $\xi \in \Xi_{p,q}^\infty$ であるから, $Q\xi \in \Xi_{p,q}^\infty$ でもある.

上の $\mathbb{C}$ -等価同値性から, $\nabla_X + \mu_X = Q\nabla_X Q^*$ とするから, $\mathbb{R}$ 上 $\nabla_X + \mu_X = (W_j Q W_j^*) \nabla_X (W_j Q W_j^*)^*$ も成り立つ. したがって, $Q^* W_j Q W_j^*$ は ∇_X ($X \in \mathcal{Q}$)

と可換である. ゆえに $W_j Q W_j = Q(1 \otimes u_j)$ とする Q は作用素 $u_j \in \mathcal{L}(K)$

が存在する. $Ad_{W_1 W_2}(Q) = Ad_{W_2 W_1}(Q)$ を用いると

$$(u_1 w_1)(u_2 w_2) = e(p/q)(u_2 w_2)(u_1 w_1)$$

が導けるが, $u_j w_j$ を q 乗したものが 1 に成るとは限らない. そこで, K

を q 次元部分空間 $K_1, \dots, K_d$ の直和に分解し, 各々の上で, w_1, w_2 が交換関係の既約表現を与えるようにする. $u_1 w_1, u_2 w_2$ に対しても同じように,

$K = K'_1 \oplus \dots \oplus K'_d$ と既約分解すれば, 各 K'_k 上で $(\bar{\beta}_{jk} u_j w_j)^q = 1$ とする

ような数 $\bar{\beta}_{jk} = e(\varepsilon \sigma_j^k)$ が存在する. 再び, 交換関係の一貫性を用いると,

$v K_k = K'_k$ ($k=1, \dots, d$) かつ各 K'_k 上で $v^*(\bar{\beta}_{jk} u_j w_j)v = w_j$

とある Q は作用素 $v \in \mathcal{L}(K)$ が存在する.

$\bar{Q} = Q(1 \otimes v)$ とすれば, $W_j Q W_j^* = Q(1 \otimes u_j w_j v w_j^*) = \bar{Q}(1 \otimes \beta_j)$ と

なる. ところで, β_j は分解 $K = K_1 \oplus \dots \oplus K_d$ に沿った対角行列で, 対角成分は

$\beta_{j1}, \dots, \beta_{jd}$ を持つものとなる. $L^2(\mathbb{R})$ 上の作用素

$$(M_k \zeta)(s) = e(s \sigma_1^k) \zeta(s), \quad (T_k \zeta)(s) = \zeta(s - \varepsilon \sigma_2^k)$$

を用いて, $L^2(\mathbb{R}, K_k)$ 上の作用素 $N_k = M_k T_k \otimes 1$, $L^2(\mathbb{R}, K)$ 上の作用素

$N = \sum_{k=1}^d \oplus N_k$ とすれば, $W_j N W_j^* = (1 \otimes \beta_j)^* N$ とする. ところで, U

$= \bar{Q} N$ とする.

$$Ad_{W_j}(U) = Ad_{W_j}(\bar{Q}) Ad_{W_j}(N) = \bar{Q}(1 \otimes \beta_j)(1 \otimes \beta_j)^* N = U$$

とあるから, $U \in \mathcal{U}(E)$. ところで, $N^* \nabla_{X_j} N = \nabla_{X_j} + \sigma_{X_j}$ とする. $T = T^{-1}$,

$$\sigma_{X_j} = 2\pi i \begin{pmatrix} \sigma_1^j & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_d^j \end{pmatrix} \quad j=1, 2$$

したがって

$$U(\nabla_{x_j} + \sigma_j)U^* = (UN^*)\nabla_{x_j}(UN^*)^* = \bar{Q}\nabla_{x_j}\bar{Q}^* = \nabla_{x_j} + \mu_j$$

以上を要約すると

命題 3.1 $MC(\Xi_{p,q}^\infty)/U(E)$ の任意元も $\nabla + \sigma$ なる π を Σ に接続を含む.

§ 4 ハイゼンベルグ群のモジュラス空間

命題 3.1 により, $\nabla + \sigma$, $\nabla + \mu$

$$\sigma_{x_j} = 2\pi i \begin{pmatrix} \sigma_j^1 & 0 \\ 0 & \sigma_j^d \end{pmatrix} \quad \mu_{x_j} = 2\pi i \begin{pmatrix} \mu_j^1 & 0 \\ 0 & \mu_j^d \end{pmatrix}$$

なる π をした 2 つの接続が, 互いにゲージ変換で移り得るための条件を調べるには, $MC(\Xi_{p,q}^\infty)/U(E)$ の π がわかる. そのためには $\Xi_{p,q}^\infty = (\Xi^\infty)^d$, $\Xi^\infty = \mathcal{S}(\mathbb{R}, K)$ ($\dim K = q$) とおいて, Ξ^∞ について詳細に検討する. この場合には, $B = \text{End}_{A^\infty}(\Xi^\infty)$ とおけば, $E = \text{End}_{A^\infty}(\Xi_{p,q}^\infty) = M_d(B)$.

Ξ^∞ は $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_q)$ と表せるので, 加法群 $G = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_q$ とその 2 つの部分群 $H = \{n(\varepsilon, [p]) : n \in \mathbb{Z}\}$, $K = \{n(\nu_q, [1]) : n \in \mathbb{Z}\}$ を用いて解析する. これらを用いると, 2 つの同相写像

$$(t, [a]) \in G/K \mapsto t - \frac{ak}{q} \in \mathbb{T} (= \mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

$$(t, [a]) \in G/H \mapsto \frac{1}{q} \left(\frac{t}{\varepsilon} - a\alpha \right) \in \mathbb{T}$$

が与えられる. $\mathbb{T} = \mathbb{T}^{-1}$, a は $ap - aq = 1$ を満たす整数 a, p, q を固定する. したがって, $\mathcal{U}^*(H, G/K)$ は $\mathcal{S}(G) (\subset L^2(G))$ の右側から

$$(\{U_1\})(t, [u]) = \xi(t - \varepsilon, [u - p]), \quad (\{U_2\})(t, [u]) = e(t - \frac{p}{\varepsilon}) \xi(t, [u])$$

により作用し, $C^*(K, G/H)$ 上の左側作用

$$(Z_1 \xi)(t, [u]) = \xi(t - \frac{1}{\varepsilon}, [u - 1]), \quad (Z_2 \xi)(t, [u]) = e(\frac{1}{\varepsilon}(\frac{p}{\varepsilon} - u)) \xi(t, [u])$$

により作用している. $U_2 U_1 = e(\theta) U_1 U_2$, $Z_2 Z_1 = e(\theta') Z_1 Z_2$ である. $\Gamma = \Gamma'$

で, $\theta' = (2\theta - \varepsilon)/(\varepsilon\theta - p)$. かつ $Z_1 =$, $C^*(H, G/K) \cong A_\theta$, $C^*(K, G/H) \cong A_{\theta'}$

である. Π^2 の $C^*(K, G/H)$ への作用 $\alpha' \in \text{Ad}_{\pi(x)}$ を用いて

$$\alpha'_{(r,s)}(Z_1^m Z_2^n) = e\left(\frac{r^m + s^n}{\varepsilon}\right) Z_1^m Z_2^n$$

とすれば, $B = \text{End}_{A_0}(\Xi^\infty)$ は π 因子系 $(A_{\theta'}, \Pi^2, \alpha')$ の C^* 横断切断全体

と一致し, その元は $(\alpha'_{m,n}) \in \Delta(\mathbb{Z}^n)$ により, $\sum \alpha'_{m,n} Z_1^m Z_2^n$ と表される.

α' の非退化性

$$[\nabla_{x_j}, Z_k] = \gamma \delta_{jk} Z_k, \quad \gamma = \frac{2\pi i}{\varepsilon}$$

となる.

さて, このとき $\Xi_{p,\varepsilon}^\infty = (\Xi^\infty)^d$, $E = M_d(B)$ の $\mathbb{C}$ 横断切断 $\nabla + \sigma$, $\nabla + \mu$ を

考える. ユーニタリ変換 $U \in U(E)$ により, $U(\nabla + \sigma)U^* = \nabla + \mu$ とする.

U の $d \times d$ 行列表示 (U_{jk}) を用いて, $\nabla U - U \nabla = U \sigma - \mu U$ を展開すると,

$U_{jk} \neq 0$ ならば, $\sigma_j^k - \mu_j^k \in \varepsilon \mathbb{Z}$ ($j=1, 2$) となることを示す. ここで

より, U は可逆であるから, $1, \dots, d$ の置換 ρ を適当に選べば,

$U_{1,\rho(1)} \neq 0, \dots, U_{d,\rho(d)} \neq 0$ となるから, この $\mathbb{C}$ 横断切断は

$$\sigma_j^j - \mu_j^{\rho(j)} \in \varepsilon \mathbb{Z}, \quad \dots, \quad \sigma_j^j - \mu_j^{\rho(j)} \in \varepsilon \mathbb{Z} \quad (j=1, 2)$$

となる. このとき, $\mathbb{R}/\varepsilon \mathbb{Z}$ と Π の同相性から ε は正数と選べば, 次の

定理が得られる

定理 4.1 $p, q (q > 0)$ は互に素な整数, π は $(p, q) = (0, 1)$ の $p/q \neq 0$ とする. $\Sigma_{p,q}^\infty$ がハイゼンベルグ加群ならば,

$$MC(\Sigma_{p,q}^\infty) \cong (\mathbb{T}^2)^d / \Sigma_d$$

ただし, Σ_d は d 個の座標の置換群であり, d は $\Sigma_{p,q}^\infty$ をさらに小さな射影的右 A_0^∞ 加群に直和分解したときの個数である.

§ 5 一般の射影的 A_0^∞ 加群のモジュラス空間

ここでは, 一般の射影的右 A_0^∞ 加群のモジュラス空間を前 § 4 のハイゼンベルグ加群の結果へ帰着させることを試みる.

$A = A_0$, $\delta = d\alpha$ は $\nabla \alpha = 0$, Ω はエルミート計量, ∇_{A_0} は射影的右 A_0^∞ 加群, $\nabla \in MC(\Omega, \delta)$, $B = \text{End}_{A_0}(\Omega)$, $\hat{\delta}_x(\phi) = [\nabla_x, \phi]$ ($x \in \mathcal{G}$, $\phi \in B$) とする.

Σ が射影的右 B 加群ならば, $\Sigma \otimes_B \Omega$ は射影的 A_0^∞ 加群である.

このとき

(i) ∇' が (Σ, δ) 上の接続ならば, $\nabla'' = \nabla' \otimes 1_\Omega + 1_\Sigma \otimes \nabla$ は $(\Sigma \otimes_B \Omega, \delta)$ 上の接続である.

(ii) $\nabla, \nabla', \nabla''$ の曲率をそれぞれ $\Theta, \Theta', \Theta''$ と可なり, $\Theta''(X, Y) = \Theta'(X, Y) \otimes 1_\Omega + 1_\Sigma \otimes \Theta(X, Y)$, $X, Y \in \mathcal{G}$.

(iii) ∇' が定曲率をもてば, ∇'' も定曲率をもつ.

(iv) ∇' が可換ならば, ∇'' も可換である.

以下が成り立つ. ただし, (iv) については, Σ のエルミート計量 $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ に対し,

$\Xi \otimes_B \Omega$ のエルミート計量を $\langle \xi \otimes \omega, \xi' \otimes \omega' \rangle_{\Lambda_0} = \langle \omega, \langle \xi' | \omega \rangle_B \omega' \rangle_{\Lambda_0}$ と考へる.

とくに, Ω のエルミート計量の恒域の線形包が A_0^* と一致しているとき, Ω は *full* であるという. この場合には, Ω が $B \cdot A_0^*$ の右乗にあることはなく, A_0^* と B は森田同値にある. この上で

$$\check{D}_x \xi = (D_x \xi)^{\sim}, \quad x \in \mathcal{Y}, \quad \xi \in \Omega$$

と可成は, $\check{D}$ は $\check{\Omega}$ 上の接続にある. 仮定により, $\check{D} \in MC(\check{\Omega}, \check{J})$ があるから

$$(v) \quad \check{D} \in MC(\check{\Omega}, \check{J})$$

でもある. さらに, A^* は $\check{\Omega} \otimes_B \Omega$ と, B は $\Omega \otimes_{A_0^*} \check{\Omega}$ と同一視できるのて, $D, \check{D}$ がエルミート計量と両立する条件は

$$(vi) \quad A^* = \check{\Omega} \otimes_{A_0^*} \Omega \text{ 上で, } \check{\sigma}_x = \check{D}_x \otimes 1_{\Omega} + 1_{\check{\Omega}} \otimes D$$

$$B = \Omega \otimes_{A_0^*} \check{\Omega} \text{ 上で, } \check{\sigma}_x = D_x \otimes 1_{\check{\Omega}} + 1_{\Omega} \otimes \check{D}_x$$

と表せる.

命題 5.1 $A, \mathcal{S}, \Omega, D, B, \check{\mathcal{S}}$ を上と同じとし, Ξ とエルミート計量 $\langle \xi, \eta \rangle$ を射影的右 B 加群とする. Ω が *full* ならば

(i) 写像

$$D' \in MC(\Xi, \check{J}) \mapsto D' \otimes 1_{\Omega} + 1_{\Xi} \otimes D \in MC(\Xi \otimes_B \Omega, \check{J})$$

$$T \in \text{End}_B(\Xi) \mapsto T \otimes 1_{\Omega} \in \text{End}_{A_0^*}(\Xi \otimes_B \Omega)$$

はともに全単射である.

(ii) この全単射により, Ξ と $\Xi \otimes_B \Omega$ のヒルベルト空間を同一視できることになっている.

この証明は $\Xi \otimes_B \Omega \otimes_A \tilde{\Omega} = \Xi$, $(\Xi \otimes_B \Omega) \otimes_A \Omega \otimes_B \tilde{\Omega} = \Xi \otimes_B \Omega$ 及び
 の事実を用いて達成される.

命題 5.2 θ は任意の実数とする. Λ が射影的右 A_θ^∞ 加群ならば,

$$\Lambda \cong (\Xi^\infty)^\theta \otimes_{A_\theta^\infty} \Omega$$

とあるような射影的右 A_θ^∞ 加群 Ω と ハイゼンベルグ右 A_θ^∞ 加群 Ξ^∞
 が次の条件を満たすように存在する.

- (i) Ω は full である.
- (ii) $\text{End}_{A_\theta^\infty}(\Omega)$ を完備化して得る C^* 環は A_θ である.
- (iii) 連続 $\nabla \in \text{MC}(\Omega)$ を適当に選べば, 以下が与えられる A_θ^∞ 上の
 微分 $\hat{\delta}_x(v) = [\nabla_x, v]$ と A_θ 上の $\mathbb{C}^2$ の自然な作用 α' の微分 $\delta' =$
 $\alpha\alpha'$ とは定数倍しか違わない.

(iv) $\Xi^\infty \otimes_{A_\theta^\infty} \Omega$ に他の射影的右 A_θ^∞ 加群を直和因子として持たない.

証明 $K_0(A_\theta)$ の正元性を考えることにより, 予め Λ は他の射影的右
 A_θ^∞ 加群を直和因子として持たないものと仮定できる (今この議論
 は $\theta=1$ の場合). そこで, 次の3つの場合に分けて考える.

a) $\theta \neq 0$ の Λ が自由でない場合. この場合には, Λ がハ
 イゼンベルグ加群 Ξ^∞ と同型であることが知られている. したがって,
 $\Xi^\infty = \Lambda$, $A_\theta = A_\theta$, $\Omega = A_\theta^\infty$ とすればよい.

b) θ が任意で, Λ が自由な場合. $\Lambda = A_\theta$ である. この場合
 には適当な θ' と ハイゼンベルグ右 $A_{\theta'}^\infty$ 加群 Ξ^∞ を見えて

$$A_\theta^\infty = \text{End}_{A_{\theta'}^\infty}(\Xi^\infty)$$

とすることからできる。いま, π^2 の A_0 への作用を d' , その微分を $\delta' = dd'$, Ξ^∞ 上の接続を ∇ とする ($\nabla_x(\xi) = (D_x \xi) + \xi \delta'_x(\omega)$, $\xi \in A_0^\infty$). このとき, $\hat{\delta}'_x(a) = [\nabla_x, a]$, $a \in A_0^\infty$ は A_0 上の元の微分分子 δ'_x と定数倍しか違わないから, Ξ^∞ 上の接続 $\tilde{\nabla}$ は $MC(\Xi^\infty)$ の元である。したがって, $\Omega = \Xi^\infty$ とすれば, $\hat{\delta}'_x(\omega) = [\tilde{\nabla}_x, \omega]$, $\omega \in A_0^\infty$ と δ'_x とは定数倍しか違わない, $\Lambda = A_0^\infty = \Xi^\infty \otimes_{A_0^\infty} \Omega$ となる。

c) $\theta \in \mathbb{Q}$ で Λ が自由でない場合。まず, 射影的右 C 加群は自由であるか, についてはハイゼンベルグのいふことがいえる。すなわち $C = C(\mathbb{T})$.

$A_0 = C$ のときは, $\theta \neq 0$ の場合と同様にすればよい。

$A_0 \neq C$ ならば, $A_0^\infty \cong \text{End}_C(\Omega')$ となるような右 C 加群 Ω' が存在する。したがって, $\Omega = (\Omega')^\sim$ とすれば, Ω は full である。そこで $\Xi^\infty = \Lambda \otimes_{A_0^\infty} \Omega'$ とすれば,

$$\Lambda \cong (\Lambda \otimes_{A_0^\infty} \Omega') \otimes_C \Omega = \Xi^\infty \otimes_C \Omega.$$

Ξ^∞ は射影的右 C 加群であるから, 自由でないければ, ハイゼンベルグ加群がある。もし Ξ^∞ が自由ならば, Λ が他の射影的右 A_0^∞ 加群を直和因子として持たないという性質から, $\Xi^\infty = C$, つまり $\Lambda \cong \Omega$ になる。したがって, c) の場合と同様に, $C \cong \text{End}_{A_0^\infty}(\Xi)$ となるようなハイゼンベルグ右 A_0^∞ 加群 Ξ が存在する。ゆえに

$$\Lambda \cong \Xi \otimes_{A_0^\infty} (\Xi \otimes_C \Omega)$$

ここに改め, $\Xi \otimes_C \Omega$ を $\tilde{\Omega}$ とすればよい。

以上の命題を合わせると直ちに次の定理が得られる。

定理 5.3 Λ を射影的右 A_0^∞ 加群で, 1 個の射影的右 A_0^∞ 加群と直和因子にもたないものとする. Λ^d にエルミート計量を与ければ,

$$MC(\Lambda^d) \cong (\mathbb{T}^2)^d / \Sigma_d.$$

これより, 任意の射影的右 A_0^∞ 加群のモジュラス空間が適当な d により, $(\mathbb{T}^2)^d / \Sigma_d$ と同相になることがわかる.

§6 $Aut(A_0^\infty)$ について

ここでは, §§4, 5 において明らかに成り, 射影的右 A_0^∞ 加群 Λ の解空間 $MC(\Lambda)$ の構造を用いて, A_0^∞ の自己同型群の構造を決定する.

$K_1(A_0) \cong \mathbb{Z}^2$ であるから, $Aut(A_0)$ から $GL(2, \mathbb{Z})$ への準同型写像がある. $(n_{jk}) \in SL(2, \mathbb{Z})$ に対し

$$\beta : U_j \mapsto e\left(\frac{n_{11}n_{22}}{2}\right) U_1^{n_{1j}} U_2^{n_{2j}} \quad (j=1, 2)$$

とすれば, β は A_0 の自己同型写像であるだけでなく, $SL(2, \mathbb{Z})$ の A_0 上への作用に成り立っている. 従って, $Aut(A_0)$ から $GL(2, \mathbb{Z})$ への準同型写像の像は $SL(2, \mathbb{Z})$ を含むことがわかる [Brunken, 錦谷]. 実はこの像が $SL(2, \mathbb{Z})$ と一致するのではないかと予想されているが未解決である. $K_1(A_0) = K_1(A_0^\infty)$ であるから, 同様な問題が A_0^∞ に対しても考えられる. ここではその部分的解決を示す.

§3 及び §2: $\mathbb{T}^2$ の作用 α とこの β とを合わせたものは半直積 $\mathbb{T}^2 \rtimes SL(2, \mathbb{Z})$ の A_0^∞ 上への作用を与えていることに注意する.

定義 6.1. 無理数 θ に対し, $|1 - e(n\theta)|^{-1}$ は n の関数として多項式の早さの増大度をもつとき, θ は Diophantine 条件を満たすまたは generic であるという.

定理 6.2 θ が generic ならば

$$\text{Aut}(A_\theta^\infty) \cong \text{PU}_0(A_\theta^\infty) \rtimes (\mathbb{T} \rtimes \text{SL}(2, \mathbb{Z}))$$

ただし, $\text{U}_0(A_\theta^\infty)$ は $\text{U}(A_\theta^\infty)$ の主連結成分で, $\text{PU}_0(A_\theta^\infty) = \text{U}_0(A_\theta^\infty) / \{e^{i\lambda} 1 : \lambda \in \mathbb{T}\}$ である.

補題 6.3 $h_j \in A_\theta^\infty$ は至随伴, $\tau(h_j) = 0$ かつ $\delta_1 + \text{ad}_{h_1}$ と $\delta_2 + \text{ad}_{h_2}$ が可換であるならば, $h_j = u^* \delta_j(u)$ $j = 1, 2$ ともに $u \in \text{U}_0(A_\theta^\infty)$ が存在する. (定数倍を除く一意に定まる)

この補題の $h_j = u^* \delta_j u$ かつ直ちに, $\text{Ad}_{u^*}(\delta_j + \text{ad}_{h_j}) = \delta_j \circ \text{Ad}_u$ であることがわかる.

証明 自由な A_θ^∞ 加群 $\Lambda = A_\theta^\infty$ 上の接続と見做すグラスマン接続 $\nabla_x = \partial_x$ を取す. ∇ の曲率は 0 である. $\nabla'_x = \nabla_x + h_j$ とすれば, ∇' も Λ 上の接続であるが, $\delta_1 + \text{ad}_{h_1}$ と $\delta_2 + \text{ad}_{h_2}$ の可換性を使うと, その曲率も 0 である. ゆえに, $\nabla, \nabla' \in \text{MC}(\Lambda)$. 命題 5.2 の証明の (6) を用いると, ∇, ∇' は適当なハイゼンベルグ加群の MC の元と見做すことができる. したがって, 命題 3.1 により, 適当なゲージ変換 $v_j \in \text{U}(\Lambda)$ を用いて

$$v_1 \nabla_x v_1^* = \nabla_x + \sigma_1, \quad v_2 \nabla'_x v_2 = \nabla'_x + \sigma_2$$

と表せる. したがって, $v = v_1^* v_2$ は $\nabla'_x - v^* \nabla_x v = \sigma_2 - \sigma_1$ と等しく, ハイゼンベルグ群は直和因子を許した $\mathfrak{h}(F)$ に送られるので, $\sigma_2 - \sigma_1 \in \mathbb{C}1$.

したがって, $U^* \nabla_X U = \nabla_X + U^* \delta_X(U)$ とすると $\tau(\delta_j(U)) = \dot{u}_j - U^* \delta_j(U)$
 $= \nabla_{X_j}' - (\nabla_{X_j} + U^* \delta_{X_j}(U)) \in \mathbb{C}1$ とする.

さて, $z \in \mathbb{C}^2$ に対して $v \in U(A_0^\infty)$ かつ $K_1(A_0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ に $\bar{u}(v)$ が $(-n_1, -n_2)$ に対応する, $w = U_1^{n_1} U_2^{n_2}$ を用いて $u = wv$ が $(0, 0)$ に対応する.
 したがって, $u \in U_0(A_0^\infty)$ とすると $\tau(u^* \delta_j(u)) = 0$. $w^* \delta_j(w) \in \mathbb{C}1$ であるから,
 $u^* \delta_j(u) = w^* \delta_j(w) + v^* \delta_j(v)$. ゆえに, $\dot{u}_j - u^* \delta_j(u) = \dot{u}_j - v^* \delta_j(v) - w^* \delta_j(w) \in \mathbb{C}1$. したがって, $\tau(\dot{u}_j) = 0$ であるから, $\dot{u}_j = u^* \delta_j(u)$.

$\dot{u}_j = (U')^* \delta_j(U')$ であるから u' の π_0 成分 $u u'^*$ は $(u u'^*)^* \delta_j(u u'^*) = 0$.
 ゆえに $\delta_j(u u'^*) = 0$. ゆえに $u u'^* \in (A_0^\infty)^\times = \mathbb{C}1$.

定理の証明 自然な準同型写像 $\text{Aut}(A_0^\infty) \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ の像が $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ に包含されることは [J. Cuntz, G.A. Elliott, F.M. Goodman, P.E.T. Jorgensen: On the classification of non commutative tori II, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 7 (1985), 189-194] に示されている。
 したがって, π の核が $\text{PU}_0(A_0^\infty) \rtimes \mathbb{H}^2$ と同型になることを示せばよい。
 $\mathbb{H}^2$ が A_0^∞ 上の作用 α の内部的な部分は $\text{Ad}_{U_1^m U_2^n}$, $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ と書ける。
 したがって, $\{d_{(r,s)} : (r,s) \in \mathbb{H}^2\}$ と $\{Ad_u : u \in U_0(A_0^\infty)\}$ との共通部分は恒等写像しかない。

$K_1(A_0^\infty)$ は不変になる $\text{Aut}(A_0^\infty)$ の元 γ とする。 $\gamma^* \circ \delta_j \circ \gamma$ ($j=1, 2$) は互いに可換な微分である。 θ は Diophantine 条件を満たすから,
 $\gamma^* \circ \delta_j \circ \gamma = \delta_j' + \text{ad}_{\dot{u}_j}$ と書ける。 $\tau = \tau^{-1}$, δ_j' は δ_1 と δ_2 の実一次結

