

4次元ユークリッド空間内の特殊な ホモロジー3-球面についての考察

東大 理 永 瀬 輝男

§ 0. 序

我々は、次の様な、 R^4 に PL-embed された closed oriented 3-manifold M を考える:

- i) $M^3 \subset R^3 \times [0, 3]$
- ii) M^3 は *surgeries* の trace
- iii) index i の critical handles は i -level 上にある。

上の様な M^3 が、 R^4 内の homology 3-sphere である為の必要条件を調べたい。さらに、ある特別な、 R^4 内の 3-sphere が 4-ball を bound することを示す。

この論文を書くにあたって、本間龍雄教授、田村一郎教授、加藤十吉教授のいろいろな御指導を感謝します。

§1. 定義と記号

我々は P.L. category を用いる。特に断らない限り, manifold M によって, R^4 内の closed oriented connected triangulated 3-manifold を表わす。また一般に, その triangulation をも M で表わす。

R^n は, n 次元ユークリッド空間で, $R^n = R^{n-1} \times R$ と見て, 最後の座標を R^n の level と呼ぶことにする。

$$[a, b] = \{ x \in R^1 \mid a \leq x \leq b \}$$

$$(a, b) = \{ x \in R^1 \mid a < x < b \}$$

その他, $(a, b]$, $[a, b)$ 等も一般の通りとする。

$(\dots)$ の closure, interior, boundary を, $\bar{(\dots)}$, $^\circ(\dots)$, $\partial(\dots)$ で表わすことにする。また, closure 作用は, 常に最大の空間で作用するものとする。

manifold M に対して,

$$M(a) = M \cap R^3 \times a$$

$$M[a, b] = M \cap R^3 \times [a, b]$$

その他, $M(a, b)$, $M(a, b]$, $M[a, b)$ 等も同様とする。

I によって, unit interval を表わす。また, $I^n = I^{n-1} \times I$ と見る。

$c = 0, 1, 2, 3$ に対して, $H(c) = I^{3-c} \times I^c$, $D_1 H(c) = \partial I^{3-c} \times I^c$, $D_2 H(c) = I^{3-c} \times \partial I^c$ とする。

M を次の様な manifold とする:

0) $M \subset \mathbb{R}^3 \times [0, 3]$

- 1) 点列 $-1 = a_{-1} < 0 = a_0 < a_1 < \dots < a_k = 3 < a_{k+1} = 4$
 が存在して, $[0, 3] - a_0 - a_1 - \dots - a_k$ 内の任意の点,
 t に対して, $M(t)$ は, 2-manifold である。

- 2) $i = 0, 1, \dots, k-1$ に対して,

$$M(a_i, a_{i+1}) \stackrel{L}{=} M\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) \times [a_i, a_{i+1}]$$

但し $\stackrel{L}{=}$ は, level preserving homeomorphic
 を表わす。

- 3) 次の様な map $f_i: \bigcup_{j=1}^{n_i} H(C_{ij}) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times a_i$ が存在
 する:

★ f_i は embedding

$$\star f_i\left(\bigcup_j H(C_{ij})\right) \cap M(a_{i-1}, a_i) = f_i\left(\bigcup_j D_2 H(C_{ij})\right)$$

但し $i = 0, 1, \dots, k$

4) $M(a_i, a_{i+1}) \cap \mathbb{R}^3 \times a_i$

$$\cong \{M(a_{i-1}, a_i) \cap \mathbb{R}^3 \times a_i - f_i\left(\bigcup_j H(C_{ij})\right)\}$$

$$\cup f_i\left(\bigcup_j D_1 H(C_{ij})\right)$$

但し, $\cong$ は homeomorphic を表わす。

また, 本間龍雄教授の lecture note によって, $\mathbb{R}^4$ 内の closed
 3-manifold は全て, 上の条件 0) ~ 4) を満すように $\mathbb{R}^4$ の ambient
 isotopy で動かせることが知られているので, 特別な条件では

ない。このとき, M を $\text{surgeries } \{H(C_{ij})\}_{i,j}$ の trace と呼ぶことにする。このとき, $f_i(H(C_{ij}))$ を a_i level 上の index C_{ij} の critical handle といい, また $H(C_{ij})$ で表わすことにする。特に, $C_{ij} = 1$ (or 2) の時 $f_i(I^1 \times \frac{1}{2})$ (or $f_i(\frac{1}{2} \times I^2)$) を critical disk という。

また, ${}^{-}M(a_i, a_i) \cap R^3 \times a_i = F_i$ は $R^3 \times a_i$ 上の closed 2-manifold で, $R^3 \times a_i - F_i$ はいくつかの domains に分かれるが, unbounded な domain を外部と名づけ, それをもとにして, 隣りの domain を内部と呼び, さらに, その隣りの domain を外部と呼ぶようにして, 各 domain を内部と外部に分ける。ここで, 2つの領域が隣り合うとは, 各 closure が交わることをとする。

もし $H(C_{ij})$ が F_i の内部 (or 外部) の closure に含まれる時, $H(C_{ij})$ を内部 (or 外部) の critical handle ということにする。 $N(M) = M$ の critical handles の数, とする。

注意) 2) に於て, $\equiv$ は次のことを示す:

Covering isotopy theorem

$F: M \times I \longrightarrow Q \times I$ が $\text{locally unknotted isotopy}$ で, ∂M を fix してゐるならば, F は ∂Q を fix した ambient isotopy で cover される。

一方, $(3, 2)$ -Shoenflies theorem が正しいから, ${}^{-}M(a_i, a_{i+1})$ は ${}^{-}M(a_i, a_{i+1}) \cap R^3 \times a_i$ と ${}^{-}M(a_i, a_{i+1}) \cap R^3 \times a_{i+1}$ との間の

locally unknotted isotopy と見なせる。よって, covering isotopy theorem から次の様な map $h: R^3 \times [a_i, a_{i+1}] \xrightarrow{\cong} R^3 \times [a_i, a_{i+1}]$ が存在する。

$$h(M(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}) \times [a_i, a_{i+1}]; M(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}) \times [a_i, a_{i+1}]) \xrightarrow{\cong} -M(a_i, a_{i+1})$$

M を上の様な manifold とし, H を critical handle とする。
次の様な level-preserving embedding $h: I^3 \times [a, b] \rightarrow R^4$ が存在するとある。

$$\star h(I^3 \times a) = H \quad (\text{or } h(I^3 \times b) = H)$$

$$\star h(I^3 \times [a, b]) \cap M = H \cup h(h^{-1}(D_1 H) \times [a, b])$$

$$(\text{or } h(I^3 \times [a, b]) \cap M = H \cup h(h^{-1}(D_2 H) \times [a, b]))$$

このとき M は $-(M - h(I^3 \times [a, b])) \cup (h(\partial(I^3 \times [a, b]))) - M)$
 $= M'$ に R^4 で ambient isotopic である。この manifold M' を map h のもとで, H の level を a から b (or b から a) に change する ことにより M から得られたという。また簡単に H の level を a から b (or b から a) に change するという。このとき単に change される position (上の場合は $h(I^3 \times b)$) を示すときは, change の代りに "move" という言葉を用いる ことにする。即ち move は仮想的な change である。

M を上の様な manifold とし, $H(c)$ を critical handle とする。 $c = 1$ (or 2) のとき, h を $I^{3-1} \times 0$ (or $0 \times I^2$) 内の

proper simple arc で", 次の様な level-preserving embedding

$h: I^3 \times [a, b] \rightarrow R^4$ が存在するとする。

$$1) \quad h(I^3 \times a) \cap M = (\text{a regular neighbourhood } D \text{ of } h \text{ in } I^{3-1} \times 0) \times I$$

$$(\text{or } h(I^3 \times a) \cap M = (\text{a regular neighbourhood } D \text{ of } h \text{ in } 0 \times I^2) \times I)$$

$$2) \quad h(I^3 \times (a, b]) \cap M \cong (D \cap \partial I^{3-1}) \times I \times (a, b]$$

$$(\text{or } h(I^3 \times [a, b)) \cap M \cong I \times (D \cap \partial I^2) \times [a, b))$$

$$\text{このとき, } M \text{ は } (M - h(I^3 \times [a, b])) \cup h(\partial(I^3 \times [a, b]))$$

$-M) = M'$ に R^4 で "ambient isotopic" である。この manifold

M' を R によって $H(C)$ を up (or down)-splitting をして得ら

れた manifold という。また簡単に R によって $H(C)$ を

up (or down)-splitting するという。(see Fig-1)

§ 2. いくつかの命題と定義

命題 1. M を次の様な manifold とする。

$$1) \quad M \subset R^3 \times [0, 3]$$

2) M は surgeries の trace

3) index C の critical handles は C -level 上にある。

このとき, 次の様な manifold M' が存在する。

a) M' は 1) 2) 3) を満たす。

- b) M' は M に $\mathbb{R}^4$ で *ambient isotopic*
- c) *index 1* と *2* の同じ側の *critical disks* を *1.5-level* に *move* したとき, 各 *critical disks* は互いに高々一点でしか交わらず, 他の *critical disks* とは高々 3 つとしか交わらない。

(証明)

我々は, *inside* の *critical handle* の場合のみを証明する。*outside* の場合もまったく同様である。

初めに, *index 1* と *2* の *critical disks* の任意の *move* をとる。このとき, *index 1* の *critical disks* の *move* をうまくとれば, 同じ側の *critical disks* 同士の *intersection* は *points* にできる。また, 異なる側同士は *proper simple arcs* でなれるようにできる。ここで, *proper* とは, 各 *critical disks* に対するの意味である。

次に, 内部の *index 2* の *critical handle* を次の様に *split* する (see Fig-2): D をその *critical handle* の *critical disk* とする。 $p, p_2, \dots, p_n$ を D と *inside* の *index 1* の *critical disks* との *intersection* とする。 K を D と *outside critical disks* との *intersection* とする。(実は, K は D と *outside* の *index 1* の *critical disks* との *intersection* である。) ここで, D の *proper arc* の

set $\{k_i\}$ を次の様にとる:

- 1) $k_i \cap k_j = \emptyset$ ($i \neq j$)
- 2) $k_i \cap K = \emptyset$
- 3) $k_i \cap \{p_j\} = \emptyset$
- 4) $D - \bigcup k_i$ の *connected component* は高々 1 つの $\{p_j\}$ の点を含む。
- 5) $D - \bigcup k_i$ の *connected component の closure* は $\{k_i\} \cup \{p_j\}$ の *elements* を高々 3 つしか含まない。

そこで, D を $\bigcup k_i$ によって *down-split* する。これを各 *index 2* の *critical handle* にほどこすと, 各 *critical disks* は互いに高々一点でしか交わらず, *index 2* の *critical disk* は, 高々 3 つの *index 1* の *critical disk* としか交わらない。しかし *index 1* の *critical disks* に関しては, この限りではない。しかし, *index 1* に対しても, 同いように *up-split* をほどこせばよい。

(証 終)

上の様な性質をもつ *manifold* M を, *property E* をもつ, という。

命題 2. M を *critical handles* が 2 つの *manifold* とする。すると, M は 4-ball を *bound* する。

(証明)

定義から明らかである。

命題3. M が property Eを持てば, property Eを保存しつつ, index 0と3の critical handlesは各々1つにできる。

(証明)

M_0 はいくつかの 3-ballsから成り, M_1 は 2-spheresとそれらをつなぐ 3-balls (すなわち outside の index 1 の critical handles)とから成る。そこで, 異なる spheres にまたがる critical handle を1つとってその level を0に change すれば, M_0 は1つ減いた 3-ballsからなる。一方 index 2の critical handles は $-M_{[0,2)}$ の connected components をつなぎ得ないから, 上の操作は, M_0 がただ1つの 3-ball になるまで続けることができる。index 3についても同様にできる。(証明終)

命題4. manifold M の index 1と2の critical handles が同じ側にあるならば, M は 4-ball を bound する。

(証明)

outside の場合を考えれば十分である。初めに, index 1の critical handles を 0-level に change する。すると, M_0 は solid torus である。

次に index 2 の critical handles を 0-level に change する。すると, M_0 は genus 0 の 3-manifold である。但し, ∂M_0 は $R^3 \times 0$ 内の closed 2-manifold であるので, genus は ∂M_0 の genus で定まる。

すると, (3,2)-Schönflies theorem から, M_0 は 3-ball である。したがって 命題 2 から証明される。

(証明終)

§ 3. Cancellation Theorem

定理 1. M を property E をもつ manifold で, $H(1)$ と $H(2)$ を同じ側の critical handle とする。もしこの 2 つの critical handles の 1.5-level への move で, 2 つの critical disks が一点のみで交わるようなものがあるならば, 次の様な manifold M' が存在する。

- 1) M' は M に R^4 で ambient isotopic
- 2) $N(M) - N(M') = 2$

(証明)

outside の場合のみ証明すれば十分である。

さて, 仮定から, 次の様な $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$ と level-preserving embeddings $h_1': I^2 \times I \times [1, 1+2\varepsilon] \rightarrow R^4$ と h_2'

$h_2': I \times I^2 \times [1+\varepsilon, 2] \rightarrow R^4$ が存在する。

- i) $h_1'(I^{3-\varepsilon} \times I^\varepsilon \times \varepsilon) = H(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad & h'_1(I^2 \times I \times [1+\varepsilon, 1+2\varepsilon]) \cap h'_2(I \times I^2 \times [1+\varepsilon, 1+2\varepsilon]) \\
 &= h'_i(h'^{-1}_i(h'_i(I^{3-i} \times I^i \times (1+\varepsilon)) \cap h'_j(I^{3-j} \times I^j \\
 &\quad \times (1+\varepsilon))) \times [1+\varepsilon, 1+2\varepsilon]) =: z'', \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2.
 \end{aligned}$$

次に $H(2)$ を $1+\varepsilon$ -level に change する。 M_1 を change によつて得られた manifold とする。すると、次の様な level preserving embedding $h: I^3 \times [1+\varepsilon, 1+2\varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^4$ が存在する。

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad & h(I^3 \times [1+\varepsilon, 1+2\varepsilon]) \cap M_1 \\
 &= h(I^2 \times I \times (1+\varepsilon) \cup (I \times I \times 0 \cup \partial I \times I \times I) \\
 &\quad \times [1+\varepsilon, 1+2\varepsilon])
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad & h(I^3 \times [1+\varepsilon, 1+2\varepsilon]) \cap \bar{M}_1 [0, 1+\varepsilon) \\
 &= h((I \times I \times 1 \cup I \times \partial I \times I) \times (1+\varepsilon))。
 \end{aligned}$$

$z = z''$, c を $I^3 \times [1+\varepsilon, 1+2\varepsilon]$ の内点とする。 $D_1 = I \times I \times 0 \cup \partial I \times I \times I$, $D_2 = I \times I \times 1 \cup I \times \partial I \times I$ とする。

$M' = (M_1 - h(I^3 \times [1+\varepsilon, 1+2\varepsilon]) \cup h(c \circ K))$ とすればよい。
 $z = z''$, $K = D_1 \times (1+\varepsilon) \cup \partial D_1 \times [1+\varepsilon, 1+2\varepsilon] \cup D_2 \times (1+2\varepsilon)$ 。

(see Fig-3)

(証明終)

上の定理の manifold M' を $H(1)$ と $H(2)$ を cancel して得られた manifold という。また単に, $H(1)$ と $H(2)$ を cancel するという。

注意) 上の M' は, 一般には, property E を持たない。レ

かし, §0 で言っている i) ii) iii) は満たしている。

§4. 定義

M を property E を持つ manifold とする。このとき *inside* (or *outside*) の *critical handles* を 1.5-level に *change* する ことが出来る。 T を次の様な *inside* (or *outside*) の *critical handles* の union $\sqcup$ の *strong deformation* とする。(see Fig-4)

初めに, *index 2* の *critical handles* を *critical disks* に *strong deformation* する。 $\sqcup'$ をその結果とする。 $\{D_i\}$ を *index 1* の *critical disks* とする。各 i に対して $\{P_{i1} \dots P_{in_i}\}$ を D_i と *index 2* の *critical handles* との *intersection* とする。 P_i を *critical disk* D_i の中心とする。(ここでは, 各 *critical handle* の *product* 性, 即ち I^3 を用いている。) すると, *critical disks* と *critical handle* との *intersection* は, $\{P_{i1} \times I, \dots, P_{in_i} \times I\}$ となる。そこで各 *index 1* の *critical handles* を $(P_i \circ \{P_{i1} \dots P_{in_i}\}) \times I$ に *strong deformation* する。(ここでも, $\circ$ は, *join* を示している。) T を上の結果とする。我々は, この T を *inside* (or *outside*) *ribbon* とよぶ。また各 *index 2* の *critical disks* D に対して, $C(D)$ を D と, *index 1* の *critical disks* との交点の数とし,

$$C(T) = \sum_D \max(0, C(D) - 2) \quad \text{とする。この } C(T) \text{ を}$$

$\mathcal{T}$ の complexity と呼ぶ。

§ 5. いくつかの命題

命題 5. L と J を compact connected 2-complexes とする。

X を J の connected でない subcomplex とする。 $f: X \rightarrow L$

を embedding とする。このとき, $K = L \cup_f J$ とおくと,

$\text{map } j_*: H_1(L) \rightarrow H_1(K)$ は surjection ではない。こ

で, j_* は, inclusion map が induce した, homology 間の map である。

(証明)

背理法を用いる。

j_* が surjective とする。すると, Mayer-Vietoris の exact sequence を考える:

$$H_1(J) + H_1(L) \xrightarrow{j_*} H_1(K) \xrightarrow{\partial} H_0(X) \xrightarrow{i} H_0(J) + H_0(L)$$

さて, j_* が surjective より, ∂ は 0-map である。したがって, i は injective である。一方, J と L は connected で, X は, connected でないから, i は injective ではない。これは矛盾。(証明終)

命題 6. L を complex とし, $\{D\}$ を finite disks の disjoint union とする。 $g: \{\partial D\} \rightarrow L$ を embedding とする。このとき, $K = L \cup_g \{D\}$ とおくと, $\ker \{j_*: H_1(L) \rightarrow H_1(K)\}$ は, $\{[\partial D]\}$ によって generate される subgroup である。

ここで, j_* は, inclusion map が induce する homology 間の map で, $[\partial D]$ は, ∂D によって represent される, $H_1(L)$ の element である。

(証明) Mayer-Vietoris の exact sequence より 証明される。

§6. 定理とその系

定理2. M を property E を持つ homology 3-sphere とする。 T を inside (or outside) ribbon とする。

$\partial T = T \cap -M'[0, 1.5]$ とする。ここで, M' は inside (or outside) の critical handles を 1.5-level に change してできた manifold である。このとき,

1) $T' \cap \partial T$ は connected である。ここで, T' は T の任意の connected component である。

2) $H_1(T, \partial T) = 0$

(証明)

背理法を用いる。1) または 2) が成立たないとする。

まず, $M'[0, 1.5]$ は, $-M'[0, 1.5] \cup T$ に deform する。

1) が成立たなければ, ∂T の定義から, 命題5を用いると, $H_1(M'[0, 1.5], -M'[0, 1.5]) \neq 0$ が示せる。また, 2) が成立たなければ, $H_1(M'[0, 1.5], -M'[0, 1.5]) \cong H_1(-M'[0, 1.5] \cup T, -M'[0, 1.5]) \cong H_1(T, \partial T)$ 。よって, いずれにせよ, $H_1(M'[0, 1.5], -M'[0, 1.5]) \neq 0$ が示される。

D を index 2 の outside (or inside) の critical disk とする。 $-M'(4.5, 2.0)$ の product 性を用いて, ∂D を 1.5-level に change する。すると, ∂D と index 1 の inside critical disks との intersection number は 0 であるから (何故なら, index 2 の outside の critical disk と, index 1 の inside critical disk を 1.5-level に move すると, proper arc で交わる) $[\partial D]$ は, $H_1(M'[0, 1.5], -M'[0, 1.5])$ 内で "homologue 0" である。よって命題 6 から,

$$\begin{aligned} H_1(M'[0, 1.5], -M'[0, 1.5]) &\cong H_1(M'[0, 2.0], -M'[0, 1.5]) \\ &\cong H_1(M', -M'[0, 1.5]) \end{aligned}$$

一方, $-M'[0, 1.5]$ は connected であるから, 次の exact 列を考える:

$$H_1(M') \xrightarrow{i} H_1(M', -M'[0, 1.5]) \xrightarrow{\partial} H_0(-M'[0, 1.5]) \xrightarrow{j} H_0(M)$$

ここで, $H_1(M') = 0$ かつ, j は isomorphism であるから ∂ は 0-map, よって, $H_1(M', -M'[0, 1.5]) = 0$ 二れは, 矛盾がある。 (証終)

系 1. M を property E を満す homology 3-sphere で, ある side の ribbon に対して, $C(M) = 0$ であるならば, M は 4-ball を bound する。

(証明)

ribbon T は、高々 2ヶ所の "のりしろ" を持った矩形を張り合わせることによつて、できているとしてよい。何故ならば、 $C(W)=0$ より、3ヶ所の "のりしろ" を持った矩形は存在しない。

初めに、1つの "のりしろ" を持った矩形をとる。次に、それと、それに接する *critical handle* を *cancel* する。

(see Fig-5)

この操作を、続けられる限り続ける。もはやできなくなつてもまだ *ribbon* が存在したら、次の様にして矛盾を出す:

(see Fig-6) 3つ以上の矩形が、1ヶ所に集つている所を、*singular line* とよぶことにする。(see Fig-7)

T を各 *singular line* で *cut* する。すると、2つの "のりしろ" を持った矩形に分解する。

次のことは明らかである。

$\partial T = \{x \in T \mid x \text{ は、分解した矩形の } boundary \text{ の点で、"のりしろ" の上にはない} \}$

singular line の数の *induction* によつて次の補題を証明できる。

補題 次の様な *ribbon* R が存在する:

- ① R は丁度 2つの "のりしろ" を持った矩形によつて、はりあわされてできる。

- ② *singular line* は唯一つである。
- ③ ∂R は上の ∂T と同じように定義するとき、
 $H_1(T, \partial T) \cong H_1(R, \partial R)$ となる。

(補題の証明)

矩形は $I \times I$ の構造を持ち、 $I \times \partial I$ が " のりしろ " であるとして一般性を失わない。

次の操作 ρ は、用いられるだろう。

$I_1 \times I_1, I_2 \times I_2, I_3 \times I_3$ を矩形とする 3 つの矩形が、 $I_1 \times 1, I_2 \times 1, I_3 \times 0$ で、" のりづけ " されているとき、 $I_1 \times 1$ を $I_3 \times 0$ に " のりづけ " し、 $I_2 \times 1$ を $I_3 \times 1$ に " のりづけ " する。(Fig-8)

induction の仮定の中に、操作 ρ を用いることを入れて証明する。

まず、1 つの矩形を T からはずす。その結果を T' とすると、 T' はまた、丁度 2 つの " のりしろ " を持った矩形によって構成されている *ribbon* である。(see Fig-9)

[Case A] T' の *connected component* が 1 つのとき:

T' は *induction* の仮定から 1 つの *singular line* をもつ *ribbon* R' に操作 ρ によって変形できる。そこで取り去った矩形を初めについていた部分にはりつける。名、" のりしろ " 部分を、操作 ρ を用いて R' の *singular line* の所に *slide* すればよい。それを R とする。

[Case B] T の *connected component* が2つのとき:

各々を T_1' と T_2' とする。すると *induction* の仮定から, 各 *component* に対して R_1' と R_2' が存在する。そこで, 取り去った矩形を最初についていた部分にはりつける。次に各“のりしろ”をまた操作 P を用いて R_1' と R_2' の *singular line* に *slide* する。(see Fig-10) 次に取り去った矩形を用いて, R_1' の *singular line* に集まる“のりしろ”を R_2' の *singular line* に *slide* する。それを R とする。(補題の証終)
(系1の証明の続き)

さて, 定理2から, ∂R は *connected* でなくてはならない(実際 *connected* でなければ, $H_1(R, \partial R) \neq 0$)。

したがって, R はいくつかの輪管と ∂ ではない, いくつかのメービウスの帯の名母線を1つにはりあわせたものになる。(see Fig-11) したがって, $H_1(R, \partial R) \neq 0$ したがって定理2に矛盾する。したがって, T を構成していた側の *index* 1 と 2 の *critical handles* は *cansel* されるから命題4により証明される。

系2. M を *property E* を持つ *manifold* とする。すると, 同一 *side* の *index* 1 の *critical handles* の数と *index* 2 の *critical handles* の数は等しい。

(証明) outside の index 1 の critical handles を, 1.2-level に change し, outside の index 2 の critical handles を 1.8-level に change し T -manifold を M' とする。

$$T_0^1 = M' [0, 1]$$

$$T^1 = M' [0, 1.2]$$

$$T_0^2 = M' [0, 1.8]$$

$$T^2 = M' [0, 2.0] \text{ とする。}$$

次の exact sequence を考える:

$$H_3(K) + H_3(T_0^2) \rightarrow H_3(M') \xrightarrow{\partial} H_2(K \cap T_0^2) \rightarrow$$

$$H_2(K) + H_2(T_0^2) \rightarrow H_2(M') = 0$$

$$= \mathbb{Z}^n, K = -(M' - T_0^2)。$$

上の sequence で $H_3(K) = H_2(K) = H_3(T_0^2) = 0$ であって, ∂ は isomorphism であるから, $H_2(T_0^2) = 0$ である。

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^n$, また次の exact sequence を考える:

$$H_2(T_0^2) \rightarrow H_1(T_0^2, T_0^1) \rightarrow H_1(T_0^1) \xrightarrow{j} H_1(T_0^2)$$

定理 2 の後半と同様にして, j の injection が示せるから, $H_2(T_0^2) = 0$ より, $H_1(T_0^2, T_0^1) = 0$ となる。

さらに次の exact sequence を考える:

$$H_2(T_0^2, T_0^1) \rightarrow H_2(T_0^2, T^1) \rightarrow H_1(T^1, T_0^1) \rightarrow H_1(T_0^2, T_0^1)$$

すると, 定理 2.1 によって $H_1(T_0^2, T_0^1) = 0$ であるから,

$$H_2(T_0^2, T_i') = 0 \text{ より } H_2(T_0^2, T') \cong H_1(T', T_i').$$

また, $H_2(T_0^2, T')$ は, *outside* の *index 2* の *critical handles* の数を示し, $H_1(T', T_i')$ は *outside* の *index 1* の *critical handles* の数を示している。

同様にして, *inside* にも示せる。 (証終)

Fig-1

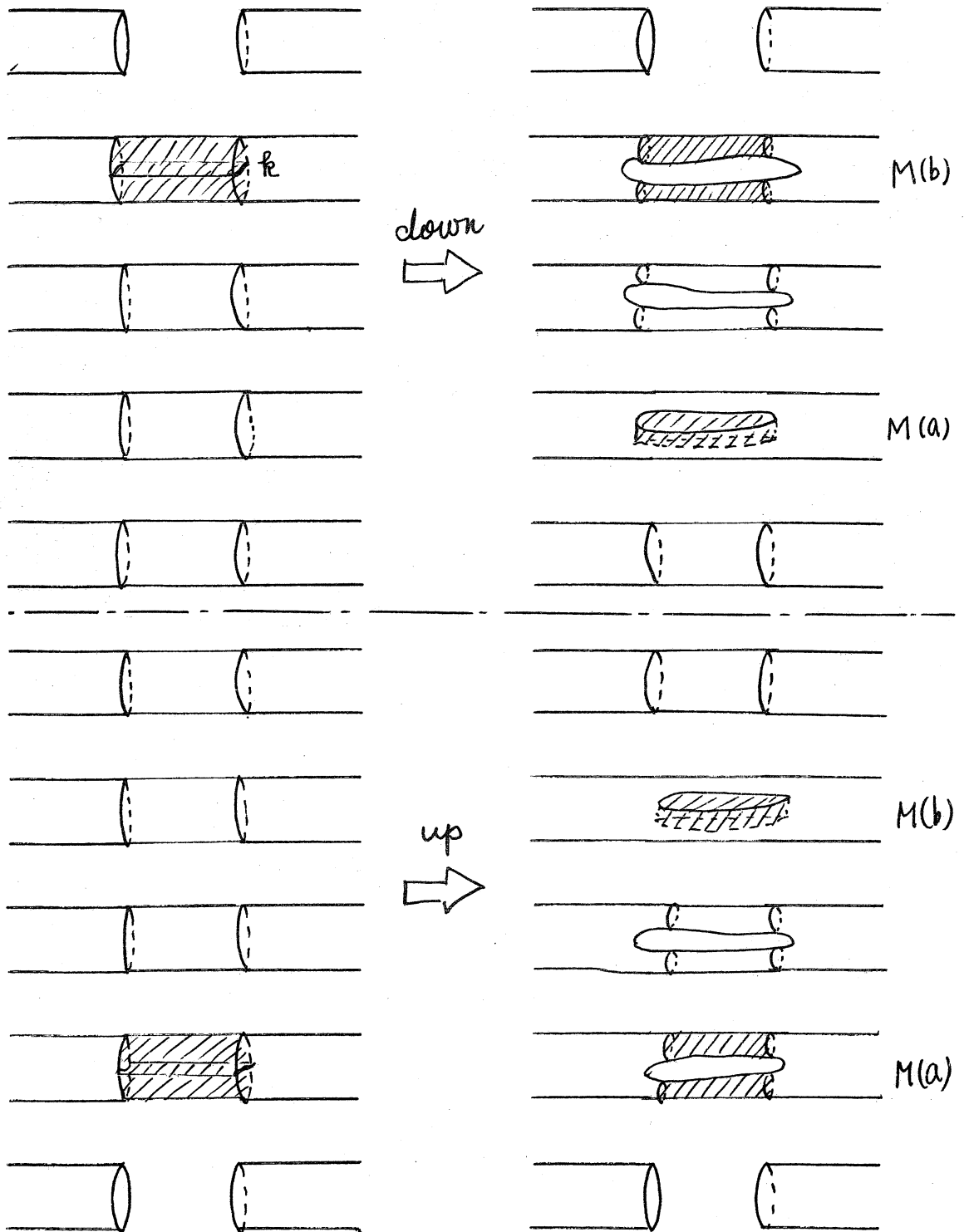


Fig-2

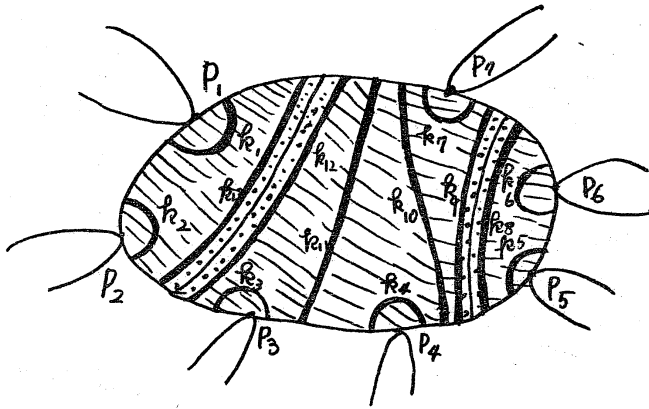


Fig-3

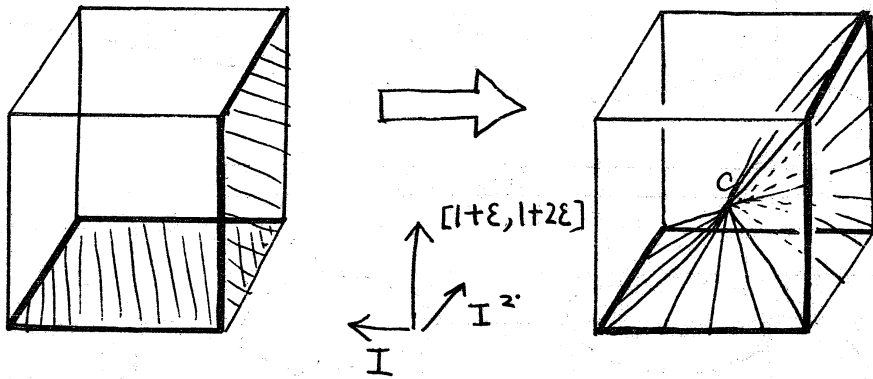


Fig-4

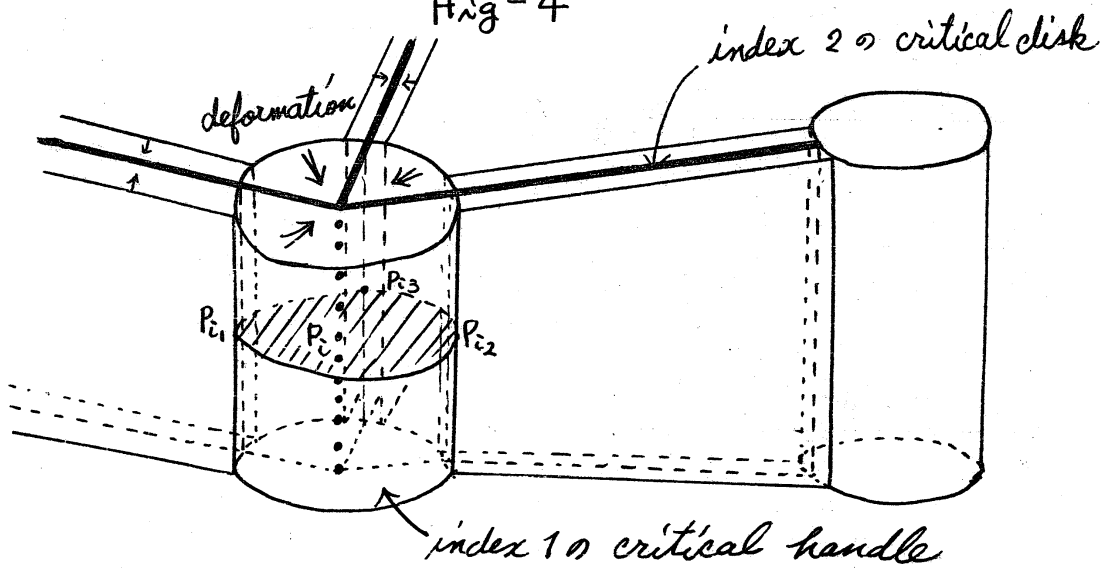


Fig - 5

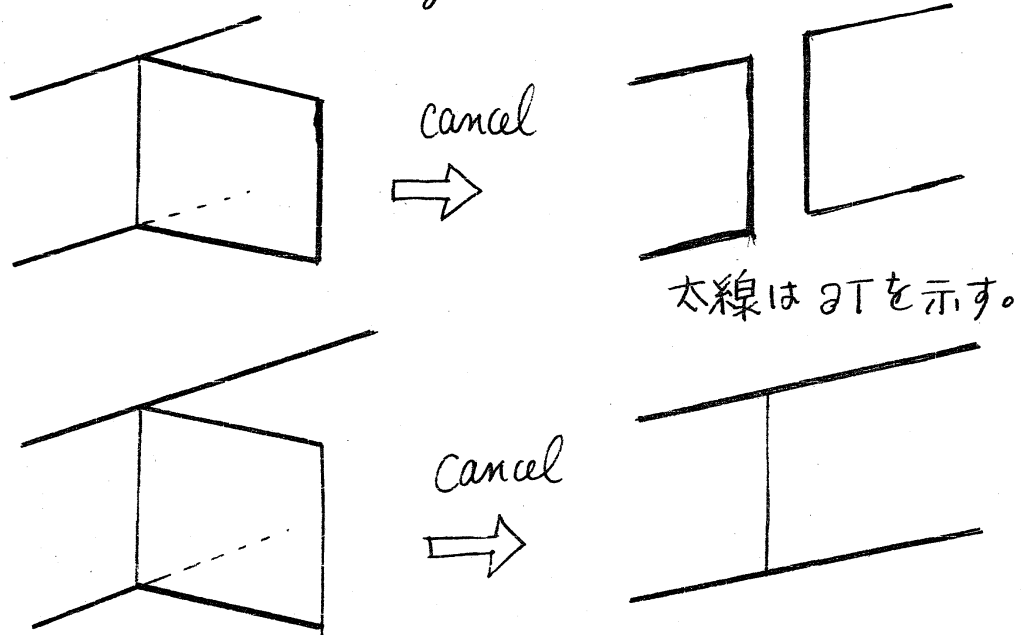


Fig - 6

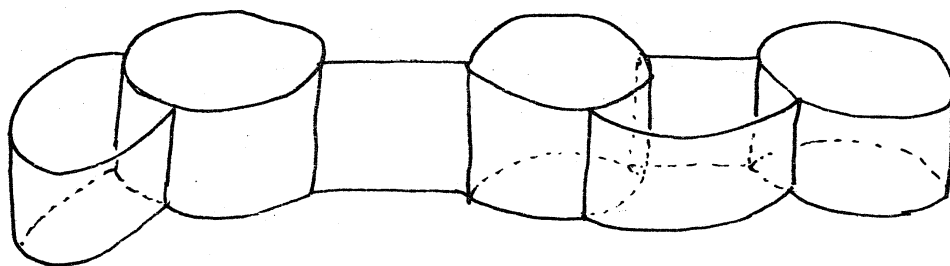


Fig - 7

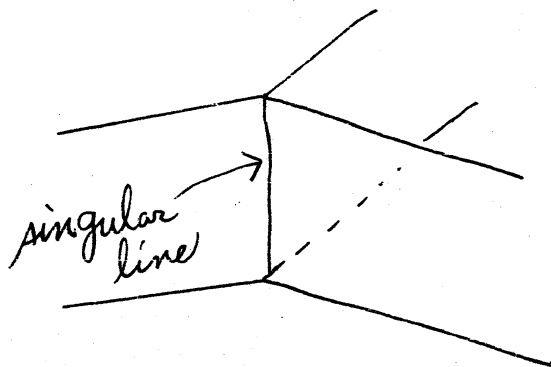


Fig - 8

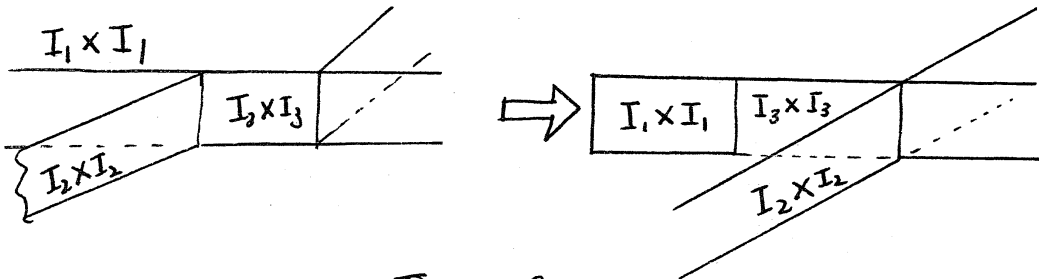


Fig - 9

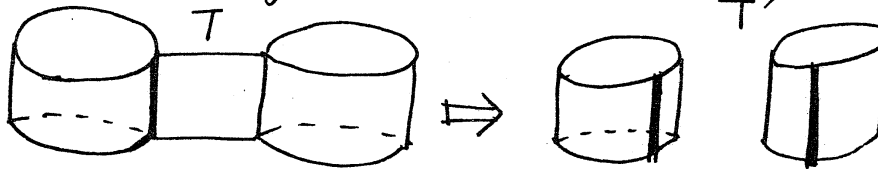


Fig - 10

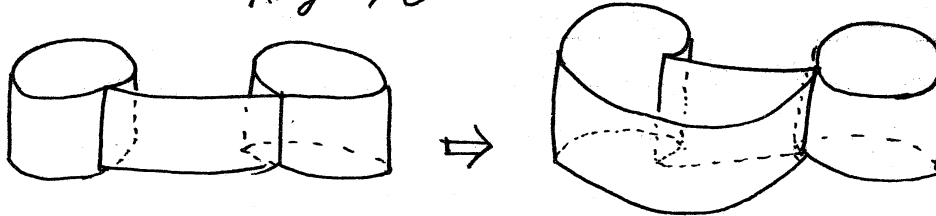
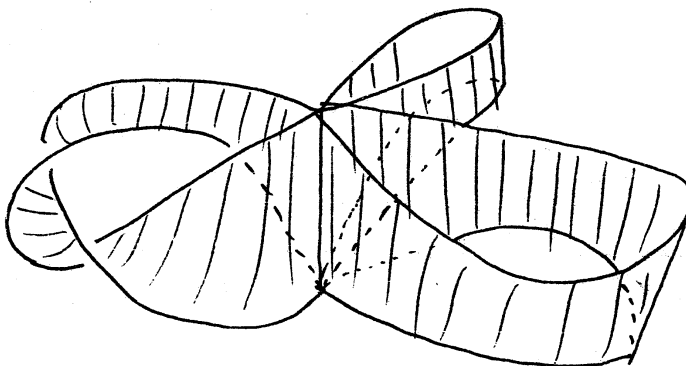


Fig - 11



An Example of Homology 3-sphere in R^4

by

Teruo Nagase

We shall consider of the following conjecture:

Given a homology 3-sphere M in R^4 whose all critical points of index i with respect to a level line in the space lie on level i , does it bound a 4-ball in R^4 ?

In this note, we shall obtain a negative answer for this conjecture. Full details will be published later.

I wish to thank Professor T. Homma, Professor M. Kato, Professor S. Maseki, and Y. Tsukui for their encouragement in preparation of this paper.

Theorem. There exists a homology 3-sphere in R^4 which does not bound a 4-ball in R^4 , although its critical points of index i with respect to a level line in R^4 (we take a level line of $R^4 = R^3 \times R$ the last axis) lie on level i .

Proof.

I Construction of a homology sphere M (see Fig-1)

(Fig. 1)

First, we take a 3-ball D^3 in $R^3 \times 0$ and an annulus $(\partial D^3) = S^2 \times [0, 1] \subset R^3 \times R$. Then in $R^3 \times 1$, attach to $S^2 \times 1 \subset (R^3 \times 1)$ two handles of index 1 from the outside of $S^2 \times 1$ and a handle of index 1 from the inside of $S^2 \times 1$, disjointly. (inside means the bounded closed domain in $R^3 \times 1$ bounded by $S^2 \times 1$ and outside means the complimentary closed domain of inside).

This gives a surgery of S^2 and the result which is a surface of genus 3 will be denoted by T . We represent element of generator of $\pi_1(T)$ as Fig-2.
(Fig. 2)

Taking $T \times [1,2]$, we then attach three handles of index 2 in the following way :

We choose mutually disjoint simple closed curves $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ on T such that ;

- (1) $\epsilon_1 = byb^{-1}x^{-1}a^{-1}xby^{-1}b^{-1}c^{-1}y^{-1}czbyb^{-1}x^{-1}axby^{-1}b^{-1}z^{-1}c^{-1}yb^{-1}a^{-1}$
- (2) $\epsilon_2 = byb^{-1}x^{-1}a^{-1}xby^{-1}b^{-1}z^{-1}c^{-1}c^{-1}y^{-1}czbyb^{-1}x^{-1}axby^{-1}b^{-1}z^{-1}c^{-1}ycz$
- (3) $\epsilon_3 = byb^{-1}x^{-1}abyb^{-1}a^{-1}z^{-1}c^{-1}y^{-1}cz$ (see Fig-3)
(Fig. 3)

Substituting $a=b=c=1$ to formula (1) and (2) we get $\epsilon_1=1, \epsilon_2=1$. Substituting $x=y=z=1$ to the formula (3) we get $\epsilon_3=1$. Then it follows from Dehn's lemma and the irreducibility of the solid torus that there exists mutually disjoint two 2-disks in the outside of $T \times 2 \subset R^3 \times 2$ bounding ϵ_1, ϵ_2 and a 2-disk in the inside of $T \times 2 \subset R^3 \times 2$ bounding ϵ_3 .

Thickening these three disks, we have the required handles of index 2. This gives a surgery of $T \times 2$. And the result of this surgery on T is a 2-sphere S^2 and we may take $S^2 \times [2,3] \cup D^3 \times 3$ where $\partial D^3 = S^2$.

II Computation of $\pi_1(M)$

Then

$$\begin{aligned}
 G &= (a, b, c, x, y, z : b=x=z=1, \\
 &\quad byb^{-1}x^{-1}a^{-1}xby^{-1}b^{-1}c^{-1}y^{-1}czbyb^{-1}x^{-1}axby^{-1}b^{-1}z^{-1}c^{-1}yb^{-1}a^{-1}=1 \\
 &\quad byb^{-1}x^{-1}a^{-1}xby^{-1}b^{-1}z^{-1}c^{-1}c^{-1}y^{-1}czbyb^{-1}x^{-1}axby^{-1}b^{-1}z^{-1}c^{-1}ycz=1 \\
 &\quad byb^{-1}x^{-1}abyb^{-1}a^{-1}z^{-1}c^{-1}y^{-1}cz=1 \\
 &= (a, c, y : ya^{-1}y^{-1}\underline{c^{-1}y^{-1}cy}a^{-1}c^{-1}ya^{-1}=1 \\
 &\quad ya^{-1}y^{-1}\underline{c^{-1}c^{-1}y^{-1}cy}a^{-1}c^{-1}yc=1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \underline{yaya^{-1}c^{-1}y^{-1}c=1}) \\
= (a,c,y : & ya^{-1}y^{-1}ay^{-1}y^{-1}c^{-1}ya^{-1}=1 \\
& ya^{-1}y^{-1}c^{-1}ay^{-1}y^{-1}c^{-1}yc=1 \\
& \underline{yaya^{-1}c^{-1}y^{-1}c=1}) \\
= (a,c,y : & ya^{-1}y^{-1}ay^{-1}y^{-1}c^{-1}ya^{-1}=1 \\
& ya^{-1}y^{-1}c^{-1}ay^{-1}aya^{-1}=1 \\
& yaya^{-1}c^{-1}y^{-1}c=1) \\
= (a,y : & ya^{-1}ya^{-1}yay^{-1}ay^{-1}aya^{-1}=1 \\
& aya^{-1}yya^{-1}yay^{-1}ay^{-1}a^{-1}ya^{-1}y^{-1}ay^{-1}=1) \\
= (v=ay^{-1},y : & \underline{v^{-1}v^{-1}yvvyv^{-1}=1} \\
& vyv^{-1}yv^{-1}yvvy^{-1}v^{-1}v^{-1}y^{-1}v=1) \\
= (v,y : & v^{-1}v^{-1}yvvyv^{-1}=1 \\
& vyv^{-1}yv^{-1}yv^{-1}yvvy^{-1}v=1) \\
= (v,w=yv^{-1} : & v^{-1}v^{-1}wvvyv=1, vwwwvvyv^{-1}v=1) \\
= (v,w : & v^{-2}wv^5w=1, w^5v^7=1)
\end{aligned}$$

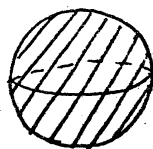
Let S_7 be the symmetric group of degree 7.

We define a homomorphism $f:G \rightarrow S_7$ as follows :

$$f(v) = (1526374), \quad f(w) = (34672).$$

Then $f(G)$ is not a trivial subgroup of S_7 , so G is a non-trivial group. Then M is not a homotopy 3-sphere. And it is easy to see that M is a homology 3-sphere.

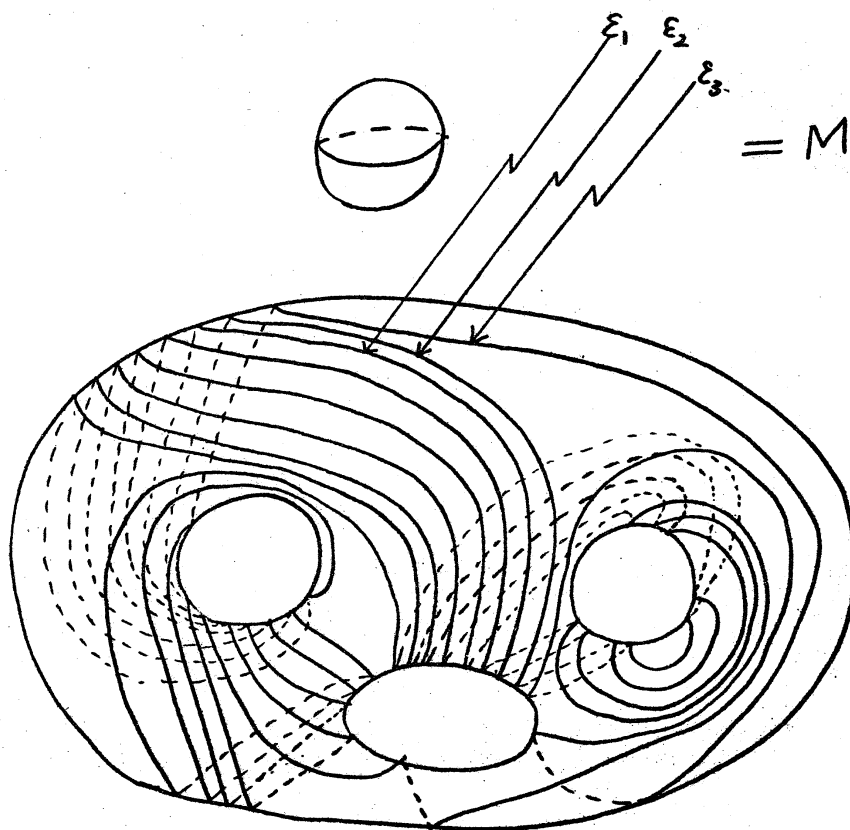
Remark. $\pi_1(M)$ equal to the Mazur's group [1]
 $(x,y : x^7=y^5, y^4=xyx).$



$$= M \cap R^3 \times 3.0$$



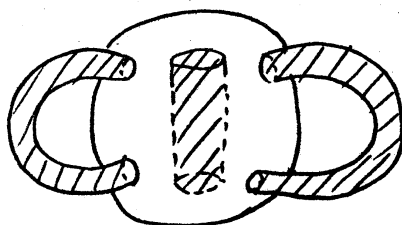
$$= M \cap R^3 \times 2.5$$



$$= M \cap R^3 \times 2.0$$



$$= M \cap R^3 \times 1.5$$



$$= M \cap R^3 \times 1.0$$



$$= M \cap R^3 \times 0.5$$



$$= M \cap R^3 \times 0.0$$

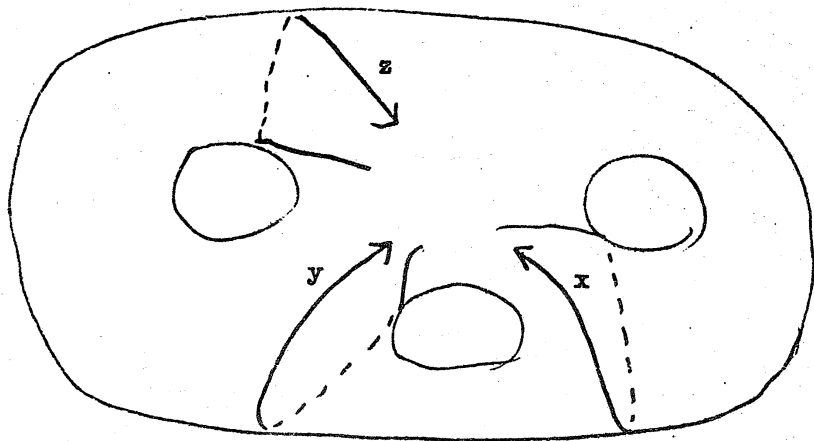
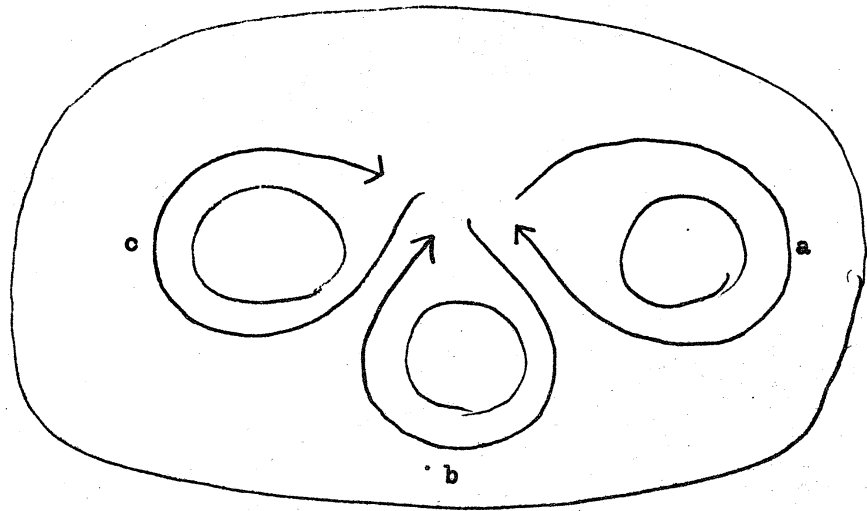
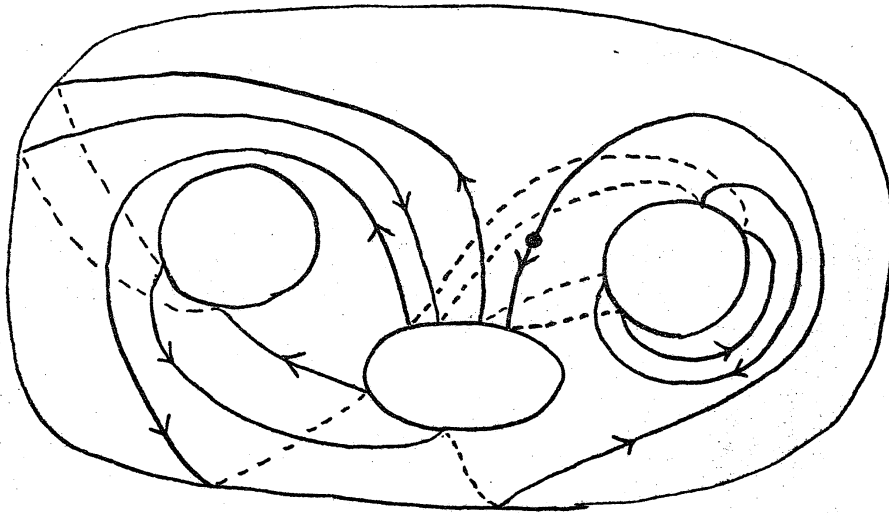


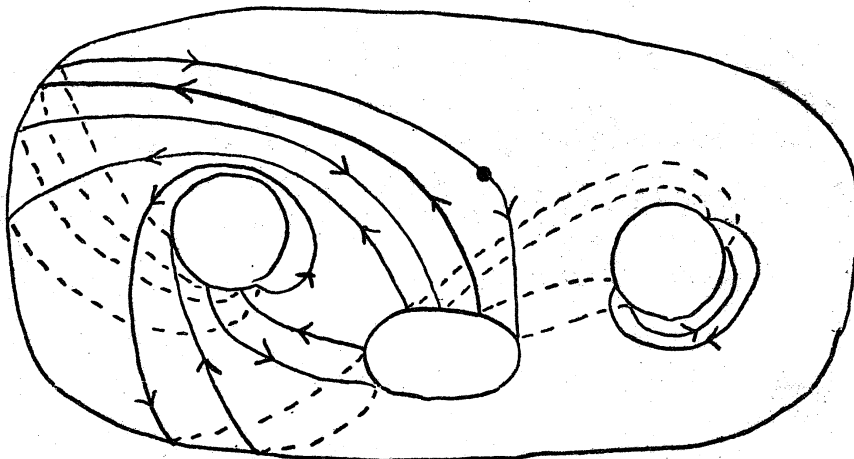
Fig. 3.

159

$\varepsilon_1 =$



$\varepsilon_2 =$



$\varepsilon_3 =$

