

Cohomology of Coxeter groups

阪大・理 秋田利え (Toshiyuki Akita)

1. v.c.d. 有限の群

一般にtorsionをもつ離散群の分類空間のコホモロジーを具体的に計算するのはたいへん難しい。amalgamated free product groupなどの簡単な場合を除けば、具体的な計算はSoule (1978) による $SL(3, \mathbb{Z})$ の場合などが挙げられるが数は多くない。

本稿で取り上げるCoxeter群もtorsionをもつ離散群の一つである。Coxeter群の分類空間のコホモロジーは過去に幾つかの研究があり、 $SL(n, \mathbb{Z})$ などの数論的群以外ではかなり研究されている方だろう。Coxeter群の定義はあとで述べることにして先にv.c.d. (virtual cohomological dimension) 有限という概念について説明する。

群 G のコホモロジー次元 $cd G$ を

$$cd G = \max \{ n \geq 0 \mid H^n(G, M) \neq 0, M: \text{勝手な } G \text{ 加群} \}$$

と定義する。これは Eilenberg-Ganea の定理によって、 $K(G, 1)$ -複体の取り得る最小次元とほとんど等しい ($cd G = 2$ のとき 2次元の $K(G, 1)$ -複体が存在するか否かが未解決)。
 $v.c.d.$ 有限とは、有限指数でコホモロジー次元が有限の部分群が存在することである。群 G が $v.c.d.$ 有限であることと、次の幾何学的な条件は同値である (Serre, 1971)。

- (i) G は有限指数の torsion free な部分群をもつ。
- (ii) 可縮な G -CW 複体 X で、各胞体の固定部分群の位数が有限であるようなものが存在する。

明らかに有限群は $v.c.d.$ 有限である。Coxeter 群が $v.c.d.$ 有限であることは Serre (1971) により示されており、これが Coxeter 群の分類空間のコホモロジーに関する最初の結果の一つでもある。また種々の数論的群も $v.c.d.$ 有限であることが知られている。

torsion をもつ離散群の分類空間のコホモロジーを考えるとき、 $v.c.d.$ 有限の群が比較的扱いやすいクラスだと考えられている。その理由のひとつは以下の Quillen (1971) の定理が成り立つことである。

定理 (Quillen, 1971) G を $v.c.d.$ 有限の群、 p を素数とし、 $\mathcal{C}_p$ を $\mathcal{C}_p$ で、その対象は G の elementary abelian

p -subgroup, 射は射入と conjugation からなるものとする。
 そのとき自然な環準同型

$$\rho: H^*(BG, \mathbb{Z}/p) \rightarrow \lim_{\text{inv.}} H^*(BE, \mathbb{Z}/p)$$

は次の条件をみたす。

- $$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} & u \in \ker \rho \text{ なら } u \text{ はベキ零元。} \\ \text{(ii)} & \text{任意の } v \in \lim_{\text{inv.}} H^*(BE) \text{ に対してある } n \geq 0 \text{ が存在} \\ & \text{して } v^{p^n} \in \text{im } \rho \text{ をみたす。} \end{array} \right.$$

ただし逆極限は圏 $\mathcal{C}$ に対するもので $E \in \text{Obj } \mathcal{C}$ である。またこの条件を満たす環準同型を Quillen の言葉により F -isomorphism と呼ぶ。

(上記の Quillen の定理は elementary abelian p -subgroup を全て決定するのが難しいこともあり、具体的な計算に役立つかは言えない)

2. 知られている結果

以下話を Coxeter 群に限定する。まず Coxeter 群の定義を与えよう。

定義 I を有限集合, $m_{ij} (i, j \in I)$ を自然数または ∞ で、次の条件を満たすとする:

$$\begin{cases} \text{(i)} & m_{ii} = 1. \\ \text{(ii)} & i \neq j \text{ のとき } 2 \leq m_{ij} = m_{ji} \leq \infty. \end{cases}$$

そのとき表示 $G = \langle i \in I \mid (ij)^{m_{ij}} = 1, m_{ij} \neq \infty \rangle$ で定義される群を Coxeter 群と呼ぶ。生成元の集合を強調するときには、 (G, I) とかく。

Coxeter 群の生成元が一つなら位数 2 の巡回群、生成元が 2 つで $m_{12} \neq \infty$ ならば対応する Coxeter 群は位数 $2m_{12}$ の正 2 面体群、 $m_{12} = \infty$ ならば 2 つの位数 2 の巡回群の自由積 $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$ となる。生成元が 3 つのとき対応する Coxeter 群は 3 つの数 (m_{12}, m_{23}, m_{31}) によって決まる。例えば $(3, 3, 2)$ に対応するものは 4 次の対称群と同型である。また (p, q, r) に対応する Coxeter 群の位数が有限であることは $1/p + 1/q + 1/r > 1$ が成立することと同値である。生成元が 3 つで無限位数のときにはよくに Schwalz full triangle group と呼ばれる。

有限位数の Coxeter 群は完全に分類されており、表示を調べることにより簡単に判定できる。大まかに言うと各 m_{ij} ($i \neq j$) が充分大きければ位数は無限大となる。

さて Coxeter 群の分類空間のコホモロジーは Serre の後、Rusin (1984), Howlett (1988), Pride-Stöhr (1990) 等に

によって研究されている。このうち Howlett の研究は、いわゆる Schur multiplier ($H_2(BG, \mathbb{Z}) \wedge = 0$) の計算である。残る二つはコホモロジー群または環の構造を扱っているが、それらを述べるために幾つか定義が必要である。

(G, I) を Coxeter 群とする。I の部分集合によって生成される G の部分群を放物的部分群 (parabolic subgroup) と呼ぶ。放物的部分群は自然な Coxeter 群の構造をもつ。I は有限集合であるから、与えられた Coxeter 群の放物的部分群の数は有限個であり、全部調べるのも簡単である。

次に I の異なる 3 つの元により生成される放物的部分群の位数が常に無限大のとき、その Coxeter 群は aspherical であるという。aspherical な Coxeter 群の簡単な例として、 $I = \{1, 2, 3\}$, $m_{ij} = 3$ ($i \neq j$) の場合が挙げられる。

ではまず Rusin の結果を述べよう。

定理 (Rusin, 1984) G を aspherical な Coxeter 群で各 m_{ij} は偶数とする。L を I の部分集合で有限位数の放物的部分群を生成するものからなる族とする。もつ各 m_{ij} が充分大きければ自然な環準同型

$$H^*(BG, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \lim_{J \in L} \text{inv. } H^*(BG_J, \mathbb{Z}/2)$$

は同型となる。ただし G_J は $J \subseteq I$ により生成される放物的部

介群をあらわす。

(Ruslin は各 m_{ij} の大きさに関する条件を具体的に与えているがここでは省略する)。次に Pride 等の結果を述べよう。

定理 (Pride-Stöhr, 1990) (G, I) は aspherical な Coxeter 群、 e を I の unordered pair $\{x, y\}$ の集合であって $\{x, y\}$ の生成する放物的部分群が有限位数のもの全体とする。そのとき任意の G -加群 M に対して次の系列は完全である。

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \prod_{i \in I} H^k(G_{\{i\}}, M)^{a(i)} &\rightarrow H^k(G, M) \rightarrow \prod_{\{x, y\} \in e} H^k(G_{\{x, y\}}, M) \\ &\rightarrow \prod_{i \in I} H^{k+1}(G_{\{i\}}, M)^{a(i)} \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

ここで $a(i)$ は i に依存して組み合わせ的に決まる量である。

ここで述べた二つの研究はともに、aspherical な Coxeter 群の介類空間のコホモロジーは、有限位数の放物的部分群のそれと密接な関係があることを示している。それでは一般の場合にはどうかと考えるのは自然である。Pride-Stöhr の完全系列の形は Coxeter 群が aspherical であることに強く依存しているので一般化は難しく思える。それに対してもう

一方の Rusin の定理にある環準同型が一般の場合 (係数が $\mathbb{Z}/2$ でなく Coxeter 群が aspherical でないとき) どのような性質をみたすかと問うことはできる。実際次の定理が成り立つ。

定理 (秋田, 1992) (G, I) を Coxeter 群, p を素数とする。
 $L \in$ Rusin の定理と同様に定義すれば自然な環準同型

$$H^*(BG, \mathbb{Z}/p) \rightarrow \lim_{J \in L} \text{inv. } H^*(BG_J, \mathbb{Z}/p)$$

は F -isomorphism となる。

Quillen の定理と上の定理を比べたとき、上の写像の値域は具体的に計算可能である点ですぐれている。なお G が aspherical であるとき上の写像が全射であることも証明できる。上の準同型は一般には単射でも全射でもないことを注意しておく (そのような例も $p=2$ のときでも構成できる)。

3. 証明の方針

以下に著者の定理の証明の基本的なアイデアを述べる。
 X を有限次元 G -CW 複体とすると、次の Leray スペクトル列を得る:

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{\sigma} H^p(BG_{\sigma}, \mathbb{Z}/p) \Rightarrow H^{p+q}_G(X, \mathbb{Z}/p)$$

ただし σ は p -胞体の軌道の代表元を動き、 $H^n_G(X, \mathbb{Z}/p)$ は

Borel コホモロジー $H^m(EG \times_G X, \mathbb{Z}/p)$ もあらわす。もし X が可縮であれば $H_G^m(X)$ は $H^m(BG)$ と同型であるので、上のスペクトル系列は G の分類空間のコホモロジーに収束する。さて E_2 -項での辺準同型 $\rho: H^*(BG, \mathbb{Z}/p) \rightarrow E_2^{0,*}$ はスペクトル系列の考察より次の条件を満たすことが解る (X が有限次元であることが重要) :

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad u \in H^*(BG) \text{ が } u \in \ker \rho \text{ ならば } u \text{ はベキ零元。} \\ \text{(ii)} \quad \text{任意の } v \in E_2^{0,*} \text{ に対してある } n \geq 0 \text{ が存在して } v^{p^n} \in \text{im } \rho \\ \quad \text{を満たす。} \end{array} \right.$$

従って定理を示すには G -CW複体で、対応する Leray スペクトル系列の E_2 レベルでのファイバー項が定理に述べられた逆極限、辺準同型が自然な準同型と一致するようなものを構成すればよいことがわかる。

さて与えられた Coxeter 群 (G, I) に対して求める G -CW複体も次のように構成する。 $\mathcal{A}$ を有限位数の放物的部分群の族、 $\mathcal{A}$ を $\mathcal{A}$ の左剰余類の全体とする。包含関係により $\mathcal{A}$ を poset とみなす。 $\mathcal{A}$ の元 gH ($g \in G, H \in \mathcal{A}$) には $g' \cdot gH := g'gH$ により G が左から作用する。 gH での固定部分群が gHg^{-1} であることは明らかである。

群 G の作用する poset が与えられれば、そこから G が単体的に作用する単体的複体を以下のように構成できる。すなわ

ち頂点は $\mathcal{A}$ の元、単体は $\mathcal{A}$ の元を有限個大きさの順に並べた列とし、その列に対しその部分列を辺と定義すればよい。

G の $\mathcal{A}$ への作用が上の単体的複体への作用に拡張されるのは明らかであろう。また各単体での固定部分群は有限位数の放物的部分群の共役類になっている。このように部分群や剰余類のなす poset を使って G -単体的複体を構成するのは離散群の部分空間のコホモロジーを研究する際の常套手段の一つである。

構成した G -単体的複体に対応する Leray スペクトル系列の E_2 -項のファイバー項と辺準同型が求められる条件を満たすとは、Leray スペクトル系列の基本的性質と複体の頂点と 1-単体の構造を考察することにより簡単に得られる（ただし E_2 -項での微分 $d_1^{0,*}$ を考えなければならぬので煩雑である）。

最後に構成した複体が可縮であることを示さなければならぬ。幸い Coxeter 群が作用する空間が可縮となる条件も、Davis が研究している。Davis は aspherical な多様体でも普遍被覆が Euclid 空間に同相でないものを構成するために研究したのだが我々の目的にも応用できる。以下に Davis の結果を述べる。

定理 (Davis, 1983) (G, I) を Coxeter 群, X を Hausdorff 空間, $(X_i)_{i \in I}$ を X の局所有限な閉部分空間の族とする。

$I(x) = \{i \in I; x \in X_i\}$, $X_J = \bigcap_{i \in J} X_i$ ($J \subseteq I$) とおく。

空間 $G \times X$ (G は離散空間とみる) に同値関係 $\sim$ を $(g, x) \sim (g', x') \Leftrightarrow x = x'$ かつ $g^{-1}g' \in G_{I(x)}$ により定義する。

以上の記号のもとで $G \times X / \sim$ が可縮であることは次の二つの条件は同値である

- (i) X は可縮。
- (ii) G_J の位数が有限である $J \subseteq I$ に対し X_J は非輪状。

一見してわかるように定理は非常に複雑である。我々の構成した単体的複体が可縮であることを示すには、複体に上の定理の空間 $G \times X / \sim$ に相当する構造を入れるなければならない。実は上の X および $(X_i)_{i \in I}$ に相当する空間がもとの複体の部分複体として実現でき、それらが可縮であることも容易に示すことができる。詳しくは著者の論文を参照してほしい。

4. 付記.

この記録で述べた定理により Coxeter 群の分類空間のコホモロジー環は有限位数の放物的部分群のそれを調べることによりかなり詳しくわかるが、完全に構造を決定するには至ら

ない。より詳しく調べるには今のところ Leray スペクトル系列の考察しかないが、Leray スペクトル系列は Serre のそれなどに比較して扱いにくいためなかなか困難である。

また定理の証明に使った手法は構成した単体的複体が可縮であることを示す部分を除いて、Coxeter 群以外の群にも応用可能であり、結果は F -isomorphism という形で得られる。

参考文献

- Akita, T. On the cohomology of Coxeter groups and their parabolic subgroups of finite order (Submitted to J. London Math. Soc.)
- Brown, K. Cohomology of Groups, GTM 87, Springer-Verlag 1982
- Davis, M. Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space, Ann. of Math. 117 (1983) 293-324
- Howlett, R. On the Schur multipliers of Coxeter groups, J. London Math. Soc. 38 (1988), 263-279
- Pride, S. - Stöhr, R. The (co)homology of aspherical Coxeter groups, J. London. Math. Soc. 92 (1990) 49-63.

- Quillen, D. The spectrum of equivariant cohomology ring II. *Ann. of Math.* 94 (1971) 573-602
- Rusin, D. The cohomology of groups generated by involutions, Ph.D. thesis, Chicago University, 1984
- Serre, J.-P. Cohomologie de groupes discrets, *Ann. of Math. Studies*, vol. 70, Princeton University