

ある PBIBD に対する アソシエート・ クラスの reduction

阪大・基工 景山 三平

§1. 要約

いくつかの BIBD のクロネッカー積等で構成される ℓ associate classes の PBIBD が, $\ell > \ell_1$ を満たすある適当な正整数 ℓ_1 に対し ℓ_1 associate classes の PBIBD に reduce するための必要十分条件を与える。

§2. 序

v 個の処理を, それぞれ k ($2 \leq k < v$) 個のプロットから成る b 個のプロックに次の三条件を満たすように配置するときこの計画を パラメーター v, b, r, k, λ をもつ BIBD とする:

- (i) 各プロックには, k 個の相異なる処理が施される.
- (ii) 各処理は, すべて r 回反復して施される.
- (iii) 相異なる二つの処理の組は, λ 回同じプロックで生起す

2

3.

この BIBD の incidence matrix $N = \|n_{ij}\|$ ($i=1,2,\dots,v$, $j=1,2,\dots,b$) を

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, & i\text{-th 処理が } j\text{-th ブロックに含まれる} \\ 0, & \text{その他.} \end{cases}$$

と定義すれば, 上の (i), (ii), (iii) は

$$\sum_{j=1}^b n_{ij} = k, \quad \sum_{i=1}^v n_{ij} = r, \quad \sum_{j=1}^b n_{ij} n_{i'j} = \lambda \quad (i \neq i')$$

と示される。

更に, 上記の v 個の処理の中に m class の association scheme が定義されているとき, 条件 (iii) の代りに次の

(iii') i -th associates である二つの相異なる処理の組は, λ_i 回同じブロックで生起する ($i=1,2,\dots,m$)。

を仮定すれば, 上記は PBIBD の定義 を与えている。

ここで v 個の処理の中に m class の association scheme が定義されているとは, 次の条件を満たす関係が定義されているときをいう:

(a) 任意の二つの処理は, 互いに 1-st, 2-nd, $\dots$, m -th associates のいずれかである (各処理は, 各自身 0 -th associates である)。

(b) α の処理 α も, m_i 個の i -th associates をもつ。 $m_i = 2^i$

m_i は α に無関係な定数である。

(c) i -th associates である α の処理 α, β に対して, α の j -th associates であり, 同時に β の k -th associates である

ような処理の個数は p_{jk}^i であり, この数は個々の組

(α, β) に無関係な定数である。

計画のクロネッカー積 $\times$ reduced design は, Vartak [3] により association scheme を明白には参えずに扱われた。ある PBIBD の 11×5 -ターをもつ配座が与えられたとき, χ design に match した association scheme を決定することは, χ association scheme の一意性を示す問題と関連して重要である。ここでは, §1 で述べたことを明らかにした。この問題は, 特に PBIBD の構成に関連して理論的にも実用的にも重要視されている。

Vartak の手法と筆者の手法との違いは, 前者は PBIBD N の組合数 n と 2 種の 11×5 -ター p_{jk}^i を用いるのに対して後者は N の組合数と NN' の固有根を用いる点にある。

§3 諸定理

Association scheme の行列表示として, association matrices

$A_0, A_1, \dots, A_m$ を

$$A_i = \|a_{\alpha\lambda}^i\| \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, v; \lambda = 0, 1, \dots, m)$$

$$a_{\alpha\lambda}^i = \begin{cases} 1, & \alpha\text{-番目と}\beta\text{-番目の元が}\lambda\text{-th associates} \\ & \text{のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

と定義する。こゝより, こゝの association matrices の linear closure $\mathcal{A} = [A_0, A_1, \dots, A_m]$ は, 元々の association algebra と呼ばれる $m+1$ 次元可換環となる [1]。また $\mathcal{A}$ の mutually orthogonal idempotents が $A_0^\#, A_1^\#, \dots, A_m^\#$ で与えられると, こゝの $\mathcal{A}$ は $\mathcal{A}$ の ideal base としての表示にも使われる, 即ち $\mathcal{A} = [A_0^\#, A_1^\#, \dots, A_m^\#]$ 。

一般に PRIBD のパラメータ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ が必ずしもすべて異なる時, 元の association scheme に基づいて $\mathcal{A}$ の PRIBD の m 個の associate classes もまた, 必ずしもすべて異なるかもしれない。こゝのこゝを記すところ, こゝは Kageyama [2] を中心に述べられている。

今, パラメータ $v, n, p_{jk}, b, r, k, \lambda_1$ をもつ m associate classes の PRIBD の incidence matrix $N = \|n_{\alpha\lambda}\|$ を

$$m_{\alpha\alpha} = \begin{cases} 1, & \alpha \text{番目の処理が}\alpha \text{番目のツルツで生起する} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

と定義すると、次の補題[A]が成立する。

補題 A

- NN' は association algebra の 1 に属する。 (1) も
- $NN' = \sum_{j=0}^m \lambda_j A_j = \sum_{i=0}^m f_i A_i^{\#}$, $z = z''$
- $f_i = \sum_{j=0}^m \lambda_j z_{ij}$ (z_{ij} は $p_j = \|p_j^k\|$ $i, k = 0, 1, \dots, m$ の固有根)
は, NN' の固有根である。 特に,
- $f_0 = rk = \sum_{i=0}^m m_i \lambda_i$
- f_i は 不等式 $0 \leq f_i \leq rk$ ($i = 0, 1, \dots, m$) を満たす。
この重複度は $\text{trace}(A_i^{\#})$ である。

補題 A は, 『 m associate classes の PBIBD N に対して,
 NN' は 高々 $m+1$ 個の λ_i と f_i をそれぞれ持つ 』ことを
意味している。 これは以下の定理の必要条件を導くのに用
いられる。

以下, design とその incidence matrix とは 同じ記号でか
くことにする。

定理 1

$N_i \in (105 \times 9 - v_i, b_i, k_i, \lambda_i) (i=1,2)$ をもつ BIBD とする。

このとき、

(i) Rectangular association scheme をもつ高々 3 associate classes の クロネッカー積 による PBIBD $N = N_1 \otimes N_2$ が L_2 association scheme をもつ ための 必要十分条件は、

$$v_1 = v_2, \quad k_1 = k_2$$

である。

(ii) Rectangular association scheme をもつ高々 3 associate classes の PBIBD $N = N_1 \otimes N_2 + N_1^* \otimes N_2^*$ が L_2 association scheme をもつ ための 必要十分条件は、

$$v_1 = v_2, \quad b_1(k_2 - \lambda_2) = b_2(k_1 - \lambda_1),$$

$$b_i \neq 4(k_i - \lambda_i) \quad , \quad i=1,2$$

である。ここで N_i^* は BIBD N_i の complementary である。

(i), (ii) の比較の簡単な例として、例として $N_1 (v_1 = b_1 = 3, k_1 = k_1 = 2, \lambda_1 = 1)$, $N_2 (v_2 = 5, b_2 = 10, k_2 = 4, \lambda_2 = 2, \lambda_2 = 1)$ 又は、 $N_1 = N_2 (v = b = 3, k = k = 2, \lambda = 1)$ が考えられる。

定理 2

$N_i \in \text{IP}^3 X$ かつ v_i, b_i, k_i, l_i ($i=1, 2, \dots, m$) をもつ BIBD とする。このとき

F_m type association scheme をもつ高々 $2^m - 1$ associate classes の クロネッカー積による PBIBD $N = N_1 \otimes N_2 \otimes \dots \otimes N_m$ が hypercubic association scheme をもつ。ただし m 個の相異なる associate classes の PBIBD は reducible であるための必要十分条件は、

$$v_1 = v_2 = \dots = v_m, \quad k_1 = k_2 = \dots = k_m$$

である。

(注意)

(i) $m=3$ のとき F_3 hypercubic association scheme は通常 cubic association scheme と呼ばれる。

(ii) $m < m_1 \leq 2^m - 1$ なる適当な m_1 に対して、 m_1 associate classes の PBIBD N の reduction も存在する。がである。

(iii) 定理 1 の (i) の型の一般化については別の機会に述べた。

References

- [1] Bose, R.C. and Mesner, D.M. (1959). On linear associative algebras corresponding to association schemes of partially balanced designs. *Ann. Math. Statist.* 30, 21-38.
- [2] Kageyama, S. (1972). On the reduction of associate classes for certain PBIB designs. *Ann. Math. Statist.* 43, 1528-1540.
- [3] Vartak, M.N. (1955). On an application of Kronecker product of matrices to statistical designs. *Ann. Math. Statist.* 26, 420-438.
- [4] Yamamoto, S. and Fujii, Y. (1963). Analysis of partially balanced incomplete block designs. *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I* 27, 119-135.