

modular curve の K_2 と “ $L(E, 1) \neq 0 \Rightarrow \# E(\mathbb{Q}) < \infty$ ”.

東京工業大学 加藤和也 (Kazuya Kato)

Kolyvagin は、 $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E が modular である (modular curve で dominate される — 谷山-Weil 予想によると $\mathbb{Q}$ 上のすべての楕円曲線がそうであるはず) とし、 $L(E, 1) \neq 0$ とすると、 $E(\mathbb{Q})$ 及び E の Tate-Shafarevich 群 $\text{III}(E)$ が有限であることを示した。本稿では、この“ $E(\mathbb{Q})$ の有限性”の部分の別証明のあらすじを述べる。($\text{III}(E)$ の有限性の方は、筆者は別証を得ていない。)

この別証では、Kolyvagin の道具であった Heegner point は使用せず、modular curve の K_2 の中に Beilinson が定義した元と、 p 進 Hodge 理論を用いる。

以下、体 K に対し、Galois cohomology $H^m(\text{Gal}(\bar{K}/K), \quad)$ を $H^m(K, \quad)$ と書く ($\bar{K}$ は K の分離閉包)。

§1. p 進 Hodge 理論の復習

K を標数 0 の完備離散付値体で、剰余体が標数 $p > 0$ の完

全体であるものとする。

(1.1) B_{dR} .

Fontaine は [2] において重要な体 B_{dR} を定義した。これは完備離散付値体で, $G_{dR}(\bar{K}/K)$ が作用し, その付値環は K を部分体として含み, $H^0(K, B_{dR}) = K$ が成立している。

$$B_{dR}^i = \{x \in B_{dR} : x \text{ の付値 } \geq i\} \quad (i \in \mathbb{Z})$$

とおく。

(1.2) 関手 D_{dR} .

Fontaine は [2] において重要な関手

$D_{dR} : (G_{dR}(\bar{K}/K) \text{ が連続に作用する有限次 } \mathbb{Q}_p\text{-vector space の圏})$

$\longrightarrow$ (降 filtration をもつ有限次 K -vector space の圏)

を,

$$D_{dR}(V) = H^0(K, B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$$

$D_{dR}(V)$ の第 i filtration $D_{dR}^i(V) = H^0(K, B_{dR}^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$

$(i \in \mathbb{Z})$ と定義した。

注) D_{dR} と Tate twist の関係: $D_{dR}(V(r))$ が K -vector space として $D_{dR}(V)$ と等しく, $D_{dR}^i(V(r)) = D_{dR}^{i+r}(V)$ となる。

(1.3) de Rham 表現

一般に $\dim_K D_{dR}(V) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ が成立する ([2]) から, ここで等号が成立する時, V は $G_{dR}(\bar{K}/K)$ の de Rham 表現であるといわれる。

(1.4) de Rham conjecture.

Faltings ([1]) は, Fontaine が [2] において提出した次の予想 (de Rham conjecture と呼ばれた) を証明した。

「 X を K 上の proper smooth scheme とすると, 各 $m \in \mathbb{Z}$ に対し $H_{\text{ét}}^m(X \otimes_K \bar{K}, \mathbb{Q}_p)$ は $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ の de Rham 表現であり,

$$D_{\text{dR}}(H_{\text{ét}}^m(X \otimes_K \bar{K}, \mathbb{Q}_p)) = H_{\text{dR}}^m(X/K)$$

$$D_{\text{dR}}^i(H_{\text{ét}}^m(X \otimes_K \bar{K}, \mathbb{Q}_p)) = \text{Fil}^i H_{\text{dR}}^m(X/K)$$

ここに Fil^i は Hodge filtration となる。

(1.5) dual exponential map.

V を $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ の de Rham representation とする時, dual exponential map と呼ぶ準同型

$$\exp^* : H^1(K, V) \rightarrow D_{\text{dR}}^0(V)$$

が, 合成

$$H^1(K, V) \rightarrow H^1(K, B_{\text{dR}}^0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \xrightarrow[\text{(*)}]{\cong} H^0(K, B_{\text{dR}}^0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) = D_{\text{dR}}^0(V)$$

として定義される。ここに (*) は, $-\log(K) \in H^1(K, \mathbb{Z}_p)$ との cup 積 (同型であることが示せる) である。但し

$$\log(K) \in H^1(K, \mathbb{Z}_p) = \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{K}/K), \mathbb{Z}_p)$$

は, $\text{Gal}(\bar{K}/K) \xrightarrow{\kappa} \mathbb{Z}_p^\times \xrightarrow{\log} \mathbb{Z}_p$, ここに κ は 1 の p 中根への作用, と定義する。

(1.6) dual exponential map と exponential map の間の双対性.

K を剰余体は有限体であるとする。次のような場合, (1.5)

の dual exponential map は, P 進 Lie 群の exponential map の dual と見なせる。 P 進 Lie 群の exponential

$$(i) \quad \exp : K \rightarrow K^\times \otimes \mathbb{Q} ; \quad a \mapsto \exp(p^n a) \otimes p^{-n} \quad (n \gg 0)$$

$$(i)' \quad \exp : \text{Lie}(A) \rightarrow A(K) \otimes \mathbb{Q} ; \quad \text{上と同様}$$

(A は K 上の p -ヘルム多様体) を考える。

$$(ii) \quad \varpi : K^\times \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H^1(K, \mathbb{Q}_p(1))$$

$$(ii)' \quad \varpi : A(K) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H^1(K, V_p A)$$

($\varpi = \varpi : V_p A = T_p A \otimes \mathbb{Q}$, $T_p A$ は A の P 進 Tate 加群) をそれぞれ, $0 \rightarrow (\mathbb{Z}/p^n)(1) \rightarrow \bar{K}^\times \xrightarrow{p^n} \bar{K}^\times \rightarrow 0$, $0 \rightarrow p^n A(\bar{K}) \rightarrow A(\bar{K}) \xrightarrow{p^n} A(\bar{K}) \rightarrow 0$ の連結準同型の $\varprojlim_n$ の $\otimes \mathbb{Q}$ とする。

合成 $(ii) \circ (i)$, $(ii)' \circ (i)'$ の $\mathbb{Q}_p$ -dual をとる:

$$(iii) \quad H^1(K, \mathbb{Q}_p) \underset{(*)}{\cong} \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(H^1(K, \mathbb{Q}_p(1)), \mathbb{Q}_p) \xrightarrow{(ii) \circ (i)^\vee} \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K, \mathbb{Q}_p) \underset{(**)}{\cong} K$$

$$(iii)' \quad H^1(K, V_p A') \underset{(*)}{\cong} \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(H^1(K, V_p A), \mathbb{Q}_p) \xrightarrow{(ii)' \circ (i)'^\vee} \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\text{Lie} A, \mathbb{Q}_p) \underset{(**)}{\cong} \omega \text{Lie}(A)$$

(A' は A の双対 p -ヘルム多様体, $\omega \text{Lie}(A) = \text{Hom}_K(\text{Lie}(A), K)$),

ここ (*) は $H^2(K, \mathbb{Q}_p(1)) \cong \mathbb{Q}_p$ の cup 積による Tate duality,

(**) は $K \times K \rightarrow \mathbb{Q}_p ; (x, y) \mapsto \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}_p}(xy)$ による。) とする。

$$\text{が,} \quad D_{dR}^0(\mathbb{Q}_p) = K$$

$$\begin{aligned} D_{dR}^0(V_p A') &= D_{dR}^0(H_{\text{ét}}^1(A \otimes_K \bar{K}, \mathbb{Q}_p)(1)) = f_{dR}^1 H_{dR}^1(A/K) \\ &= \Gamma(A, \Omega_{A/K}^1) = \omega \text{Lie}(A) \end{aligned}$$

であって, (iii), (iii)' はそれぞれ de Rham 表現 $\mathbb{Q}_p$ 及び $V_p A'$ の dual exponential map と同一視されるのである。

§2. zeta element.

次の (2.1) は, 目標である「別証」のために必要ではなく, 必要なのは (2.2) もしくはその系 (2.3) なのであるが, (2.1) は (2.2) の類似で, より易しいので, 比較のため記した。

(2.1) 定理 ([3]) 円単数から出発して, 1 の r 乗根 α と $r \geq 1$ に対し,

$$c(\alpha) \in H^1(\mathbb{Q}(\alpha), \mathbb{Q}_p(1-r))$$

で次の性質を持つものが作れる。(元 $c(\alpha)$ の定義は Serre による。)

$$H^1(\mathbb{Q}(\alpha), \mathbb{Q}_p(1-r)) \rightarrow H^1(\mathbb{Q}(\alpha) \otimes \mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(1-r)) \xrightarrow{\exp^*} \mathbb{Q}(\alpha) \otimes \mathbb{Q}_p$$

($\mathbb{Q}(\alpha) \otimes \mathbb{Q}_p = \prod_i F_i$, F_i は体とする時, $H^1(\mathbb{Q}(\alpha) \otimes \mathbb{Q}_p,)$ は

$H^1(F_i,)$ の直積と定義し, $\exp^*$ も, F_i についての $\exp^*$ の

直積と定義する) による $c(\alpha)$ の像 $w(\alpha)$ は, $\mathbb{Q}(\alpha)$ に属し,

かつ, この $w(\alpha) \in \mathbb{Q}(\alpha)$ の, 任意の体準同型

$$\iota : \mathbb{Q}(\alpha) \rightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad \iota(\alpha) = \exp\left(\frac{2\pi i a}{N}\right) \quad (N \geq 1, (a, N) = 1)$$

について

$$\iota(w(\alpha)) = \frac{1}{(2\pi i)^r} \left(\zeta_{\equiv a(N)} + (-1)^r \zeta_{\equiv -a(N)} \right)(r)$$

をみたす, ここに

$$\zeta_{\equiv a(N)}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \equiv a \pmod{N}}} \frac{1}{n^s}.$$

(2.2) 定理 ([4]). X をある $N \geq 1$ についての $\mathbb{Q}$ 上の (compactified) modular curve $X_1(N)$ とする. Beilinson が X の K_2 の中に作った元から出発して, 1 の中根 α と $s \in H^1(X \otimes \mathbb{C}, \mathbb{Q})$ に対し

$$c_s(\alpha) \in H^1(\mathbb{Q}(\alpha), H_{\text{et}}^1(X \otimes \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_p)(1))$$

で次の性質を持つものが作れる.

$$\begin{aligned} H^1(\mathbb{Q}(\alpha), H_{\text{et}}^1(X \otimes \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_p)(1)) &\rightarrow H^1(\mathbb{Q}(\alpha) \otimes \mathbb{Q}_p, H_{\text{et}}^1(X \otimes \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_p)(1)) \\ &\xrightarrow{\exp^*} \Gamma(X, \Omega_{X/\mathbb{Q}}^1) \otimes \mathbb{Q}(\alpha) \otimes \mathbb{Q}_p \end{aligned}$$

による $c_s(\alpha)$ の像 $w_s(\alpha)$ は $\Gamma(X, \Omega_{X/\mathbb{Q}}^1) \otimes \mathbb{Q}(\alpha)$ に属し, かつこの $w_s(\alpha)$ の, 任意の体準同型

$$l: \mathbb{Q}(\alpha) \rightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad l(\alpha) = \exp\left(\frac{2\pi i a}{N}\right) \quad (N \geq 1, (a, N) = 1)$$

による像

$$l(w_s(\alpha)) \in \Gamma(X, \Omega_{X/\mathbb{Q}}^1) \otimes \mathbb{C} \cong H^1(X \otimes \mathbb{C}, \mathbb{R})$$

は次で特徴づけられる. X 上の任意の eigen cusp form f に対し, $H^1(X \otimes \mathbb{C}, \mathbb{R})$ の中で

$$l(w_s(\alpha)) \text{ の } f \text{ 成分} = \begin{pmatrix} L_{\equiv a(N)}(f, 1) s + L_{\equiv -a(N)}(f, 1) \bar{s} \\ \text{の } f \text{ 成分} \end{pmatrix}$$

となる. ここに $\bar{s}$ は s の複素共役であり, $L(f, s) = \sum_{n \geq 1} c_n n^{-s}$ の時

$$L_{\equiv a(N)}(f, s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \equiv a \pmod{N}}} c_n n^{-s}.$$

(2.3) E を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線で modular であるものとする。

E に対応する eigen cusp form も f とし (したがって $L(E, s) = L(f, s)$ となっている)。定理 (2.2) の $c_s(1)$ の f 成分をとることで、次の定理が (2.2) から導かれる：

各 $s \in H^1(E \otimes \mathbb{C}, \mathbb{Q})^+$ ($(\)^+$ は $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ -fixed part) に対し、 $H^1(\mathbb{Q}, V_p E)$ の元 c_s で次をみたすものが存在する。

$$H^1(\mathbb{Q}, V_p E) \rightarrow H^1(\mathbb{Q}_p, V_p E) \xrightarrow{\exp^*} \text{coLie}(E) \otimes \mathbb{Q}_p$$

による c_s の像 ω_s は $\text{coLie}(E) = \Gamma(E, \Omega_{E/\mathbb{Q}}^1)$ に属し、この $\omega_s \in \Gamma(E, \Omega_{E/\mathbb{Q}}^1)$ の、

$$\Gamma(E, \Omega_{E/\mathbb{Q}}^1) \otimes \mathbb{R} \cong H^1(E \otimes \mathbb{C}, \mathbb{R})^+ = H^1(E \otimes \mathbb{C}, \mathbb{Q})^+ \otimes \mathbb{R}$$

での像は $L(E, 1)s$ に等しい。

§3. $L(E, 1) \neq 0 \Rightarrow \#E(\mathbb{Q}) < \infty$ の証明法。

(3.1) E を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線で modular なものとする。

$L(E, 1) \neq 0 \Rightarrow \#E(\mathbb{Q}) < \infty$ を示す。(2.3) の記号で、

s を 1 次元 $\mathbb{Q}$ -vector space $H^1(E(\mathbb{C}), \mathbb{Q})^+$ の基底とすると、

(2.3) より

$$L(E, 1) \neq 0 \iff \omega_s \neq 0.$$

次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccc}
 & & \swarrow \exp \\
 & & L_{\text{re}} E \otimes \mathbb{Q}_p \\
 E(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q} & \rightarrow & E(\mathbb{Q}_p) \otimes \mathbb{Q} \\
 \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 H^1(\mathbb{Q}, V_p E) & \rightarrow & H^1(\mathbb{Q}_p, V_p E) \xrightarrow{u_{C_S}} \mathbb{Q}_p
 \end{array}$$

$\downarrow \omega_S$

(u_{C_S} は C_S との cup 積)。下の Lemma (3.2) により, 最下辺の射の合成は 0 である。よって図より, 下の (*) かわかる:

$$L(E, 1) \neq 0 \iff \omega_S \neq 0 \iff \omega_S : L_{\text{re}} E \otimes \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q}_p$$

$\Downarrow (*)$
 $E(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow E(\mathbb{Q}_p) \otimes \mathbb{Q}$ は 零射

$E(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow E(\mathbb{Q}_p) \otimes \mathbb{Q}$ は単射ゆえ, それが零射であるのは $E(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q} = 0$ すなわち ($E(\mathbb{Q})$ は有限生成アーベル群だから) $E(\mathbb{Q})$ が有限であるときに限る。(証明終)

Lemma (3.2). Tate duality $H^1(\mathbb{Q}_p, V_p E) \times H^1(\mathbb{Q}_p, V_p E) \rightarrow \mathbb{Q}_p$ は, $H^1(\mathbb{Q}, V_p E) \times H^1(\mathbb{Q}, V_p E)$ の像を零化する。

(証明: 相互法則と, $H^1(\mathbb{Q}_v, V_p E)$ が $\mathbb{Q}$ のすべての素点 $v \neq p$ に対し零であることによる。)

(3.3) 注. この証明では, (2.2) の $C_S(1)$ を用いたが, 任意の 1 の中根 α についての (2.2) の $C_S(\alpha)$ を用いれば, 次のことが示せる。Dirichlet character $\chi : (\mathbb{Z}/N)^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ に対し,

$$L(E, \chi, 1) \neq 0 \implies E(\mathbb{Q}(\exp(\frac{2\pi i}{N}))) \otimes \mathbb{C} \text{ の } \chi \text{ 成分} = 0.$$

(これは Kolyvagin も示していない新しい結果のようである。)

§4. §2 の $C(\alpha)$, $C_S(\alpha)$ の作り方。

(4.1) まず (2.1) の $C(\alpha)$ を作るための出発点。

1 の N 根 $\alpha \neq 1$ に対し

$$C(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} (1-\alpha)^{-1} \in \mathbb{Q}(\alpha)^\times$$

とおく。任意の体準同型

$$\iota : \mathbb{Q}(\alpha) \rightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad \iota(\alpha) = \exp\left(\frac{2\pi i a}{N}\right) \quad (N \geq 1, (a, N)=1)$$

に対し,

$$\log |L(C(\alpha))| = \zeta'_{\equiv a(N)}(0) + \zeta'_{\equiv -a(N)}(0)$$

($()'$ は微分) である。このように $\mathbb{Q}(\alpha)^\times$ の元 $C(\alpha)$ は zeta 関数に関係しており, 多分「zeta の化身」なのである。この zeta の化身 $C(\alpha) \in \mathbb{Q}(\alpha)^\times$ から, (α を動かして)

(2.1) に述べた zeta の化身 $C(\alpha) \in H^1(\mathbb{Q}(\alpha), \mathbb{Q}_p(1-r))$ ができるのである。

(4.2) 次に (2.2) の $C_S(\alpha)$ を作るための出発点。

X を (2.2) のとおりとすると, Beilinson の regulator map

$$\text{reg} : \Gamma(X \otimes \mathbb{C}, K_2) \longrightarrow H_1(X \otimes \mathbb{C}, \mathbb{R})$$

が定義される。Beilinson は 1 の N 根 α と $\gamma \in H_1(X \otimes \mathbb{C}, \mathbb{Q})$ に対し,

$$C_\gamma(\alpha) \in \Gamma(X \otimes \mathbb{Q}(\alpha), K_2) \otimes \mathbb{Q}$$

で次の性質をもつものを作った。任意の体準同型

$$l : \mathbb{Q}(\alpha) \rightarrow \mathbb{C} : l(\alpha) = \exp\left(\frac{2\pi i \alpha}{N}\right) \quad (N \geq 1, (\alpha, N)=1)$$

に対し

$$\text{reg}(l(c_\gamma(\alpha))) \in H_1(X \otimes \mathbb{C}, \mathbb{R})$$

は次で特徴づけられる。X上の任意の eigen cup form f に対し,

$$\text{reg}(l(c_\gamma(\alpha))) \text{ の } f \text{ 成分} = \left(L'_{\equiv \alpha(N)}(f, 0) \gamma + L'_{\equiv -\alpha(N)}(f, 0) \bar{\gamma} \right) \text{ の } f \text{ 成分}$$

このように $c_\gamma(\alpha) \in \Gamma(X \otimes \mathbb{Q}(\alpha), K_2) \otimes \mathbb{Q}$ は zeta の化身であり, この zeta の化身から, (2.2) に述べた zeta の化身

$$c_\gamma(\alpha) \in H^1(\mathbb{Q}(\alpha), H_{\text{et}}^1(X \otimes \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_p)(1)) \text{ からできるのである。}$$

(4.3) $\mathbb{Q}(\alpha)^*$ 内の元 $c(\alpha)$ から $H^1(\mathbb{Q}(\alpha), \mathbb{Q}_p(1-r))$ の元を作る作り方は次のとおり。簡単のため α の位数 N が p でわりきれらるとする。各 $n \geq 0$ に対し α の p^n 乗根 x_n を, $x_{n+1}^p = x_n$ となるようにとる。写像

$$(*) \quad \mathbb{Q}(x_n)^* \xrightarrow{\partial} H^1(\mathbb{Q}(x_n), (\mathbb{Z}/p^n)(1)) \xleftarrow[\theta]{\cong} H^1(\mathbb{Q}(x_n), (\mathbb{Z}/p^n)(1-r))$$

こゝに θ は $(\mathbb{Z}/p^n)(1)$ の底 x_n^N との cup 積の r 乗, を考え, この写像による $c(x_n) \in \mathbb{Q}(x_n)^*$ の像を $t_n \in H^1(\mathbb{Q}(x_n), (\mathbb{Z}/p^n)(1-r))$ とおき, t_n の $H^1(\mathbb{Q}(\alpha), (\mathbb{Z}/p^n)(1-r))$ への norm を s_n とおく。

$(c(x_n))_{n \geq 0}$ が norm についての逆系をなすことから $(s_n)_{n \geq 0}$ も逆系をなし, $\varprojlim_n s_n \in H^1(\mathbb{Q}(\alpha), \mathbb{Q}_p(1-r))$ からまるから, この元を $c(\alpha) \in H^1(\mathbb{Q}(\alpha), \mathbb{Q}_p(1-r))$ と定義するのである。

$c_\gamma(\alpha) \in H^1(\mathbb{Q}(\alpha), H_{\text{et}}^1(X \otimes \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_p)(1))$ の定義もこれと同

様である。但し $\gamma = 2\pi i\delta$ とおき ($H_1 = H^1 \cdot 2\pi i$ と見る), (*) の代わりに

$$\begin{aligned}
 (**) \quad \Gamma(X \otimes \mathbb{Q}(x_n), K_2) &\xrightarrow{\tau} H^1(\mathbb{Q}(x_n), H_{\text{et}}^1(X \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}/p^n)(2)) \\
 &\xleftarrow[\theta]{\cong} H^1(\mathbb{Q}(x_n), H_{\text{et}}^1(X \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}/p^n)(1))
 \end{aligned}$$

但し τ は chern class map, θ は x_n^N との cup 積, を用いる。

[1] G. Faltings, Crystalline cohomology and p-adic

in "Algebraic analysis, geometry, and Number theory",

JAMI Inaugural conf.. (The Johns Hopkins Univ. Press 1989)

[2] J.-M. Fontaine, Sur certain types de représentations p-adiques
du groupe de Galois d'un corps local, construction d'un
....., Ann of math 115 (1982) 529-577.

[3] K. Kato, Approach to the Iwasawa theory of Hasse-Weil
L-functions via Bar (準備中).

[4] K. Kato, p-adic Hodge theory and values of zeta
functions of elliptic cusp forms (準備中)