

樹木上の自己共役作用素

のみたす Green 関数, (数理)青本和彦, (AOMOTO, K.)

局所有限な, 連結な 樹木 Γ に対して $V(\Gamma)$, $E(\Gamma)$

を 各々 頂点集合, 辺集合とする. $l^2(\Gamma)$ を $V(\Gamma)$ 上
の複素数値関数で, 絶対値2乗可積分な関数のなす
ヒルベルト空間とする. $l^2(\Gamma)$ 上の線型作用素 A を

$$(1) \quad Au(\gamma) = \sum_{\langle \gamma, \gamma' \rangle} u(\gamma') a_{\gamma, \gamma'} + u(\gamma) a_{\gamma, \gamma},$$

$a_{\gamma, \gamma'} = a_{\gamma', \gamma} \in \mathbb{R}$, $a_{\gamma, \gamma} \in \mathbb{R}$ によって定義す

る. ここで $\langle \gamma, \gamma' \rangle$ は γ' が γ に隣接している
事を示すものとする. A に関して以下次の仮
定を置く:

$$(1.1) \quad a_{\gamma, \gamma'} \neq 0 \quad \langle \gamma, \gamma' \rangle$$

(1.2) A の領域を $\mathcal{D}(A) = \{ u(\gamma) \in l^2(\Gamma) \mid$
; $\quad Au \in l^2(\Gamma) \}$ とおくと, A は自己共
役である: $A = A^*$

このとき A の Green 核 $(\lambda - A)^{-1}_{\gamma, \gamma'} =$

$= G(\gamma, \gamma' | z)$ は $\operatorname{Im} z \neq 0$ なる任意の複素数 z に対して存在し、且つ z について正則である. $\Phi(\gamma, \gamma' | z)$ は 次のスペクトル表示を持つ:

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Theta(\gamma, \gamma' | \lambda)}{z - \lambda} = G(\gamma, \gamma' | z)$$

ここで, $d\Theta(\gamma, \gamma' | \lambda)$ は スペクトル密度を表わす. 特く $\Theta(\gamma, \gamma' | \lambda)$ は 実軸上 増加関数でしかも 常数ではない. 従って $G(\gamma, \gamma' | z)$ は $\operatorname{Im} z > 0$ のときは $\operatorname{Im} G(\gamma, \gamma' | z) < 0$ をみたす. 従って $G(\gamma, \gamma' | z)^{-1} = W_{\gamma}(\bar{z})$ は

$$(3) \quad \operatorname{Im} W_{\gamma}(\bar{z}) \cdot \operatorname{Im} z > 0$$

を $\operatorname{Im} z \neq 0$ に対して みたしている. 我々の主要な結果のひとつは,

[定理 1] $\{W_{\gamma}(\bar{z})\}_{\gamma \in V(\Gamma)}$ は 次の代数方

程式の組をみたす: 各 $\gamma \in V(\Gamma)$ 毎に

$$(4) \quad \mathcal{Z} - W_Y(\mathcal{Z}) - Q_{Y,Y}$$

$$= \sum_{\langle Y, Y' \rangle} \frac{1}{2} \left(-W_Y + \sqrt{W_Y^2 + \frac{4Q_{Y,Y'}^2}{W_{Y'}}} \right),$$

且つ $W_Y(\mathcal{Z})$ は $\lim_{\mathcal{Z} \rightarrow \pm \infty} \neq 0$ において正則であるが, $\lim_{\mathcal{Z} \rightarrow \pm \infty}$ において漸近展開

$$(5) \quad W_Y(\mathcal{Z}) \sim \mathcal{Z}$$

を持つ.

この定理の証明は次の2個のLemmaから直ちに得られる.

[Lemma 1] $\gamma, \gamma' \in V(\Gamma)$ を $\langle \gamma, \gamma' \rangle$ となる任意の2頂点とする. γ_0 を γ と γ' を結ぶ辺を Γ から取り除いた樹木 (2個の連結成分を持つ) の同一の連結成分の任意の頂点とすると, 比

$$(6) \quad \frac{G(\gamma_0, \gamma' | \mathcal{Z})}{G(\gamma_0, \gamma | \mathcal{Z})}$$

は γ_0 の取り方によらず, γ, γ' のみ
に依存する.

これは A の自己共役性から直ちに
従う. この Lemma の結果として, γ_0 が
 γ と同じ ~~連結成分~~ K に属するとき,

$$(7) \quad \frac{G(\gamma_0, \gamma' | \mathbb{R})}{G(\gamma_0, \gamma | \mathbb{R})} = \alpha(\gamma_{\gamma'} | \mathbb{R})$$

とおき, $\alpha(\gamma_{\gamma'} | \mathbb{R})$ を乗法子と呼んで

おく. Lemma 1 と Green 核の定義から

[Lemma 2] $\langle \gamma, \gamma' \rangle_K$ に対して

$$(8) \quad \alpha(\gamma_{\gamma'}) = \frac{-W_{\gamma} + \sqrt{W_{\gamma}^2 + 4a_{\gamma, \gamma'}^2 \frac{W_{\gamma}}{W_{\gamma'}}}}{2a_{\gamma, \gamma'}}$$

が成り立つ.

(8) から, 左辺 従って 右辺 も $\chi_{\gamma} \neq 0$
 K に対して 正則 である. 実際

$$(9) \quad \alpha(\gamma_{\gamma'}) = \frac{G(\gamma, \gamma' | \mathbb{R})}{G(\gamma, \gamma | \mathbb{R})}$$

で, $G(\gamma, \gamma | \mathbb{R}) \neq 0$ である.

さて (4), (5) は $W_Y(z)$ の Laurent

展開 (漸近展開)

$$(10) \quad \tilde{W}_Y(z) = z + w_Y^{(0)} + \frac{w_Y^{(1)}}{z} + \frac{w_Y^{(2)}}{z^2} + \dots$$

を一意に決めるが, 右辺は $z = \infty$ の近傍で収束するとは限らない. 従って (10) は $\tilde{W}_Y(z)$ を解析関数として一意に定義するとは限らない. しかし $W_Y(z) = G(Y, Y|z)^{-1}$ は

次の不等式をみたす:

[Lemma 3] $\langle Y, Y' \rangle$ に対して

$$(11) \quad \operatorname{Im} \left(-W_Y + \sqrt{W_Y^2 + \frac{4G_{Y,Y'}^2 W_Y}{W_{Y'}}} \right) \cdot \operatorname{Im} z < 0.$$

これは, Dirichlet の公式を適用する事によつて, ~~やはり~~ A の自己共役性から得られる.

$G(Y, Y'|z)$ は $W_Y(z)$, (7), (8) によつて一意に決定されるので, $G(Y, Y'|z)$ は

$W_Y(z)$ を決めさえすればよい. これに関して
次の結果が得られる.

[定理2] $\{\tilde{W}_Y(z)\}_{Y \in V(\Gamma)}$ は $W_Y = \tilde{W}_Y$

とおくとき, (4), (5), (11) をみたすものとする.
このとき $\tilde{W}_Y(z)$ は $G(Y, Y|z)^{-1}$ に等しい.
すなわち $W_Y(z) = G(Y, Y|z)^{-1}$ は (4), (5), (11) に
よって一意に決定される.

証明の方針は, Γ が有限樹木
のとき $G(Y, Y|z)$ が有理的且つ $z = \infty$
において正則である事に注意し, $G(Y, Y|z)$
つまり $W_Y(z)$ が (4), (5) によって一意に決まる
事に注意する. 次に Γ に到る有限樹
木の増大列 $\{\Gamma_N\}_{N \geq 1}$ を考え, その上
での Green 関数 $G_N(Y, Y'|z)$ を構成する.

今 $0 \in V(\Gamma_N)$ を固定し, $G_N(Y, 0)$
を考える. $\text{dis}(0, Y) = n$ とし, 0 と Y
を結ぶ測地線 $[0, Y]$ 上の点で, Y
の手前の点, すなわち $\text{dis}(0, Y') = n-1$

となる実 γ' を $\sigma(\gamma)$ と書 $\angle$, 一方 γ と隣接し, γ の向こう側の実を $\sigma_{+,1}(\gamma), \dots, \sigma_{+,p}(\gamma)$ とする. すると関数 $u(\gamma) = G_N(\gamma, 0)$ は $\gamma, \sigma_{+,j}(\gamma) \in V(\sqrt{N})$ のとき

$$(12) \quad \begin{aligned} \sum u(\gamma) &= a_{\gamma, \sigma(\gamma)} u(\sigma(\gamma)) + a_{\gamma, \gamma} u(\gamma) \\ &+ \sum_{j=1}^p a_{\gamma, \sigma_{+,j}(\gamma)} u(\sigma_{+,j}(\gamma)) \end{aligned}$$

をみよ. 今

$$(13) \quad \zeta_{\gamma} = a_{\gamma, \sigma(\gamma)} \frac{u(\gamma)}{u(\sigma(\gamma))} = a_{\gamma, \sigma(\gamma)} \alpha_{\gamma}^{(\sigma(\gamma))}$$

とおけば, (12) は

$$(14) \quad \zeta_{\gamma} = \frac{a_{\gamma, \sigma(\gamma)}^2}{\sum -a_{\gamma, \gamma} - \sum_{j=1}^p \zeta_{\sigma_{+,j}(\gamma)}}$$

と書ける. 今 $\alpha_m \sum > 0$ と仮定すれば,

$\alpha_m \zeta_{\sigma_{+,j}(\gamma)} \leq 0$ がすべての j について成立すれ

は, $\operatorname{Im} \zeta_Y < 0$ である. 又 $\zeta_{\sigma_{+j}(Y)}$

が下半面の円の内部を動けば,
 $\sum_{j=1}^p \zeta_{\sigma_{+j}(Y)}$ も又 下半面の ある円の内部

部を動き, 従て ζ_Y も 下半面の ある
 円の内部を動く. 又

$$(15) \quad G_N(0,0|\infty) = \frac{1}{\infty - a_{0,0} - \sum_{\langle 0,Y \rangle} \zeta_Y}$$

であるから, 各 ζ_Y が 下半面の 円の内部
 を動けば, $G(0,0|\infty)$ は 下半面の 円の
 内部を動く.

Γ_N の境界の各点 Y' において, すべて

$\zeta_{Y'}$ は $\operatorname{Im} \zeta_{Y'} \leq 0$ とすれば, 上記の考察

より, $\operatorname{Im} G_N(0,0|\infty) < 0$ であるが, $G_N(0,0|\infty)$

は 下半面の ある円の内部を ~~走る~~ 事になる.
 この円を $\triangle_N$ とおく. この時 次が成り立つ.

[Lemma 4] $N_1 < N_2$ ならば $\Delta_{N_1} \supset \Delta_{N_2}$.

従って $\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_N = \Delta_\infty$ が存在し,

これは 円 であるか 又は 点 である. それらは, 各々 極限円 又は 極限点 と呼ばれる.

次は 1次元 格子 K に対してはよく知られた 事実の 樹木 への 拡張 である.

[定理 3] $\alpha_m > 0$ と仮定する. A が 自己共役 であるための 必要十分条件 は, Δ_∞ ~~は~~ 極限点 となる 事 である.

従って 以下 Δ_∞ は 常に 極限点 と仮定する. すると 各 N に対して Γ_N の 境界条件

$$(16) \quad \alpha\left(\frac{\partial \psi}{\partial \nu}\right) = \frac{G(0, \gamma/2)}{G(0, \alpha(0)/2)}, \quad \gamma \in \partial \Gamma_N$$

をいかに定めようとも, Δ_N の 極限 である Δ_∞ は 点 に 収縮 する のだから, $N \rightarrow \infty$ における 限り, $G_N(0, 0/2)$ は 境界条件

の取り方によらず、ただひとつの関数に収束する。

[定理2の証明] (4), (5), (11) をみたす関数族が $W_\gamma(z) = G(\gamma, \gamma|z)^{-1}$ の他にあるものとし、それらを $\{W_\gamma^*(z)\}_{\gamma \in V(\Gamma)}$ とする。

各 Γ_N 上に制限してみれば、それは各々

$$(17) \quad \begin{cases} -W_{N,\gamma} + \sqrt{W_{N,\gamma}^2 + \frac{4a_{\gamma,\sigma(\gamma)}W_{N,\gamma}}{W_{N,\sigma(\gamma)}}} = 2\zeta_{N,\gamma} \\ -W_{N,\gamma}^* + \sqrt{(W_{N,\gamma}^*)^2 + \frac{4a_{\gamma,\sigma(\gamma)}W_{N,\gamma}^*}{W_{N,\sigma(\gamma)}^*}} = 2\zeta_{N,\gamma}^* \end{cases}$$

$(\gamma \in \partial\Gamma_N)$ が与えられた、(4), (5) の解に他ならない。これは一意に与えられる。ここで $\partial_m \zeta_{N,\gamma} < 0$, $\partial_m \zeta_{N,\gamma}^* < 0$ である。

従て、対応する Green 核 $G_N(0,0|z)$, $G_N^*(0,0|z)$ は Δ_N に値をとる。 $\Delta_N \mapsto \Delta_\infty (= -\infty)$

である故

$$(48) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} G_N(0, 0 | z) = \lim_{N \rightarrow \infty} G_N^*(0, 0 | z) \\ = G(0, 0 | z)$$

でなくてはならぬ。原典で極限典であれば、他のすべての頂典でいふのである事が証明されるので、

$$(49) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} G_N(\gamma, \gamma | z) = \lim_{N \rightarrow \infty} G_N^*(\gamma, \gamma | z) \\ = G(\gamma, \gamma | z)$$

がすべての $\gamma \in V(U)$ について言える。こうして定理2の証明が完成した。

文献

- [1] K. Aomoto, Proc. Japan Acad., Vol 64, Ser. A, No. 4, 123-125 (1988)
- [2] ———, Selfadjointness and limit pointness for adjacency operators on a tree, preprint, 1988.