

SU(n)チェーンのダイナミックス

大工研 福見俊夫 (Toshio Fukumi)

(アブストラクト)

SU(n)チェーンのダイナミックスを記述する。波動方程式と電信方程式を演算子法を用いて解くことを試みた。

1. 演算子法の概要¹⁾

○ 推移オペレーター $\exp(-xs)$

まず $x \geq 0$ に対して

$$H_x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < x \\ 1, & 0 \leq x < t < \infty \end{cases}$$

として定義された Heaviside の単位関数を用いて

$$h_1(x, t) = \int_0^t H_x(u) du = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < x \\ t - x, & 0 \leq x < t < \infty \end{cases}$$

から推移オペレーター

$$e^{-xs} = s^2 \{h_1(x, t)\}$$

を定義する。ここに s は超汎関数微分作用素である。

○ $x \geq 0, t \geq 0$ で定義された複素数値関数

$$f(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}$$

は超函数的に

$$\frac{d}{dx} \{f(x, t)\} = -s^{1/2} \{f(x, t)\}$$

$$\lim_{x \downarrow 0} \{f(x, t)\} = I$$

を満足する。

ここで $f(x) = \exp(-xs^{1/2})$ と書いて

$$\int f(x)f(\mu - x)d\mu(x) = f(\mu)$$

が考えられる。これによって超函数微分

$$\frac{df(x)}{dx} = \int \frac{df(\alpha)}{d\alpha} f(x - \alpha)d\mu(\alpha)$$

$$= s^{1/2} f(x)$$

が定義される。 $s^{1/2}$ を指数函数の背に乘せると拡散オペレータ

$$e^{-xs^{1/2}}$$

が導入できる。

2. SU(n)チェーン

量子系のモデルとして $SU(n) \otimes \dots \otimes SU(n)$ を考えることにする。物理的には量子ビットの集団を考えることになる。量子ビットとは量子コンピュータの基本単位である。量子コンピュータについてはファインマン²⁾の報文を参照して下さい。Physics TodayにBennett³⁾の最近の動向が述べられております。

3. 波動方程式

SU(n)チェーンの連続体モデルとして次の波動方程式を考える。

$$z''(x) = \alpha^2 s^2 z(x)$$

このとき境界条件

$$z(0, t) = v_1(t), \quad z(x_0, t) = v_2(t)$$

のもとに解くと解は一意的に

$$z(x) = \frac{e^{-\alpha x s} - e^{-\alpha(2x_0-x)s}}{I - e^{-\alpha x_0 s}} v_1 + \frac{e^{-\alpha(x_0-x)s} - e^{-\alpha(x_0+x)s}}{I - e^{-2\alpha x_0 s}} v_2$$

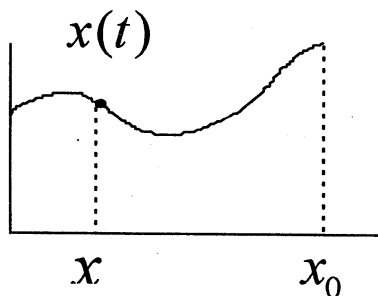
で与えられる。この解の解釈は

$$z_1(x) = \frac{e^{-\alpha x s} - e^{-\alpha(2x_0-x)s}}{I - e^{-\alpha x_0 s}} v_1,$$

$$z_2(x) = \frac{e^{-\alpha(x_0-x)s} - e^{-\alpha(x_0+x)s}}{I - e^{-2\alpha x_0 s}} v_2$$

のように $z_1(x)$ と $z_2(x)$ の和になっている。

まず x を固定して x の時間の函数としての振る舞いを見ることにする。



弦上の点 x が時刻 t の変化につれてどうするか。これを $z_1(x)$ について

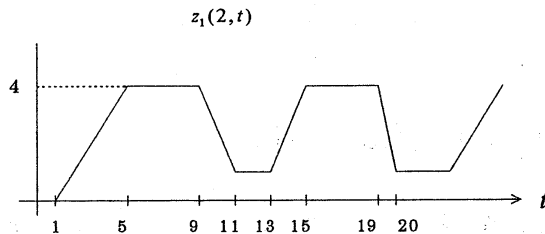
$$\alpha = \frac{1}{2}, x_0 = 10,$$

$$\text{かつ } v_1(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 4 \\ 4, & 4 \leq t < \infty \end{cases}$$

のときに $x=2$ として

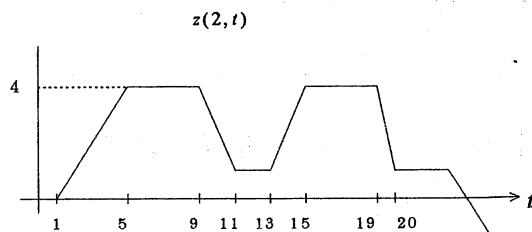
$$z_1(2, t) = \frac{e^{-s} - e^{-9s}}{1 - e^{-10s}} v_1$$

すなわち、 $z_1(2, t)$ のグラフは次のようになる。



Note $z_1(t)$ is not smooth.

以上の結果を使うと上記の解はおおよそ下図のようになる⁵⁾



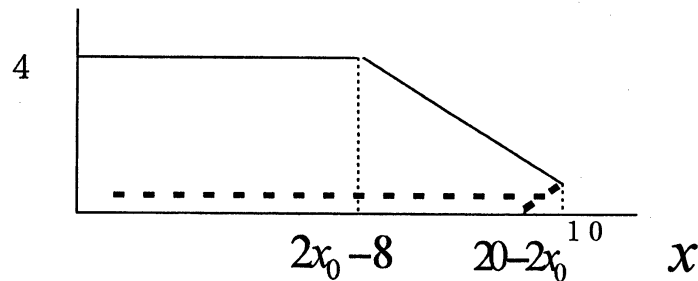
Note $z(t)$ is not smooth.

このグラフの物理的意味は、水平の線が系が特定の量子状態にあることを示す。一方、斜線は系の時間発展

$$|x\rangle = c_1(t)|x_1\rangle + c_2(t)|x_2\rangle$$

を表す。すなわち、 $|x\rangle$ は $|x_1\rangle$ と $|x_2\rangle$ のコヒーレントな重ね合わせになる。

次に、時間を固定して系の形状を見てみる。結果は下図のようになる。¹⁾



上図の物理的意味は、水平線は系が特定の量子状態にあることを示し、斜線は系が2つの状態のコヒーレントな重ね合わせになることを示す。つまり、

$$|x\rangle = c_1(x(t_0))|x_1\rangle + c_2(x(t_0))|x_2\rangle$$

ここに、 $c_1(x(t_0))$ は座標系を変数とする重ね合わせを示す係数である。

このようにして系は巨視的に量子化されていることが分かる。

今、時間 t は t_0 に固定されているが、もし時間 t が発展すれば図の形は時間 t の変化につれて変化する。すなわち、系の時間的发展を示す。

4. 電信方程式

3節においては連続体モデルを用いて波動方程式を解いたが、本節ではディスクリートの系の発展を記述する電信方式を見てみることにする。

電信方程式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} U_x &= -LI_t - RI, \\ I_x &= -CU_t - GU, \end{aligned}$$

ここに R は抵抗、 L は自己インダクタンス、 G は漏電コンダクタンスまたはリーク、 C は容量と呼ばれる。

時刻 $t=0$ では、ケーブルに電流が流れず、電圧はいたるところ 0 に等しいと仮定する。すなわち、すべての x で

$$U(x,0) = 0, \quad I(x,0) = 0$$

このことから、すべての x で

$$\begin{aligned} U_t(x) &= sU(x), \\ I_t(x) &= sI(x) \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} U'(x) &= -LsI(x) - RI(x) \\ &= -(Ls + R)I(x), \\ I'(x) &= -CsU(x) - GU(x) \\ &= -(Cs + G)U(x) \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} U''(x) &= -(Ls + R)I'(x) \\ &= (Ls + R)(Cs + G)U(x) \end{aligned}$$

すなわち電圧の満足すべき方程式を得た。

ここで若干パラメータの物理的意味についてふれておく。

すなわち、現象論的に導入されたパラメータは Entanglement

というような量子力学的現象と密接に関連している。詳しくは上記 Bennett³⁾を参照してほしい。

次に電信方程式の解法について述べる。¹⁾

簡単のために $R = G = 0$ かつ $L > 0$, $C > 0$ の場合を考えると、電信方程式は

$$U''(x) = LCs^2U(x)$$

である。ケーブルが非常に長いとし、ケーブルの始点 $x=0$ に起電力 $E = \{E(t)\}$ が加えられた時に境界条件

$$\begin{aligned} U(0) &= E = \{E(t)\}, \\ U(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

で解くことになる。ゆえに無限に長い弦の振動において

$$U(x) = \exp(-\sqrt{LC}xs)\{E(t)\}$$

すなわち、次のようになる。

$$U(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \sqrt{LC}x \\ E(t - \sqrt{LC}x), & 0 \leq \sqrt{LC}x < t \end{cases}$$

次の準備として熱方程式

$$\begin{aligned} z_{xx}(x, t) &= \alpha^2 z_t(x, t), \\ \alpha &= \sqrt{c\rho/k} \end{aligned}$$

を見ることにする。この超汎函数微分方程式は

$$z''(x) = \alpha^2 sz(x)$$

となる。

長さが x_0 の針金に、時刻 $t=0$ における温度分布 $\varphi(x)$ が与えられた時この輪を長さ x_0 の棒と考えて、時刻 $t>0$ における棒の上の x における温度 $z(x,t)$ は超汎函数微分方程式

$$z'' - \alpha^2 s z(x) = -\alpha^2 \varphi(x)$$

によって記述される。

そして次の式

$$\begin{aligned} \frac{I}{s} \exp(-xs^{1/2}) &= \left\{ C \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{t}} \right\} \\ &= \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-v^2} dv \right\} \end{aligned}$$

を用いて上式を解く。

結果だけを書くと

$$z_1(x,t) = E_1 \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha(2vx_0+x)/2\sqrt{t}}^{\alpha(2(v+1)x_0-x)/2\sqrt{t}} e^{-v^2} dv \right\}$$

同じく
$$z_2(x,t) = E_2 \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha((2v+1)x_0-x)/2\sqrt{t}}^{\alpha((2v+1)x_0+x)/2\sqrt{t}} e^{-v^2} dv \right\}$$

が得られる。

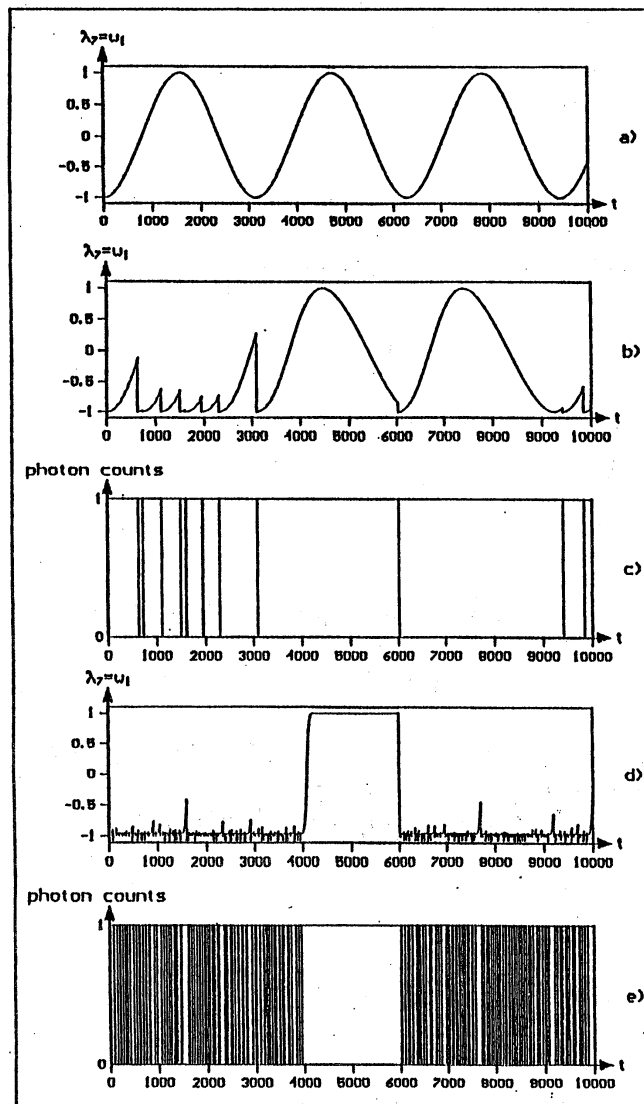
例えば無限に長い棒の温度は

$$z(x,t) = 100 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0.378x/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-v^2} dv$$

である。

5. 例：Zenon 効果

Zenon 効果とは 2 つの量子系が相互作用している場合 1 つの系を励起したときにバックアクションでもう 1 つの系に影響が及ぶときに発現する。これを下図に示す。



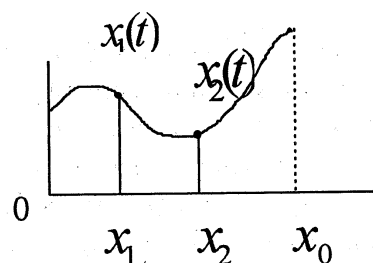
R.Wawer (Univ. Stuttgart)

(a) は系がレーザー光を連続照射することによってラビ振動をしていることを示す。(b) は系のバックアクションによってラビ振動がモディファイされていることを示す。この

図において垂直の線が系がフォトンを放出することを示す。

(c) はフォトンカウンティングにより光子を検出していることを示す図である。これをランダムテレグラフシグナルという。ここで系を強く駆動すると系はきわめてシンギュラーになり、フォトンカウンティングもシンギュラーになる。これが図(e)である。これを Zenon 効果という。

次に 3 節に述べた連続体モデルに適用することを考える。



この図において x_1 を駆動した時 x_2 がどうなるかが問題である。まだ未解決であるが、恐らく上記のような Zenon 効果が現われると期待される。⁴⁾ もしかしたら新しい現象が現われるかもしれない。今のところ何とも言えないが・・・。

1) 吉田耕作「演算子法 — 一つの超函数論 —」

東京大学出版会 (1982).

2) R.P.Feynman, "Quantum Mechanical Computers", Optics

News 11, 11 ~ 20 (1985).

3) C.R.Bennett, Physics Today, Oct. (1995).

4) T.Fukumi, (to be published).