

整礎集合上の部分関数の有限微分閉包 について

新潟大学経済学部 西澤輝泰
(Teruyasu Nishigawa)

§ 0. はじめに

与えられた部分関数 ω から, それを含む帰納的構造を抽出しこれを拡張して ω の自然な拡張である関数 $\bar{\omega}$ を得ようとすることは, 帰納的推論の本質的要素であろう。帰納的構造は単純なものから複雑なものまで種々あり得るが, 本論文では, 最も単純なものとして有限木オートマトンの構造を抽出する方法を提示する。

§ 1. 部分関数に関する記法

部分関数 $\varphi: A \rightarrow B$ について, φ の定義域を $D(\varphi)$ で表す。即ち $D(\varphi) = \{x \in A; (\exists y \in B) \varphi(x) = y\}$ である。

$X \subset A$ に対し, $\varphi(X) = \{y \in B; (\exists x \in X \cap D(\varphi)) \varphi(x) = y\}$ とおく。また, $y \in B$ に対し, $\varphi^{-1}(y) = \{x \in D(\varphi); \varphi(x) = y\}$ とし, $Y \subset B$ に対し, $\varphi^{-1}(Y) = \bigcup_{y \in Y} \varphi^{-1}(y)$ とする。

2つの部分関数 φ, ψ について,

$$(\forall x \in D(\varphi)) [x \in D(\psi) \wedge \varphi(x) = \psi(x)]$$

となつていふとき, φ は ψ の制限, ψ は φ の拡張であるといふ, $\varphi \sqsubset \psi$ と表す。

空でない集合 W について, $W \rightarrow W^m$ の部分関数 f なる族を $\Pi_m(W)$ と表す。 $m=0$ も許容し, W^0 は仮空の要素と唯一つからなる集合 $\{\varepsilon\}$ であるとする。 $\vec{f} \in \Pi_m(W)$ について, m を $d(\vec{f})$ と表す。

$\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)$ は,

$$d(\vec{f}) = m \wedge \bigwedge_{i=1}^m [f_i \in \Pi_1(W) \wedge D(f_i) = D(\vec{f})] \\ \wedge (\forall x \in D(\vec{f})) \vec{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

なることを表す。

$$\Pi(W) = \bigcup_{m=0}^{\infty} \Pi_m(W) \quad \text{と置く。}$$

§2. 部分関数による部分関数の微分

集合 W 上の部分関数 ω が $\vec{f} \in \Pi(W)$ により微分可能とは,

$$(\forall x, y \in D(\vec{f}) \cap D(\omega)) [\vec{f}(x) = \vec{f}(y) \rightarrow \omega(x) = \omega(y)]$$

が成り立つことをいう。次のことが明らかである。

- (1) $\vec{f}$ が 1対1 なら, 任意の ω が $\vec{f}$ により微分可能。
- (2) $\vec{f}$ が $D(\vec{f}) \cap D(\omega)$ 上一定値をとるならば, ω も

$D(\vec{f}) \cap D(\omega)$ 上一定値をとるとき、かつそのときに限り
 ω は $\vec{f}$ により微分可能である。

部分関数 $\omega: W \rightarrow A$ が $\vec{f} \in \Pi_m(W)$ により微分可能
 であるとき、その微分 $\partial_{\vec{f}} \omega$ は $W^m \rightarrow A$ の部分関数とし
 て次のように定められる。

$$(\partial_{\vec{f}} \omega)(\vec{x}) = a \iff (\exists y \in D(\vec{f}) \cap D(\omega)) [\vec{f}(y) = \vec{x} \wedge \omega(y) = a]$$

即ち、 $D(\partial_{\vec{f}} \omega) = \vec{f}(D(\omega))$ であり、 $\vec{x} \in D(\partial_{\vec{f}} \omega)$ に対し

$\{\partial_{\vec{f}} \omega(\vec{x})\} = \omega(\vec{f}^{-1}(\vec{x}))$ である。 ω が関数で
 かつ $\vec{f}$ が onto であれば $\partial_{\vec{f}} \omega$ も関数になる。

ω が $\vec{f} \in \Pi_0(W)$ で微分可能のときは、 $\partial_{\vec{f}} \omega$ は未定
 義要素または定数であって、 $\{\partial_{\vec{f}} \omega\} = \omega(D(\vec{f}))$ である。

§3. 場合分け変換

$\mathcal{F} \subset \Pi(W)$ について、次の (1), (2) が成り立つとき、
 $\mathcal{F}$ は W 上の場合分け変換であるという。

(1) $\mathcal{F}$ は有限集合

(2) $\{D(\vec{f}); \vec{f} \in \mathcal{F}\}$ が W の分割を構成する。即ち、

$$(\forall \vec{f} \in \mathcal{F}) D(\vec{f}) \neq \emptyset \wedge \bigcup_{\vec{f} \in \mathcal{F}} D(\vec{f}) = W$$

$$\wedge (\forall \vec{f}, \vec{g} \in \mathcal{F}) [\vec{f} \neq \vec{g} \rightarrow D(\vec{f}) \cap D(\vec{g}) = \emptyset].$$

特に W が半順序 $<$ に関して整礎集合で、任意の $\vec{f} \in \mathcal{F}$
 について $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)$ とすると、

$\bigwedge_{i=1}^m (\forall x \in D(\vec{f})) f_i(x) \not\cong x$ が成り立つならば,
 $\mathcal{F}$ は場合分け降下変換である, という。

W 上の部分関数 ω が W 上の場合分け変換 $\mathcal{F}$ により微分可能である, とは ω が $\mathcal{F}$ の任意の元により微分可能であることという。このとき,

$$\bigvee_{\vec{f} \in \mathcal{F}} (x \in D(\vec{f}) \wedge \omega(x) = (\partial_{\vec{f}} \omega)(\vec{f}(x)))$$

 が任意の $x \in D(\omega)$ について成り立つ。

§4. 部分関数の有限微分閉包

$H \in A^m \rightarrow A$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) の関数からなる有限集合とする。 $W \rightarrow A$ の部分関数 $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ と W 上の場合分け変換 $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ とからなる系 $\Gamma = \{H; \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n\}$ は次のことが成り立つとき有限微分閉包と云ふ, という。即ち,
 各 $i = 0, 1, \dots, n$ について ω_i が $\mathcal{F}_i$ で微分可能で,
 任意の $\vec{f} \in \mathcal{F}_i$ に対し, $d(\vec{f}) = m$ とするとき, H の元 $h: A^m \rightarrow A$ と番号 $j_1, \dots, j_m \in \{0, 1, \dots, n\}$ が存在して,
 任意の $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \vec{f}(D(\omega_i))$ に対し,

$$(\partial_{\vec{f}} \omega_i)(\vec{x}) = h(\omega_{j_1}(x_1), \dots, \omega_{j_m}(x_m))$$
 となる。
 この関係を $\partial_{\vec{f}} \omega_i = h\langle \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_m} \rangle$ と略記する。
 ここでもし W が整礎集合で, $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ が

場合分け降下変換であるときは, Γ は停止性の有限微分閉包をなすという。

さて, $\Gamma = \{H; \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n\}$ を停止性の有限微分閉包とする。このとき,

$$i=0 \left\{ \begin{array}{l} \bigvee_{\vec{f} \in \mathcal{F}_i} (x \in D(\vec{f}) \wedge \tilde{\omega}_i(x) = h(\tilde{\omega}_{j_1}(f_1(x)), \dots, \tilde{\omega}_{j_m}(f_m(x)))) \\ \quad \quad \quad (\text{ただし, } \vec{f} = (f_1, \dots, f_m), \omega_{\vec{f}} = h(\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_m})) \end{array} \right.$$

(もし $d(\vec{f})=0$ なら任意の $\vec{f}$ に対し $\omega_{\vec{f}}$ が未定義でなければ),
 系により, $\overline{W}$ 上の関数 $\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n$ が定まり, 明らかに $\bigwedge_{i=0}^n (\omega_i \sqsubseteq \tilde{\omega}_i)$ である。この $\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n$ を, $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ から Γ によって定まる関数である、という。もし $\mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_n$ の元と H の元の計算法が与えられれば上記の系は $\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n$ を計算する再帰プログラムである。 $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ が関数である場合は, これを計算する再帰プログラムである。

§5. 部分関数の木集合による表現

$\Gamma = \{H; \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n\}$ を停止性の有限微分閉包とする。 $\mathcal{F} = \bigcup_{i=0}^n \mathcal{F}_i$ とおく。 $\mathcal{F}$ の元を節点の名称とし, $\vec{f}$ を名称とする節点の子の個数が $d(\vec{f})$ に等しいような有限木すべての集合を $T_{\mathcal{F}}$ とする。 $\tau \in T_{\mathcal{F}}$ について,

τ の root の名を $\text{root}(\tau)$, また τ の高さ $\text{height}(\tau)$ で表すとして, $i=0, 1, \dots, n$ に対し $T_{\mathcal{F}}$ の部分集合 T_i を次により定める。ただしここで, $\tau \in T_{\mathcal{F}}$, $\text{root}(\tau) = \vec{f}$, $d(\vec{f}) = m$ とする。

(1) $\text{height}(\tau) = 0$ (即ち $m = 0$) のとき,

$$\tau \in T_i \iff \vec{f} \in \mathcal{F}_i$$

(2) $\text{height}(\tau) > 0$ (即ち $m > 0$) のとき,

$$\tau = \vec{f} \langle \tau_1, \dots, \tau_m \rangle, \quad \text{root}(\tau_j) = \vec{f}_j \quad (j=1, \dots, m),$$

$$\alpha_{\vec{f}} \omega_i = h \langle \omega_{k_1}, \dots, \omega_{k_m} \rangle \quad \text{として},$$

$$\tau \in T_i \iff \bigwedge_{j=1}^m \tau_j \in T_{k_j}$$

即ち, $T_0, T_1, \dots, T_n$ は, $\mathcal{U}_i = \{ \vec{f} \in \mathcal{F}_i; d(\vec{f}) = 0 \}$ とおいて, 木集合方程式系

$$\begin{cases} i=0 \\ \vdots \\ n \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} T_i = \bigcup_{\vec{f} \in \mathcal{F}_i} \vec{f} \langle T_{k_1}, \dots, T_{k_m} \rangle \cup \mathcal{U}_i \\ \text{(ただし, } d(\vec{f}) = m, \alpha_{\vec{f}} \omega_i = h \langle \omega_{k_1}, \dots, \omega_{k_m} \rangle \text{)} \end{array} \right.$$

の唯一解として定まる正規木集合である。

さて, T による $\omega_i(x)$ の計算過程は次により定められる。木 $\text{rep}_i(x) \in T_{\mathcal{F}}$ により表現される。ただし $x \in D(\omega_i)$ とする。

(1) $x \in D(f)$, $\vec{f} \in \mathcal{F}_i$, $d(\vec{f}) = 0$ のとき,

$$\text{rep}_i(x) = \vec{f}$$

(2) $x \in D(\vec{f})$, $\vec{f} \in \mathcal{F}_i$, $d(\vec{f}) = m > 0$ のとき,

$$\text{rep}_i(x) = \vec{f} \langle \text{rep}_{k_1}(f_1(x)), \dots, \text{rep}_{k_m}(f_m(x)) \rangle$$

(ただし, $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)$, $\omega_i = h \langle \omega_{k_1}, \dots, \omega_{k_m} \rangle$)

$\widetilde{T}_i = \{ \text{rep}_i(x) ; x \in D(\omega_i) \}$ とおく。 $\widetilde{T}_i$ は部分関数 ω_i で表現する木集合である。 $\widetilde{T}_i \subset T_i$ は明らかであるが、特に $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ が関数であって、 $\overbrace{d(\vec{f}) > 0 \text{ なる}}^{\text{すべての}}$ $\vec{f} \in \mathcal{F}_i$ が *onte* である場合は ω_i が関数であるので $\widetilde{T}_i = T_i$ となる。 ω_i は正規木集合により表現される。更にこのとき A が有限集合であれば、任意の $a \in A$ について $\widetilde{T}_i^a = \{ \text{rep}_i(x) ; x \in \omega_i^{-1}(a) \}$ も正規木集合となる。

§6. 単純微分閉包

停止性の有限微分閉包 $\Gamma = \{ H ; \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n ; \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n \}$ において, $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_1 = \dots = \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$ であり, かつ $d(\vec{f}) > 0$ なる任意の $\vec{f} \in \mathcal{F}$ が *onte* であるとき, Γ は単純微分閉包であるといひ, $\Gamma = \{ H ; \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n ; \mathcal{F} \}$ と略記する。このとき, §4 の $\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n$ を計算する再帰プロセスは, *root-to-frontier* の出力する木オートマトンとみなせる。即ち,

(1) このオートマトンの状態は $\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n$.

(2) $\vec{f} \in \mathcal{F}$, $d(\vec{f}) = m$, $\partial_{\vec{f}} \omega_i = h \langle \omega_{k_1}, \dots, \omega_{k_m} \rangle$ とすると, 計算状況の遷移は次のようになる。

$m > 0$ のとき,

$$(\tilde{\omega}_i, \vec{f} \langle \tau_1, \dots, \tau_m \rangle) \xrightarrow{\text{出力 } h} \{(\tilde{\omega}_{k_1}, \tau_1), \dots, (\tilde{\omega}_{k_m}, \tau_m)\}$$

$m = 0$ のとき,

$$(\tilde{\omega}_i, \vec{f}) \xrightarrow{\text{出力 } h} \cdot \quad (\text{即ち } h \text{ を出力して停止する})$$

特に, 任意の $\vec{f} \in \mathcal{F}$ について $d(\vec{f}) \leq 1$ のときは, この遷移を次のように表して全体を図示する = ことができた。即ち,

$d(\vec{f}) = 1$ なる $\vec{f} \in \mathcal{F}$ に対し, $\partial_{\vec{f}} \omega_i = h \langle \omega_j \rangle$ として,

$$\textcircled{\tilde{\omega}_i} \xrightarrow{\vec{f}/h} \textcircled{\tilde{\omega}_j}, \quad \text{また } d(\vec{f}) = 0 \text{ なる } \textcircled{\tilde{\omega}_i} \xrightarrow{\vec{f}/h} \cdot$$

今, 特にアルファベット Σ をとり $W = \Sigma^*$ とし, $\mathcal{F}$ を,

$$\mathcal{F} = \{\text{null}\} \cup \{f_\sigma; \sigma \in \Sigma\}; \quad d(\text{null}) = 0, \quad D(\text{null}) = \{\varepsilon\},$$

$d(f_\sigma) = 1, \quad D(f_\sigma) = \sigma \cdot \Sigma^*, \quad f_\sigma(\sigma \cdot x) = x$ なるものとする。このとき, W 上の任意の^(部分)関数は $\mathcal{F}$ で微分可能である。この

とき, $\partial_{\text{null}} \omega$ は $\partial_\varepsilon \omega$ で, また $\partial_{f_\sigma} \omega$ は $\partial_\sigma \omega$ で表

$$\text{し, } \partial_{\sigma_k} (\partial_{\sigma_{k-1}} (\dots (\partial_{\sigma_1} (\partial_\varepsilon \omega)) \dots)) \text{ は } \partial_{\sigma_1 \dots \sigma_k} \omega$$

と表す。更にこのとき, アルファベット Δ に対し, $A = \Delta^*$ と

$$\text{し, } \tilde{\Delta}^* = \{h_\gamma; \gamma \in \Delta^*\}; \quad h_\gamma(z) = \gamma z \quad \text{とすれば, 単}$$

$$\text{純微分関数 } \Gamma = \{H; \omega_0, \dots, \omega_n; \mathcal{F}\} \text{ は } H \subset \tilde{\Delta}^* \cup \{\varepsilon\}$$

(ただし 任意の $\omega: W \rightarrow A$ に対し, $\partial_\varepsilon \omega = \varepsilon$) なるように

定めると, Γ の定めし再帰プログラムは一般系列機械 (gem) に至る。即ち, $\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n$ は gem 字像とす。また, W と $\tilde{\omega}$ とは ω と同じにとり, A を有限集合とし, $H = A \cup \{id\}$ (ただし id は $A \rightarrow A$ の恒等字像) とすると, 単純微分閉包 Γ の定めし再帰プログラムは Moore 型系列機械 (状態のみに依存する出力を出す有限オートマトン) で, 状態 $\tilde{\omega}_i$ の出力は $\partial_{\varepsilon} \omega_i$ である。($\partial_{\varepsilon} \omega_i$ が未定義の場合は, 任意に値を設定すればよい。) このとき任意の関数 $\omega: \Sigma^* \rightarrow A$ と任意の $x \in \Sigma^+$, $y \in \Sigma^*$ に対し, $(\partial_x \omega)(y) = \omega(xy)$, $\partial_{\varepsilon} \omega = \omega(\varepsilon)$ である。

参考文献

1. T. Nishizawa, Automaton Programs and Regular Functional Expressions - On An Extension of Derivatives, Bull. Informatics and Cybernetics, vol. 21, No. 1~2, Research Assoc. of Statistical Sci., 1984
2. 西澤輝泰, 述語の微分について (その3), 京大数理解析研究所講義録 591号, 1986
3. 西澤輝泰, 述語の微分について, 電子通信学会技術研究報告, vol. 86, No. 60 (コンピュテーション研究會), 1986