

数理経済学における不等式

慶大 渡部 隆一

§1 Edgeworth の予想

経済学における Edgeworth の予想 [1] に関連して, 集合の non-convexity の measure とそれを評価する不等式を考える必要が生じたので, それについて紹介したい。

Edgeworth の予想については [2] に解説があるが, 数学的にきちんとしたモデルを作り部分的に解決したのは [3], [4] である。

— 記号 —

R^n : Euclidean space Ω : non-negative orthant

T : Set of traders m : T の member の数

$\succsim_t$: preference relation of $t \in T$

ω_t : resource of $t \in T$, $\omega_t \in \Omega$

p : price vector, $p = [p_1, \dots, p_n]$, $p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$

$\langle x, y \rangle$: inner product

Def. 1. $\sum_{t \in T} x_t = \sum_{t \in T} \omega_t$, $x_t \in \Omega$ を満たす $\{x_t\}$ を allocation
 といい、 T のいかなる部分集合 S をとっても、

$$\sum_{t \in S} y_t = \sum_{t \in S} \omega_t, y_t \succeq_x x_t, (t \in S), \exists s \in S, y_s \succ_s x_s$$

となる $\{y_t\}$ が存在しないとき、 $\{x_t\}$ を Core と呼ぶ。

Def. 2. $\langle p, x_t \rangle \leq \langle p, \omega_t \rangle$ であって、 $\langle p, y_t \rangle \leq \langle p, \omega_t \rangle$,
 $y_t \succ_x x_t$ となる y_t が存在しないような p と allocation $\{x_t\}$
 の組を competitive equilibrium といひ、その $\{x_t\}$ を
 equilibrium allocation と呼ぶ。

自然な仮定の下に eq. a. が Core に属することは直ちに
 いえるが、Edgeworth の予想とは次のことである。

『 m の数を増すにつれて Core は次第に shrink して、ついに
 eq. a. と一致する 』

— Debreu の model —

1. Preference relation :

- a) $x \succeq_x x$ b) $x \succeq_x y, y \succeq_x z \Rightarrow x \succeq_x z$ c) 任意の x ,
 y について $x \succeq_x y$ または $y \succeq_x x$.

2. Insatiability : $\forall x \in \Omega, \exists y \in \Omega; y \succ_x x$.

3. Convexity : $\{y \mid y \succeq_x x\}$ は convex.

etc.

T は m 個の type よりなり, 各 type には r 人の trader が存在し, 同一の type の trader は同一の preference と同一の resource を持っているとする。このような経済では, $r \rightarrow \infty$ のとき Core は次方に shrink して eg. a. に極限では一致する。

— Aumann の model —

$T = [0, 1]$ closed interval

allocation ; $x : T \rightarrow \Omega$, $\int_T x = \int_T \bar{z}$ ($\bar{z}$: resource)

Core ; $y(t) \succeq_t x(t)$ ($t \in S$), $\int_S y = \int_S \bar{z}$ となる S が存在しない。

1. Desirability : $x \geq y \Rightarrow x \succeq_t y$

etc.

このような経済では, Core と eg. a. は一致する。

Debreu の model は仮定が強すぎるし, Aumann の model では「eg. a. 以外の Core は存在しない」ということをいっているに過ぎない。これら 2 つの model を変形した多くの論文が発表されているが, 本質的にはこれら 2 つと大差はないようである。Starr は [6] において, Edgeworth の予想を解決するために, non-convexity の measure を導入することを提唱した。

2 Measure of Non-convexity

以下, 集合 S の convex hull を $[S]$ で表す。

Def. 3. compact set S の radius を次のように定義する。

$$\text{rad}(S) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{y \in S} |x - y|$$

Def. 4. 集合 S の inner radius を次のように定義する。

$$r(S) = \sup_{x \in [S]} \inf_{\substack{x \in [T], T \subset S \\ T: \text{finite}}} \text{rad}(T)$$

Th. (δ tarr) $\mathcal{F}$ を compact set S の family とする。

$\exists L, \forall S \in \mathcal{F}, r(S) \leq L$ ならば, $\mathcal{F}$ の任意の finite

subfamily $\mathcal{F}'$ と, $\forall x \in [\sum_{S \in \mathcal{F}'} S]$ に対して,

$$\exists y \in \sum_{S \in \mathcal{F}'} S, |x - y| \leq L\sqrt{n}$$

以下, δ tarr とは別の idea を紹介する。

Def. 5. $\mathbb{R}^n$ の部分集合で次の条件を満たす集合 B の全体 $\mathcal{B}$ となる family を $\mathcal{L}_\delta$ とする。

1) B は閉集合 2) $B \ni x \Rightarrow B \supset \{y \mid y \geq x\}$

3) $\exists \omega, \forall x \in B; \omega \leq x$

さらに, 次の 4) を満たす集合全体の作る family を $\mathcal{O}$ とする。

4) convex

次のことが成り立つ。

$$(1) \quad \alpha > 0, \mathcal{B} \ni X \Rightarrow \alpha X \in \mathcal{B} ; \quad \alpha > 0, \mathcal{O} \ni X \Rightarrow \alpha X \in \mathcal{O}$$

$$(2) \quad X, Y \in \mathcal{B} \Rightarrow X + Y \in \mathcal{B} ; \quad X, Y \in \mathcal{O} \Rightarrow X + Y \in \mathcal{O}$$

Def. 6. $\Pi = \{p \mid p = [p_i], p_i \geq 0, \sum p_i = 1\}$ とし、 $X \in \mathcal{O}$, $p \in \Pi$ に対して次のように定義する。

$$h(p, X) = \inf_{x \in X} \langle p, x \rangle$$

次のことが成り立つ。

$$(3) \quad \alpha > 0, X \in \mathcal{O} \Rightarrow h(p, \alpha X) = \alpha h(p, X)$$

$$(4) \quad X, Y \in \mathcal{O} \Rightarrow h(p, X + Y) = h(p, X) + h(p, Y)$$

$$(5) \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad \text{のとき,}$$

$$h(\lambda p + (1-\lambda)q, X) \geq \lambda h(p, X) + (1-\lambda)h(q, X)$$

$$(6) \quad x \in X^\circ, X \in \mathcal{O} \Leftrightarrow \forall p; \langle p, x \rangle > h(p, X)$$

Def. 7. $B \in \mathcal{B}$ の部分集合で $\mathcal{O}$ に属するもの全体を $\mathcal{O}(B)$ で表わし、次のように定義する。

$$R(B) = \inf_{X \in \mathcal{O}(B)} \sup_{p \in \Pi} \{h(p, X) - h(p, [B])\}$$

次が成立。

$$(7) \quad R(B) \geq 0 \text{ であつて, } R(B) = 0 \Leftrightarrow B \in \mathcal{O}$$

$$(8) \quad \alpha > 0, B \in \mathcal{B} \Rightarrow R(\alpha B) = \alpha R(B)$$

$$(9) \quad R(B_1 + B_2) \leq R(B_1) + R(B_2)$$

$$(10) \quad R(B + a) = R(B)$$

2.3 ニ, 三の結果

前々で定義した δ が, δ に属する集合の non-convexity を示す measure と考えられるが, 以下において δ に属する集合のベクトル和の non-convexity を δ を用いて評価しよう。

Def. 8. $x \in C$ があるとき, $|t|$ が十分小さなすべての t に対して $x + tx \in C$ となるならば, y を x における facial direction といい, x における facial direction 全体の集合を x における facial space といい, その次元を facial dimension と呼んで $d(x|C)$ で表わす。

Lemma 1. C が convex で, $x \in C$ ならば, x における facial space は linear space となる。これを $L(x|C)$ で表わす。

Lemma 2. C を convex set とする。 $x_1, x_2 \in C$ で $x_2 - x_1$ が x_1 における facial direction ならば,

$$d(x_2|C) \leq d(x_1|C)$$

であって, 等号は $x_2 - x_1$ が x_2 における facial direction になっているときに限り成り立つ。

Lemma 3. $x \in [\delta]$ とすると, δ の有限部分集合 T が存在して, $x \in [T]$, $\forall x' \in T$ に対して $x' - x$ が $L(x|[\delta])$ に属する。

次の定理が基本的な役割を演ずる。

Th. 1. $\mathcal{F}$ を L に属する集合の finite family とする。

$x \in [\sum_{S \in \mathcal{F}} S]$ とすると, $\mathcal{F}$ の分割 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ が存在して, $\mathcal{F}_1$ は高々 n 個の member よりなり, 次のように表わされる。

$$x \in \sum_{S \in \mathcal{F}_1} [S] + \sum_{S \in \mathcal{F}_2} S$$

proof.

$$x = \sum_{S \in \mathcal{F}} x(S), \quad x(S) \in [S]$$

と表現されるが, このような表現の中で,

$$\sum_{S \in \mathcal{F}} d(x(S) | [S])$$

が最小となるものをえらび,

$$\mathcal{F}_1 = \{S \mid x(S) \notin S\}, \quad \mathcal{F}_2 = \{S \mid x(S) \in S\}$$

とすると,

$$x = \sum_{S \in \mathcal{F}_1} x(S) + \sum_{S \in \mathcal{F}_2} x(S) \in \sum_{S \in \mathcal{F}_1} [S] + \sum_{S \in \mathcal{F}_2} S$$

$\mathcal{F}_1$ の member の数が高々 n であることをいえばよい。そのために, $S \in \mathcal{F}_1$ に対して, $x'(S) \in S$ で, $x'(S) - x(S)$ が, $x(S)$ における facial direction になるようにえらんだとき, これらが 1 次独立となることを証明する。もし, 1 次従属ならば,

$$\sum_{S \in \mathcal{F}_1} c(S) \{x'(S) - x(S)\} = 0 \quad (1)$$

となるすべては 0 でない実数の組 $c(S)$ が存在する。

$$x(t|s) = x(s) + c(s) \{x'(s) - x(s)\} t$$

$$I(s) = \{t \mid t \geq 0, x(t|s) \in [s]\}, \quad A = \bigcap_{s \in \mathcal{F}_1} I(s)$$

とすると, $I(s) = [0, \infty)$ となるのは, $[s] \in \mathcal{O}$ より,
 $c(s) \{x'(s) - x(s)\} \in \Omega$ のときに限る。 $\forall s \in \mathcal{F}_1$ に対して,
 $I(s) = [0, \infty)$ ならば, (1) より

$$\forall s; c(s) \{x'(s) - x(s)\} = 0 \quad \therefore \forall s; c(s) = 0$$

明らかに, $I(s)$ は t の正数値を含み, かつ閉区間である
 から, A は有界な 0 を下限とする閉区間 $[0, a]$ ($a > 0$) となる。

$$x = \sum_{s \in \mathcal{F}_1} x(t|s) + \sum_{s \in \mathcal{F}_2} x(s)$$

であり, $t \in A$ ならば $\forall s \in \mathcal{F}_1; x(t|s) \in [s]$ であるから,

$$\sum_{s \in \mathcal{F}_1} d(x(t|s) | [s]) \geq \sum_{s \in \mathcal{F}_1} d(x(s) | [s]) \quad (2)$$

$c(s) \{x'(s) - x(s)\}$ も $x(s)$ における facial direction である
 から, lemma 2 より

$$d(x(t|s) | [s]) \leq d(x(s) | [s]), \quad s \in \mathcal{F}_1, t \in A$$

ゆえに, (2) より $t \in A$ のとき,

$$\sum_{s \in \mathcal{F}_1} d(x(t|s) | [s]) = \sum_{s \in \mathcal{F}_1} d(x(s) | [s])$$

$x(t|s) - x(s)$ が $x(t|s)$ の facial direction になるから, $|u|$ が
 十分小さい正数 u に対して,

$$x(t|s) + u \{x(t|s) - x(s)\} = x(s) + c(s) \{x'(s) - x(s)\} (1+u)t$$

が $[s]$ に属する。すなわち $(1+u)t \in A$ となり, これは A の有
 界性に反する。以上より $\mathcal{F}_1$ の member は $n-1$ より多くない。

Lemma 4. $e = [1, \dots, 1]$, $B \in \mathcal{L} \Rightarrow [B] + k(B)e \subset B$

Lemma 5. $\mathcal{F}$ を $\mathcal{L}$ に属する集合の finite family とする。

$$d = \max_{S \in \mathcal{F}} k(S) \Rightarrow \sum_{S \in \mathcal{F}} [S] + nde \subset \sum_{S \in \mathcal{F}} S$$

proof. $x \in [\sum_{S \in \mathcal{F}} S] \Rightarrow x \in \sum_{S \in \mathcal{F}_1} [S] + \sum_{S \in \mathcal{F}_2} S$

$\mathcal{F}_1$ の member の数を l とすれば, 定理 1 より $l \leq nd$,

$$\begin{aligned} x + nde &\in \sum_{S \in \mathcal{F}_1} ([S] + de) + (n-l)de + \sum_{S \in \mathcal{F}_2} S \\ &\subset \sum_{S \in \mathcal{F}_1} S + (n-l)de + \sum_{S \in \mathcal{F}_2} S \subset \sum_{S \in \mathcal{F}} S \end{aligned}$$

Th. 2. $\mathcal{F}$ を $\mathcal{L}$ に属する集合の finite family とすると,

$$k\left(\sum_{S \in \mathcal{F}} S\right) \leq n \left\{ \max_{S \in \mathcal{F}} k(S) \right\}$$

proof

$$\sum_{S \in \mathcal{F}} [S] + nde \in \mathcal{O}\left(\sum_{S \in \mathcal{F}} S\right), \quad d = \max_{S \in \mathcal{F}} k(S)$$

$$\forall p; \quad h(p, \sum_{S \in \mathcal{F}} [S] + nde) - h(p, \sum_{S \in \mathcal{F}} [S]) = nd$$

$$\therefore \sup_p \left\{ h(p, \sum_{S \in \mathcal{F}} [S] + nde) - h(p, \sum_{S \in \mathcal{F}} [S]) \right\} = nd$$

$$\therefore k\left(\sum_{S \in \mathcal{F}} S\right) \leq nd$$

Cor. $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$ で $\sup_{S \in \mathcal{F}} k(S) = d$ ならば, $S_i \in \mathcal{F}$ のとき,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} k\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i\right) = 0$$

References

- [1] Edgeworth, E. Y. [1881], Mathematical Psychics.
London: C. Kegan Paul.
- [2] Shubik, M. [1959], "Edgeworth market games"
in A. W. Tucker and R. D. Luce (eds), Contributions to
the Theory of Games, IV. Princeton univ. press.
- [3] Debreu, G. and H. Scarf [1963] "A limit
Theorem on the Core of an economy," International
Economic Review 4. 235 ~ 246.
- [4] Debreu, G. [1963] "On a Theorem of Scarf,"
Review of Economic Studies, 30. 177 ~ 180
- [5] Aumann, R. J. [1964] "Markets with a Continuum
of Traders," Econometrica, 32, 39 ~ 50
- [6] Starr, R. [1969] "Quasi-equilibria in markets
with nonconvex preferences," Econometrica, 37, 25 ~ 38
- [7] Arrow, K. J. and Hahn, F. H. [1971], General
competitive analysis: Holden-day, INC.