

ホモロジー次元 1 のイデアルの 構造定理と 2 次元正規半群

名大・理 渡辺 純三

$R = k[X, Y]$ を体 k 上の 2 変数多項式環とする。初めに R の単項式イデアルの射影分解を考察する。(単項式イデアルとは、単項式によって生成されるイデアルである。)

$0 \subset R$ を単項式イデアル,

$$f_i = X^{\lambda_i} Y^{\mu_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \quad \text{を } 0 \text{ の}$$

生成元とすれば、指数 λ_i, μ_i の間には、

$$(*) \quad \begin{cases} \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{n+1} \\ \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_{n+1} \end{cases}$$

を仮定して一般性を失わない。

今、 $\gamma_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}, \quad \rho_i = \mu_{i+1} - \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$ とおけば $R/0$ の射影分解は次の形をとる:

$$(L) \quad 0 \rightarrow R^m \xrightarrow{M} R^{m+1} \xrightarrow{F} R \rightarrow R/\mathfrak{a}$$

すなわち,

$$M = \begin{bmatrix} -Y^{a_1} & X^{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -Y^{a_2} & X^{r_2} & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ 0 & \dots & & & -Y^{a_m} X^{r_m} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{m+1} \end{bmatrix}.$$

以下, (L) を $R/\mathfrak{a}$ の射影分解の標準形と呼ぶ。勿論 $\Rightarrow$ 射影分解は極小であり, $m \neq 0$ なら $\text{hd}_R R/\mathfrak{a} = 2$ である。

次に, Z を新しい変数として, $A = R[Z] = k[X, Y, Z]$, $\varphi: R \rightarrow A$ を $X \mapsto XZ, Y \mapsto YZ$ で定義する。

φ は Hochster [2] の用語で, pure と呼ばれる写像のクラスに属する。特に, R のイデアル $\mathfrak{a}$ について, $\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{a})A) = \mathfrak{a}$ が成り立つから, φ はイデアルの生成元の最小個数を保つ。即ち $\mu_R(\mathfrak{a}) = \mu_A(\varphi(\mathfrak{a})A)$ 。(安全のため $\mathfrak{a} \subset R$ を有次イデアルとしておく。でなければ, μ は確実な意味を持たないかも知れない。)

従って, $\Omega \subset R$ が主イデアルでない限り, $\text{hd}_A A/(\Omega)A$ は, 2 または 3 となるが, 次の定理は — 少し意外だが — $\text{hd} = 2$ となる場合は, 単項式イデアルについてだけでも成り立つ事を示す。

定理 1. $\Omega = (f_1, f_2, \dots, f_{n+1}) \subset R$ を単項式イデアルとする。 f_i の指数は, 初めに注意した条件 (*) を満たすとする。この時, $\text{hd}_A A/(\Omega)A = 2$ のための必要十分条件は, ある番号 i_0 について $\deg f_{i_0} < \deg f_{i_0+1}$ かつ, すべての $i > i_0$ について, $\deg f_i \leq \deg f_{i+1}$ が成り立つことである。(この条件は $i \mapsto \deg f_i$ のグラフに極大がないと表現し得るだろう。)

初めに与えた R/Ω の射影分解を考へれば容易にわかる通り, $Y^{a_i} f_i = X^{r_i} f_{i+1}$, 従って

$$a_i + \deg f_i = r_i + \deg f_{i+1}, \quad \text{故に, 定理 1}$$

の条件は

$$\exists i_0 \text{ について } a_{i_0} > r_{i_0} \implies a_i \geq r_i \quad \forall i > i_0.$$

と, 置き換えることが出来る。よって 次の系を得る。

系 $\text{hd}_A A/\phi(r)A = 2$ のための1つの
十分条件は $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$, $\Delta_1 \leq \Delta_2 \leq \dots \leq \Delta_n$
である。

定理1の証明には, Buchsbaum-Eisenbud
による定理 ([1] Theorem) を使うが, 詳しいことは
省略する。定理1のものよりは, その証明の方が
Buchsbaum-Eisenbud の定理の強力かつ有用性を
示すという意味に於いて面白い。

さて, 今度は, $k = \bar{k}$, $\text{ch } k = 0$ とし, 対角化
された有限アーベル群 $G \subset GL(2, k)$ の $R = k[x, y]$
への作用を考えよう。

R^G で不変式部分環を, $(R^G)R = \Omega$ で
不変式によって生成する R のイデアルを表わせば, Ω は
単項式イデアルであり, $\Omega = (f_1, f_2, \dots, f_{n+1})$, 但し,
 f_i は単項式, とすれば, $R^G = k[f_1, f_2, \dots, f_{n+1}]$
となる。

この場合の Ω の射影分解を記述するため,
有限数列 $\Omega(p, r)$ を次の通り定義する。

定義 有限数列 $r_1, r_2, \dots, r_n$ を
形式的に $r_1 \oplus r_2 \oplus \dots \oplus r_n$ と書く。

2つの自然数 $p \geq r > 0$ に対して、数列
 $\oplus(p, r)$ を帰納的に

$$(i) \quad p = r \text{ の時, } \oplus(p, r) = r$$

$$(ii) \quad p > r \text{ の時, } \oplus(p, r) = r \oplus \oplus(p', r'),$$

$$p' = p - r$$

$$r' \equiv r \pmod{p'}, 0 < r' \leq p'$$

により定義する。容易にわかる事だが、 $\oplus(p, r)$ は
単調減少である。即ち、 $\oplus(p, r) = r_1 \oplus r_2 \oplus \dots \oplus r_n$ に対し、
 $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$ である。又明らかに $\sum r_i = p$
である。

R^G を $R = k[x, y]$ の有限 p -グループに対する
不変式部分環、 $U = (R^G)R$ とする。この時、 r_i, λ_i を
 R/U の射影分解の標準形に現わす、 X 及び Y の
指数 (カ1頁参照) とすれば、適当な $p \geq r > 0$ と
 $q \geq \lambda > 0$ に対して、

$$r_1 \oplus r_2 \oplus \dots \oplus r_n = \oplus(p, r)$$

$$\lambda_m \oplus \lambda_{m-1} \oplus \dots \oplus \lambda_1 = \oplus(q, \lambda) \quad \text{と} \text{する。}$$

(逆向きの順序に注意)

G が鏡像変換を含まなければ, G は巡回群であり,
 その生成元を $\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$ とすれば, ω_i は両方共

1 の原始 p 乗根である。但し, $p = o(G)$ 。よって

$\omega_2 = \omega_1^r$, $\omega_1 = \omega_2^\Delta$ とする Δ 及び r が存在
 するから, $0 < r < p$, $0 < \Delta < p$ にとれば,

$$r_1 \oplus \cdots \oplus r_m = \Phi(p, r)$$

$$\Delta_m \oplus \cdots \oplus \Delta_1 = \Phi(p, \Delta) \quad \text{である。}$$

定理1の系 及び $\Phi(p, r)$ の単調減少性
 から, 次の命題を直ちに得る。

命題 RG を有限アーベル群とする
 R の不変式環とする。 $\varphi: R \rightarrow R[z]$ を以前同様
 $X \mapsto Xz$, $Y \mapsto Yz$, $(RG)R = 0$ とすれば,

$$\text{hd}_A A/\varphi(0)A = 2 \quad \text{である。}$$

この命題から 次の定理が従う。

定理2. $T = GL(1, k)$ 及び $A = k[X, Y, Z]$ に

作用しているとする。(証明を簡単にするため、 $k = \bar{k}$, $chk = 0$ とする。) この時、 $\dim A^T = 2$ なら、

$$\text{hd}_A A/(A^T)A = 2$$

である。

証明 $t \in T$ の A の作用を

$$\begin{bmatrix} t^a & & \\ & t^b & \\ & & t^{-p} \end{bmatrix}, \quad a, b, p > 0$$

と仮定して可い。(先づ作用を対角化する。指数の正負零の組合せが上記以外の場合は、 χ_A に帰着するか、又は、定理の主張が自明となる。)

次の図式を考えよう。

$$\begin{array}{ccc} B = k[U, V, W] & & \\ \alpha \nearrow & & \nwarrow \phi \\ A = k[X, Y, Z] & & S = k[VW, VW] \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & A^T & \end{array}$$

== 1. α は、 $U = X^{\frac{1}{a}}$, $V = Y^{\frac{1}{b}}$, $W = Z^{\frac{1}{p}}$ とした

自然な埋め込みである。 T の A への作用は B に拡張されて、その作用は、 $U \mapsto tU$, $V \mapsto tV$, $W \mapsto t^{-1}W$ となり、その不変式環が S である。

一方、 A は B の有限アーベル群による不変式環と見做せるから、 $A^T \rightarrow S$ は、 S の有限アーベル群による不変式環として得られる。目標である

$\text{hd}_A A/(A_+^T)A = 2$ を示すためには、 $\text{hd}_B B/(A_+^T)B = 2$ を示せば可い。(α は忠実に平坦であるから。)

所が、図式は可換だから、 $(A_+^T)B$ を A_+^T を S を経由して得たものと思えば、上記の命題を $B \supset S \supset A^T$ に適用して、 $\text{hd}_B B/(A_+^T)B = 2$ を直ちに得る。(証明終)

注意 $H \subset \mathbb{Z}_+^2$ を (加法的) 半群とすれば、 $k[H] = k[X^\lambda Y^\mu \mid (\lambda, \mu) \in H] \subset R = k[X, Y]$ として、半群環を得る。 $k[H]$ が正規環の時、 H を正規半群と呼ぶ。 2次元正規半群 H に対して、適当なアーベル群 G (よって $k[H] = R^G$) として得られる。

一方 $A = k[X, Y, Z]$ の 1次元トーラス T による

不変式環 A^T も 正則半群環 であるから 適当な R^G に同型である。 実際, $T \ni t$ の A の作用を

$$\begin{bmatrix} t^a & & \\ & t^b & \\ & & t^{-p} \end{bmatrix} \quad a, b, p > 0$$

とすれば, $G = \langle \begin{pmatrix} \omega^a & \\ & \omega^b \end{pmatrix} \rangle$, ω は 1 の 原始 p 乗根
として, $A^T \cong R^G$ となり, X の同型は

$$A = k[X, Y, Z] \longrightarrow R = k[X, Y]$$

$$X \mapsto X, Y \mapsto Y, Z \mapsto 1$$

により誘導される。 つまり, A^T の生成元が

$$X^{\lambda_i} Y^{\mu_i} Z^{l_i}, \quad i=1, 2, \dots, n+1$$

は, $R^G = k[X^{\lambda_i} Y^{\mu_i} \mid i=1, 2, \dots, n+1]$ である。

以前同様, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{n+1}$

$\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_{n+1}$ とする様に

番号を付けておけば, 定理 1 の証明を再考する事によつて, l_i の値の不等号の向きは $\geq$ から $\leq$ へ
高々 1 度 変わる, 即ち,

$$\exists i_0; \quad l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_{i_0} \leq l_{i_0+1} \leq \dots \leq l_{n+1}$$

とわかる。 二つの定理 2 の意味する所である。

(以上)

Bibliography

- [1] D. Buchsbaum and D. Eisenbud. What makes a complex exact?
Journal of Alg. 25 (1973), 259-268.
- [2] M. Hochster and J. L. Roberts. Rings of invariants of reductive
groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay.
Advances in Math. 13 (1974), 115-175.