

## 有限平板を過ぎる高レイノルズ数の流れ

東大 理 吉 沢 敏

### § 1. 序論

有限平板を過ぎる粘性流の問題は半無限平板の問題と共に多くの関心をひいてきた。それは実際的な興味と共に、幾何学的簡単さが Navier-Stokes 方程式の厳密解を得るという目的に適しているという事情にもよると思われる。半無限平板を過ぎる流れは Imai,<sup>1)</sup> Goldstein<sup>2)</sup> によって境界層型の、Carrier and Lin<sup>3)</sup> によって Stokes 型の、著者<sup>4)</sup> によって Oseen 型の逐次近似によって研究された。又著者<sup>5)</sup> van de Vooren and Dijkstra,<sup>6)</sup> Botta and Dijkstra<sup>7)</sup> によって数値解が与えられた。更に著者<sup>8)</sup> は Imai, Goldstein の解を potential 流の領域を通して Carrier and Lin の解と結びつける方法を提案して、Carrier and Lin の解に含まれるいくつかの未定定数を評価した。

有限平板の場合もいわゆる Blasius の解が高レイノルズ数

においてはよい結果を与えるが、板の両端においては不正確になる。板の有限性を考えに入れるために、Ku<sup>9)</sup>は境界層型の逐次近似を行い、drag に対して実験とよく合う結果を与えた。しかしながら彼の理論は境界層型の近似に基づいているために、後縁の近傍においては正確な流れの様子を与えることはできない。

Imai<sup>10)</sup>は高レイノルズ数においては、後縁近傍の解は上流側において Blasius の解に接続すべきであるという考えに基づいて、新しい近似方法を提案した。この方法は Oseen 近似と類似の方法であり、一様流のかわりに Blasius の解を近似する一様な shear flow を用いている。Stewartson<sup>11)</sup>はこの方法によって後縁近傍の流れを詳細に調べ、板の上の抵抗係数を求めた。又著者<sup>12)</sup>は境界層の中の一様な shear flow の適当な平均速度を用いて調べた。最近、Stewartson<sup>13)</sup>は triple-deck structure による方法を提案しているが、この方法にも未だ不名確な点が多いように思われる。

この問題に対する数値解としては、Dennis and Dunwoody<sup>14)</sup>、Dennis and Chang<sup>15)</sup>による Fourier 展開の方法がある。彼等によって得られた数値は現在、時点においてはもっとも信用のおけるものと考えられるが、Fourier 展開においてとられ

る項数に対する制限のため、後縁の近傍においては不正確になっているように思われる。

本論文の目的は高レイノルズ数における有限平板を過ぎる粘性流のより正確な解を求めることにある。この目的のために、我々は得られた解が上流側では Blasius の解に、下流側では Goldstein<sup>16)</sup> の near wake の解に接続するという条件のもとに Navier-Stokes の方程式を数值的に解いた。得られた解に基づいて作成された数表を用いて、我々は任意の高レイノルズ数における板の上の抵抗係数を知ることができる。

## § 2. 基礎方程式と境界条件

非圧縮性粘性流体の 2 次元定常運動を支配する Navier-Stokes の方程式は次式で与えられる：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} &= \nu \Delta \omega, \\ \omega &= -\Delta \psi. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

ここで  $(x, y)$  はデカルト座標であり、 $\psi$  は流れの函数、 $\omega$  は渦度、 $\nu$  は動粘性係数である。長さ  $L$  の板は  $x$  軸の正の部分にあり、前縁はその原点に一致している。

今、我々は  $(x, y)$  を  $L$  で、 $\psi$  を  $UL$  ( $U$  は一様流の速度) で、 $\omega$  を  $U/L$  で無次元化する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} &= \frac{1}{R} \Delta \omega, \\ \omega &= -\Delta \psi. \end{aligned} \right\} (2.2)$$

ここで  $R (= UL/\nu)$  はレイノルズ数である。

境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \psi &= 0 & \text{at } y = 0, \\ \psi_y &= 0 & \text{at } y = 0, 0 < x < 1, \\ \omega &= 0 & \text{at } y = 0, x > 1 \text{ and } x < 0, \\ \psi &\rightarrow y, \omega \rightarrow 0 & \text{as } x^2 + y^2 \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} (2.3)$$

### § 3. 後縁近傍での基礎方程式と境界条件

後縁近傍 ( $x \sim 0$ , ただし座標原点は後縁に移されている) においては、上流側, Blasius の解は

$$\psi \sim \frac{\gamma}{2} R^{1/2} y^2, \quad \omega \sim -\gamma R^{1/2} \quad (3.1)$$

によって与えられる ( $\gamma = 0.33206$ )。他方下流側においては、上流側の Blasius の解によって決定される Goldstein<sup>16)</sup>

near wake の解によって与えられる。

$$\psi_g = R^{-1/2} x^{2/3} f_g(R^{1/2}y/(3x^{1/3})). \quad (3.2)$$

ここで  $f_g$  は

$$\left. \begin{aligned} f_g''' + 2f_g f_g'' - f_g'^2 &= 0, \\ f_g(0) = f_g''(0) &= 0, \quad f_g''(\infty) = 9. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

我々の目的は上流側及び下流側において、それぞれ上の2つの解に接続する Navier-Stokes の方程式の解を求めることにある。それ故に、方程式及び境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} &= \frac{1}{R} \Delta \omega, \\ \omega &= -\Delta \psi, \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

a. c.

$$\left. \begin{aligned} \psi &= 0 & \text{at } y=0, \\ \psi_y &= 0 & \text{at } y=0, -1 < x < 0, \\ \omega &= 0 & \text{at } y=0, x < -1 \text{ and } x > 0, \\ \psi &\rightarrow \frac{\gamma}{2} R^{1/2} y^2, \quad \omega \rightarrow -\gamma R^{1/2} & \text{as } x^2 + y^2 \rightarrow \infty, x < 0, \\ \psi &\rightarrow \psi_g, \quad \omega \rightarrow \omega_g & \text{as } x^2 + y^2 \rightarrow \infty, x > 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

大々  $R$  に対して、(3.4) と (3.5) を解くために、我々

は次のような新しい変数を導入する:

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= Y^{1/2} R^{3/4} x, & \hat{y} &= Y^{1/2} R^{3/4} y, \\ \hat{\psi} &= R \psi, & \hat{\omega} &= Y^{-1} R^{-1/2} \omega. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

(3.6) を (3.4), (3.5) に代入して,  $R \rightarrow \infty$  の極限をとると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \hat{y}} &= \Delta \hat{\omega}, \\ \hat{\omega} &= -\Delta \hat{\psi}, \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

a. c.

$$\left. \begin{aligned} \hat{\psi} &= 0 & \text{at } \hat{y} &= 0, \\ \hat{\psi}_{\hat{y}} &= 0 & \text{at } \hat{y} &= 0, \hat{x} < 0, \\ \hat{\omega} &= 0 & \text{at } \hat{y} &= 0, \hat{x} > 0, \\ \hat{\psi} &\rightarrow \frac{1}{2} \hat{y}^2, \hat{\omega} \rightarrow -1 & \text{as } \hat{x}^2 + \hat{y}^2 &\rightarrow \infty, \hat{x} < 0, \\ \hat{\psi} &\rightarrow \hat{\psi}_g, \hat{\omega} \rightarrow \hat{\omega}_g & \text{as } \hat{x}^2 + \hat{y}^2 &\rightarrow \infty, \hat{x} > 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

ここで

$$\hat{\psi}_g = \hat{x}^{2/3} f_g(\hat{y}/(3\hat{x}^{1/3})).$$

(3.7), (3.8) を解析的に解くことは困難であるので, 数値的に解くことを試みる。よく知られてゐるように, 後縁は流

れの特異点になっているために, (3.7), (3.8) に差分近似を施す前に特異点を適当に処理する必要がある。我々は  $(\hat{x}, \hat{y})$  のかわりに放物座標  $(\xi, \eta)$  を用い, 更に著者によって半無限平板の場合に用いられた方法<sup>5)</sup> に基づいてこの問題を解く。詳細に関しては ref. 17 を参照されたい。

#### § 4. 結果

板の上の抵抗係数  $C_f$  は  $C_f = -\rho \nu \omega(x, 0) / \rho U^2$  ( $x < 0$ ) によって定義される。後縁近傍の  $C_f$  は次式によって与えられる:

$$C_f = Y R^{-1/2} F_s(Y^{1/2} R^{3/4} x_1). \quad (4.1)$$

ここで  $x_1$  は  $L$  によって無次元化された後縁からの距離,  $F_s(Y^{1/2} R^{3/4} x_1) = -\omega(\hat{x}, 0)$ 。現在の計算によって求められた  $F_s$  の値は Table 1 に与えられている。他方, 後縁近傍を除いては

$$C_f = Y R^{-1/2} (1 - x_1)^{-1/2}. \quad (4.2)$$

(4.1) と (4.2) に matching rule を適用して

$$C_f = Y R^{-1/2} [(1 - x_1)^{-1/2} + F_s(Y^{1/2} R^{3/4} x_1) - 1]. \quad (4.3)$$

(4.3) と Table を用いて, 我々は任意の高レイノルズ数にお

ける  $C_f$  の値を知ることができる。Fig. 1に  $R = 100, 1000$  に対する  $C_f$  の値が plot されてゐる。Dennis and Dunwoody<sup>14)</sup> の結果との比較は  $R = 1000$  においてはかなりよく一致してゐることを示してゐる。

Stores 型の近似より  $F_S(z)$  は次式で与えられる:

$$F_S(z) \sim a z^{-1/2} + b z^{1/2} + \dots \quad \text{as } z \rightarrow 0. \quad (4.4)$$

ここで  $z = \gamma^{1/2} R^{3/4} z_1$ . (4.4) と我々の数値解との比較より

$$a = 1.24, \quad b = 0.71 \quad (4.5)$$

これらの結果は Stewartson<sup>11)</sup> ( $a = 1.08, b = 0.42$ ), 著者<sup>12)</sup> ( $a = 1.13, b = 0.56$ ) によって与えられた値にかなり近いことがわかる。

## References

- 1) I. Imai: J. Aero. Sci. 24 (1957) 155.
- 2) S. Goldstein: Lectures on Fluid Mechanics (Interscience, New York, 1960).
- 3) G.F. Carrier and C.C. Lin: Quart. appl. Math. 6 (1948) 63.
- 4) A. Yoshizawa: J. Phys. Soc. Japan 30 (1971) 1747.
- 5) A. Yoshizawa: J. Phys. Soc. Japan 28 (1970) 776.
- 6) A.I. van de Vooren and D. Dijkstra: J. Engineering Math. 4 (1970) 9.
- 7) E.F.F. Botta and D. Dijkstra: Report TW - 80, Math. Department, University of Groningen (1970).
- 8) A. Yoshizawa: to be submitted to J. Phys. Soc. Japan.
- 9) Y.H. Kuo: J. Math. and Phys. 32 (1953) 83.
- 10) I. Imai: Proc. 11th Intern. Congr. Appl. Math. (Springer, Berlin, 1964) p.663.
- 11) K. Stewartson: Proc. Roy. Soc. A306 (1968) 275.
- 12) A. Yoshizawa: J. Phys. Soc. Japan 27 (1969) 469.
- 13) K. Stewartson: Mathematika 16 (1969) 106.
- 14) S.C.R. Dennis and J. Dunwoody: J. Fluid Mech. 24 (1966) 577.
- 15) S.C.R. Dennis and G-Z Chang: Phys. of Fluids 12, Suppl. II (1969) 88.
- 16) S. Goldstein: Proc. Cambridge Phil. Soc. 26 (1948) 1.
- 17) A. Yoshizawa: to be published in J. Phys. Soc. Japan 31.

Table 1 The values of  $F_S(z)$ .

| $z$  | $F_S(z)$ | $z$   | $F_S(z)$ | $z$    | $F_S(z)$ |
|------|----------|-------|----------|--------|----------|
| 0.00 | $\infty$ | 11.52 | 1.330    | 62.72  | 1.051    |
| 0.08 | 4.573    | 13.52 | 1.297    | 72.00  | 1.036    |
| 0.32 | 2.584    | 15.68 | 1.267    | 81.92  | 1.025    |
| 0.72 | 2.055    | 18.00 | 1.240    | 92.48  | 1.019    |
| 1.28 | 1.845    | 20.48 | 1.220    | 103.68 | 1.013    |
| 2.00 | 1.728    | 23.12 | 1.201    | 115.52 | 1.009    |
| 2.88 | 1.642    | 25.92 | 1.188    | 128.00 | 1.003    |
| 3.92 | 1.571    | 28.88 | 1.173    | 141.12 | 1.001    |
| 5.12 | 1.509    | 32.00 | 1.144    | 154.88 | 1.000    |
| 6.48 | 1.455    | 38.72 | 1.112    | 169.28 | 1.000    |
| 8.00 | 1.408    | 46.08 | 1.089    | 184.32 | 1.000    |
| 9.68 | 1.366    | 54.08 | 1.071    | 200.00 | 1.000    |

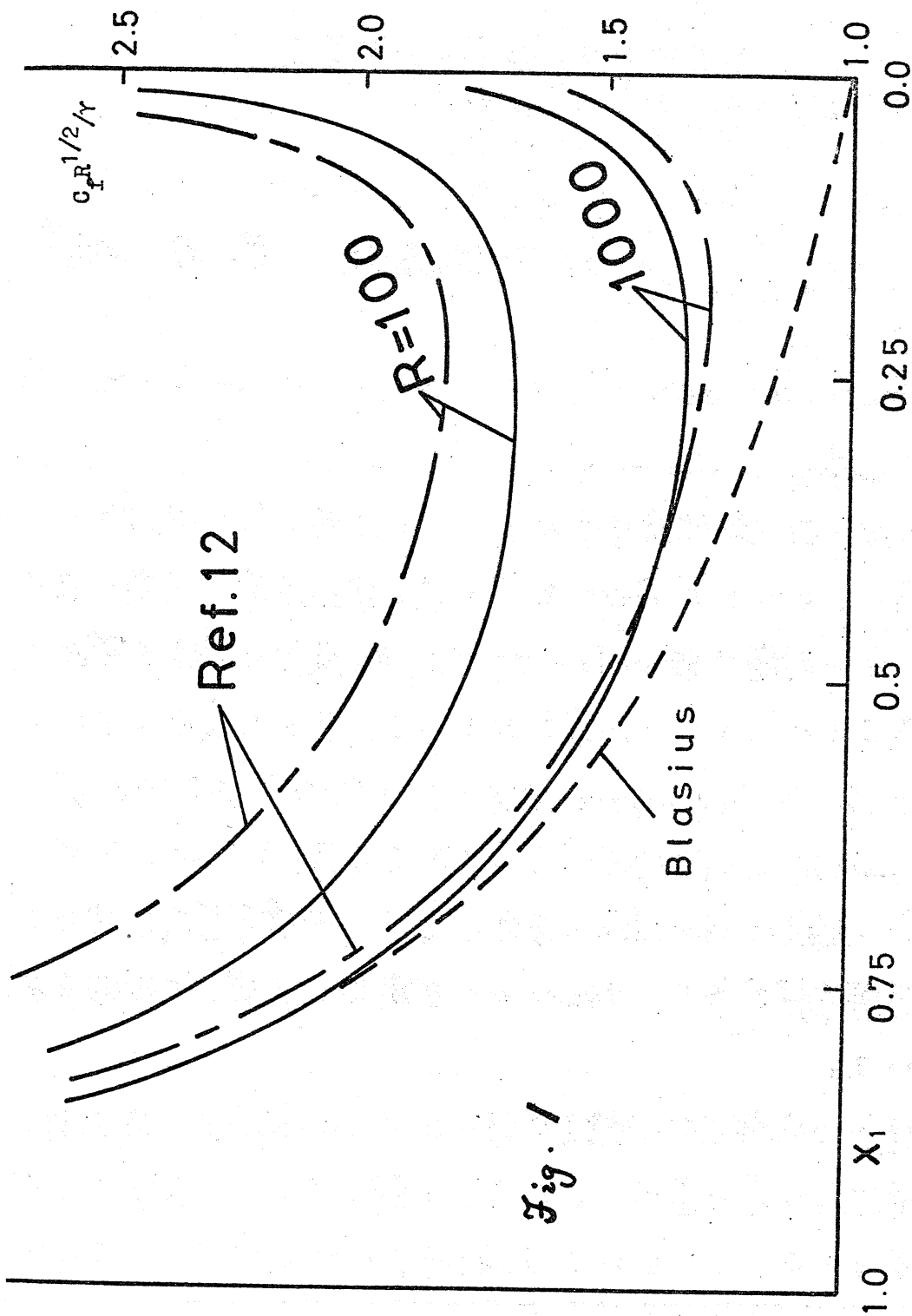


Fig. 1