

ランダム ディラック フェルミオンの状態密度： 無限個の負のスケーリング次元のオペレーターとフリージング転移

東京大学大学院 工学系研究科 笠 真生¹

Paul Scherrer Institute Christopher Mudry

京都大学 基礎物理学研究所 古崎 昭

ランダムネスによって引き起こされる 2 次元の臨界現象の例としては、整数量子 Hall 効果におけるプラトール間転移やランダムボンド Ising 模型などが代表例として挙げられる。これらの模型において、ランダム・クリティカルポイントの性質を理解すること ($\sim$ すべての臨界指数、マルチフラクタル・スペクトラムを再現するような critical theory の同定)、さらに、固定点の周辺および固定点の間の繰り込み群の流れを理解することは難しい問題として残されている。ランダムネスによって引き起こされる臨界現象にはクリーンな系におけるそれとは異なった側面があり、事情を複雑にしている。その一つとして、例えば、有効理論が non-unitary な理論になることなどが挙げられる。

今回我々は、ランダムネスがゲージ場として導入されている 2 次元格子上的アンダーソン局在の問題について議論を行った。[1] 連続極限をとると、この模型はディラックフェルミオンが種々のランダムネスを感じている模型に還元され、前述の量子ホール効果のプラトール間転移やランダムフェーズ XY 模型 (ゲージグラス) などと密接な関係がある。この問題は、カイラル対称性と呼ばれる特殊な対称性が重要な役割を果たすこと、ランダム系に特有な臨界現象を色々と見ることができると、などから興味を持たれてきた。すなわち、バンド中央の波動関数は 2 次元であるのにもかかわらず非局在でありマルチフラクタル的であること、また、非局在状態の存在に対応して状態密度に発散的な振舞が見られることなどである。さらに、ランダムネスの強さを変化させると、波動関数のマルチフラクタル・スペクトラム [2] や状態密度 [3, 4] にフリージング現象が起こることが明らかにされてきた。

我々は、この問題に対し、超対称の方法と繰り込み群を使って解析を行った。この模型のバンドの中央は、 $gl(N|N)$ のスーパーカレント代数で記述される臨界点 (線) であり [5]、有効理論は non-unitary になる。この事情を反映して、理論に無限個の負のスケーリング次元のオペレーターが登場する。このことは一見病理的に思えるが、実は以下で見るように、マルチフラクタル的なこの系の特徴を如実に顕している。

ランダム系でローカルな物理量を考えると、それは空間の各点各点で異なるランダム変数であり、なんらかの分布関数で記述される。さらに、今考えている系では、物理量はあらゆるスケールで大きく揺らいでおり、分布関数は非常にブロードであると予測される。このような系に繰り込み群 (粗視化とリスケーリング) を適用することを考えると、その

¹ E-mail: ryuu@pothos.t.u-tokyo.ac.jp

物理量のランダムネス平均だけではなく、分布関数そのものも繰り込みによって異なった関数形になるはずである。このような分布関数の繰り込みを記述するには、関数の形を特徴づけるための無限個のパラメタ (分布関数のモーメント) が必要であり、実は、先程の無限個のスケーリングオペレーターのカップリングがそれに相当しているのである。

技術的に言うと、無限個のレレバントなオペレータの存在のため、我々が解くべき繰り込み群方程式は無限個のカップルした常微分方程式系となる。これを適当に有限次のモーメントまで打ち切って解くことは許されない。なぜなら、系はマルチフラクタル的であり、高次のモーメントの影響は無視できないからである。その代わりに、カップリングの従う繰り込み群方程式系から、分布関数自身の従う繰り込み群方程式を直接導くことを考える。するとこれは、今の場合 KPP 方程式と呼ばれる良く知られた非線形偏微分方程式になることが分かり、解くことができる。[6]

KPP 方程式は転移現象を示す。この転移は、スピングラスの問題において、低温相でスピンのランダムに凍結する現象に類似のものと考えることができるため、フリージングと呼ばれている。このフリージング転移は、Anderson 局在の問題の状態密度に直接反映される。フリージング転移を考慮すると、バンド中央での状態密度の発散は、これまで信じられてきた Gade 型の発散 [7] $|\varepsilon|^{-1} \exp(-c|\ln \varepsilon|^{1/2})$ (ε :energy) ではなく、 $|\varepsilon|^{-1} \exp(-c|\ln \varepsilon|^{2/3})$ で与えられることがわかる。

ランダムネスによって引き起こされる非自明な固定点 (線) に直接アクセスでき、そのスペクトラムを完全に決定できること、そして、理論が non-unitary であることを反映して負のスケーリング次元がオペレーターが無限個存在すること、さらに、そのようなランダム系特有の難しさがあるのにもかかわらず、固定点の回りでの繰り込み群の流れをコントロールできこと、しかも、それがランダム系に特有な臨界現象に直接関係していること。これらの点で、ランダムディラックフェルミオンの問題は、ランダム系に特有な様々な概念や手法を発展させるうえでの実験室と位置づけることができる。このモデルのより深い理解、および得られた結果を他のモデルにフィードバックしておくことは今後の課題である。

参考文献

- [1] C. Mudry, S. Ryu, and A. Furusaki, Phys. Rev. B **67** (2003), 064202.
- [2] C. C. Chamon, C. Mudry, and X.-G. Wen, Phys. Rev. Lett. **77** (1996), 4194.
- [3] O. Motrunich, K. Damle, and D. A. Huse, Phys. Rev. B **65** (2002), 064206.
- [4] B. Horowitz and P. Le Doussal, Phys. Rev. B **65** (2002), 125323.
- [5] S. Guruswamy, A. LeClair, and A. W. W. Ludwig, Nucl. Phys. **B583** (2000), 475.
- [6] D. Carpentier and P. Le Doussal, Nucl. Phys. **B588** (2000), 565.
- [7] R. Gade, Nucl. Phys. B **398** (1993), 499.