

Ⅳ. 量子論と統計力学

- Ⅳ. 1. 十河 清 (東大・教養物理) 相関関数の理論
- Ⅳ. 2. 飛田 和男 (北大・工) Bethe ansatz とソリトン
- Ⅳ. 3. 石川 正勝 (道都短大) Massive-Thirring – 量子 sine-Gordon系の有限
温度励起とスペクトル
- Ⅳ. 4. 後藤 喬雄 (京大・教養物理) 核磁気緩和による磁氣的ソリトンの検証

Ⅴ. 物性におけるソリトン

- Ⅴ. 1. 右衛門佐重雄 (名大・理) 生体系におけるソリトン
- Ⅴ. 2. 石井 晃 (早大・理工) 物性における Kubo-Namiki-Ohba 型ソリトン
- Ⅴ. 3. 川上 則雄 (阪大・工) Anderson model の厳密解
興地 斐男 (阪大・工)
- Ⅴ. 4. 太田 隆生 (九大・理) Dynamics of Interface
- Ⅴ. 4' 川崎 恭治 (九大・理) 一次元的系での Kink 集団の Kinetics (コメント)
- Ⅴ. 5. 本間 重雄 (名大・工) 結晶成長の理論
- Ⅴ. 6. 甲斐 昌一 (九工大) 化学反応を伴った界面に生ずるソリトン状運動
今崎 正秀 (九工大)

YANG-BAXTER 関係式

東大・教養 阿久津 泰 弘

I. Introduction

近年、量子完全積分系の研究は大きく進展した。^{1~4)} その過程で一見異なった方法・分野の共通性が認識されてきた。多くの「解ける」モデル・問題が共通・類似の構造をもち、互いに深く関連していることが明らかになった。その構造の基盤となるのが Yang-Baxter 関係式 (YBR) と呼ばれるものである。この名称は、Bethe 仮説に関する Yang の仕事⁵⁾ と eight-vertex model の厳密解に関する Baxter の仕事⁶⁾ に由来する。前者に於ては Bethe 仮説の適用可能条件式 (S 行列の因子化条件式)、後者に於ては transfer matrix が交換するための条件式として現われたが、両者が実は本質的には同等であったというわけである。YBR 及びそれに類似の関係式 (広義の YBR) は次の 4 つの場合に登場する：①因子化された S 行列の理

論 ②量子逆散乱法 ③ 2次元 vertex model ④ 2次元 IRF model。①, ②は1+1次元の場の理論の問題, ③, ④は統計力学の問題である。これらの問題は互いに同値であることも多いが, 一方それぞれに独自の面ももっている。本稿ではYBRを軸に, (広い意味での) 量子完全積分系に関する研究の review を行なうとともに, 現状における問題点・今後の課題についても触れてみたい。

II. 因子化されたS行列 (factorized S-matrix) の理論

S行列が因子化されるとは, 一般のN体のS行列が2本のS行列の積になることをいう。この事実は, Bethe 仮説で解ける系 (e.g. 1次元 δ -関数 bose gas⁷⁾) では知られていたが, Yang⁵⁾ は Bethe 仮説が適用できるための条件式として, S行列が満たすべき関係式 (後に述べる因子化方程式と同等) を与えた。最近ではモデルの具体形 (Lagrangian の形など) から離れて, (因子化する) S行列のみを問題にする立場・理論があり⁸⁾ 本章ではそれについて述べる。なお, 今のところ完全積分性とS行列の因子化の同値性に対する一般的証明はない。

1. S行列の因子化

1+1次元における因子化されたN体散乱を考える (Fig. 1)。各 θ_i は i 番目の粒子の rapidity である。一般に in-state, out-state は $\{\theta_i\}$ のみで決まるから, S行列は中間状態での散乱の順序に依ってはならない。このことを $N=3$ の場合に図示すると Fig. 2 のようになる。今, 多成分の系を考え, $(i, j) \rightarrow (k, l)$ の process に対する2本のS行列を $S_{ij}^{kl}(\theta)$ (θ は in-state の rapidity difference) とする。Fig. 2 に相当する式は,

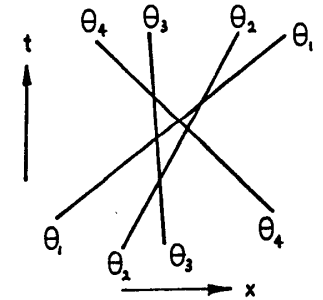


Fig. 1

$$\begin{aligned} & S_{ij}^{pq}(\theta_{12}) S_{pk}^{lr}(\theta_{13}) S_{qr}^{mn}(\theta_{23}) \\ &= S_{jk}^{pq}(\theta_{23}) S_{iq}^{lm}(\theta_{13}) S_{rp}^{lm}(\theta_{12}), \end{aligned} \quad (1)$$

ただし $\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$, くり返した添字は和をとるものとする。

(1)式は因子化方程式 (factorization equation) と呼ばれ YBR の一つである。

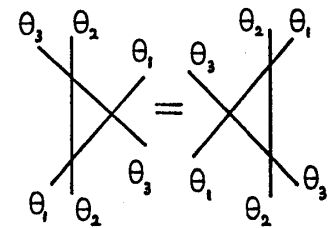


Fig. 2

2. Zamolodchikov 代数

次のような交換関係をもつ代数 $\{A_i(\theta)\}_{i,\theta}$ を考える (S_{ij}^{kl} は 1 で導入した S 行列):

$$A_i(\theta_1) A_j(\theta_2) = \sum_{kl} S_{ij}^{kl}(\theta_{12}) A_l(\theta_2) A_k(\theta_1) \quad (2)$$

この代数は, Zamolodchikov の (symbolic) 代数と呼ばれ, $A_i(\theta)$ は rapidity θ をもち, i と

いう「color」をもつ粒子の生成作用素と解釈される。因子化方程式はこの代表の結合則の表現に他ならない： $(A_i(\theta_1) A_j(\theta_2)) A_k(\theta_3) = A_i(\theta_1) (A_j(\theta_2) A_k(\theta_3))$ 。 $A_i(\theta)$ は単に形式的なものともみなし得るが、次章に述べる量子逆散乱法により、具体的に構成できる場合もある。

3. 因子化方程式の解法・解

S 行列には因子化条件の他に、次のような条件が要求される：

- ① ユニタリー性
- ② 解析性 (meromorphic)
- ③ 対称性 (内部対称性, C・P・T 不変性, 交差対称性)
- ④ 初期条件：通常は $S_{ij}^{kl}(\theta=0) = \delta_{il} \delta_{jk}$ 。

実際に解くには微分方程式に変換する。また、いわゆる CDD－不定性があるため minimal な解 (最少特異性解) が問題にされる。

4. 現在までに得られている解

種々の内部対称性をもつ解が得られている： $O(N)^{(8), (9), (10)}$, $U(N)^{(11)}$, $Z_4^{(12, 13)}$, $GL(2, \mathbf{C})^{(14)}$, $Z_N^{(15, 16)}$, $S_N^{(17)}$ など。

Ⅲ. 量子逆散乱法 (Quantum Inverse Scattering Method)

量子逆散乱法 (QISM) には、Thacker 達流のもの^{2, 18)} と Faddeev 達流^{1, 19, 20)} のものがあるが、前者は連続系を直接扱うのに対して後者は一旦離散化して扱う。また、前者は実空間の量 (波動関数) を扱うのに適するが後者は代数関係を扱うのに適している。本章では後者について述べる。

1. Transition matrix (Jost matrix, Monodromy matrix)

$L_n(\lambda)$ を離散系 (若しくは離散近似した系) の量子的 Lax-Moser pair (の片われ) とする (λ は spectral parameter)。Transition matrix $T_N(\lambda)$ は次式で定義される。

$$T_N(\lambda) = L_N(\lambda) L_{N-1}(\lambda) \cdots \cdots L_1(\lambda) \equiv \prod_n^{\widehat{}} L_n(\lambda), \quad (3)$$

ここで N は 1 次元格子の格子点の数である。QISM においては $T_N(\lambda)$ の要素間の交換関係が重要であるが、これは $L_n(\lambda)$ (局所的な量) の満たす次の関係式から直接得られる：

$$R(\lambda, \mu) [L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu)] = [L_n(\mu) \otimes L_n(\lambda)] R(\lambda, \mu), \quad (4)$$

ここで $R(\lambda, \mu)$ は非特異 C 数行列で、これから

$$R(\lambda, \mu) [T_N(\lambda) \otimes T_N(\mu)] = [T_N(\mu) \otimes T_N(\lambda)] R(\lambda, \mu), \quad (5)$$

が帰結される。(4)式はYBRの一つである。

2. 代数化された Bethe 仮説法

技術的詳細を略し大筋を述べる。 L_n が 2 行 2 列の場合 (non-linear Schrödinger, Sine-Gordon など) を考えると $T_N(\lambda)$ は次の形をもつ:

$$T_N(\lambda) = \begin{pmatrix} A_N(\lambda) & B_N(\lambda) \\ B_N(\lambda) & D_N(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

(5)式から得られる交換関係により $A_N + D_N (= T_r T_N)$ は保存量, B_N は生成演算子の役割をもつことがわかる。 $A_N + D_N$ (よってその λ -微分から得られる Hamiltonian など) の spectrum を求めるのに, $\{B_N(\lambda_1) \cdots B_N(\lambda_n) | 0\rangle\}_{[\lambda], n}$ を基底にとり, 交換関係のみを用いて純粹に代数的に Bethe 仮説法を実行することができる。

3. 量子的 Gel'fand-Levitan 方程式

古典系でそうであったように, 量子系でもはじめの場を T_N の要素 (散乱データ) で表現することができる (量子的 Gel'fand-Levitan 方程式を介して)。これにより, 相関関数の閉じた表式を得る道が開けた。本号の十河氏の解説を参照されたい。

4. 今までに QISM で扱われているモデル

non-linear Schrödinger,^{1,18,19)} Sine-Gordon,²⁰⁾ Toda-chain,¹⁾ XYZ-chain,^{21,22)} non-linear Schrödinger, Sine-Gordon の exact lattice version.²³⁾ 量子的 Gel'fand-Levitan 方程式。^{24~29)}

IV. 2次元 vertex model の統計力学

1. commuting transfer matrices

Baxter による eight-vertex model の厳密解に於て鍵となるのは「互いに交換する transfer matrix の族 (a family of commuting transfer matrices)」という概念であった。今, 問題を一般化して各 vertex の足がとり得る状態数を q (≥ 2) としよう。

Fig.3 のような (site n における) vertex に対する Boltzmann weight を $(L_n)_{ij}(k, l)$ とおき, L_n を $q \times q$ の行列を要素とする $q \times q$ の行列 (ij が block index, kl は block 内 index) とみなす。また, weight は spectral parameter λ によって parametrize されているとし, $L_n = L_n(\lambda)$ とする。Transfer matrix $T_N(\lambda)$ は次式で与えられる:

$$T_N(\lambda) = \text{Tr } L_N(\lambda) L_{N-1}(\lambda) \cdots L_1(\lambda), \quad (7)$$

ここで N は格子の構方向の大きさで, 境界条件は周期的とする。1 site あたりの free ener-

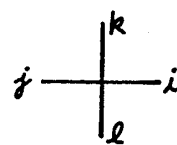


Fig.3

阿久津泰弘

gy f は, $A_{\max}^{(N)}$ を $T_N(\lambda)$ の最大固有値として $-\beta f = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln A_{\max}^{(N)}$ として得られる。Baxter は次の条件式から出発して $A_{\max}^{(N)}$ を求めた：

$$[T(\lambda), T(\mu)] = 0 \quad (\forall \lambda, \mu) \quad (8)$$

(8) 式が成立するには次式が成立すれば充分：

$$R(\lambda, \mu) [L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu)] = [L_n(\mu) \otimes L_n(\lambda)] R(\lambda, \mu), \quad (9)$$

ここで $R(\lambda, \mu)$ は $q \times q$ の非特異行列である。(9) 式は YBR の名称のいわれとなる関係式である。一見してわかるように, (9) 式は前章の (4) 式と全く同じであるから, vertex model は QISM 風に解くことができる。³⁰⁾

2. 因子化された S 行列との関係

Zamolodchikov¹²⁾ は次のことを指摘した：「全ての因子化 S 行列は対応する vertex model をもち, 因子化方程式 (1) は transfer matrix の交換条件 (9) に同値である」。具体的な対応関係は,

$$S_{ij}^{kl} = \begin{array}{c|c} & k \\ \hline j & \\ \hline & i \end{array} \quad l$$

また rapidity が自然な spectral parameter となる。この対応により, 解ける vertex model をみつける手段として因子化 S 行列の理論が用いられている。最近次々に得られている解ける vertex model は, ほとんどこの手段によっている。しかし一方で, 因子化 S 行列では再現されない, 解ける vertex model もある：例えば, 一般の非対称 weight をもつ six-vertex model。^{31, 32)} それでもなおこの系に対する YBR (9) は存在する。³³⁾

3. 1 次元量子 spin 系との関係

Baxter の公式³⁴⁾：

$$H = -d \ln T(\lambda) / d\lambda \big|_{\lambda=\lambda_0} \quad (10)$$

により, 2 次元 vertex model の transfer matrix と 1 次元量子 spin 系の Hamiltonian が対応する (λ_0 は $(L(\lambda=\lambda_0))_{ij}(\alpha\beta) \propto \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}$ となる点)。

4. 現在までに得られている解

ここでいう「解」とは YBR の解を指す。YBR の解が得られても, free energy までは求められていない場合が多い。

eight-vertex⁶⁾, 81-vertex³⁵⁾, 19-vertex³⁶⁾, 21-vertex³⁷⁾, general q -state^{38, 39)} 縦・横の state 数が異なるもの^{14, 22)}, 2-state model の classification³³⁾ など。

V. 2次元 IRF model の統計力学

1. IRF (Interaction-Round-a-Face) model⁴⁰⁾

IRF model とは、2次元正方格子の各格子点上の spin (一般に q state, $q \geq 2$) が、face 毎に相互作用しているものを言う。Fig4 の face configuration に対する Boltzmann weight を $W(abcd)$ とおく。Transfer matrix V は次式で定義される： $V(\sigma_1 \cdots \sigma_N | \sigma'_1 \cdots \sigma'_N) = \prod_{j=1}^N W(\sigma_j \sigma_{j+1} \sigma'_{j+1} \sigma'_j)$ 。一般化された star-triangle relation⁴⁰⁾ と呼ばれる次の関係式

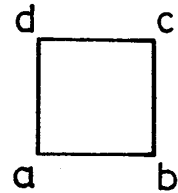


Fig.4

$$\sum_g W(bcga) W'(agef) W''(degc) = \sum_g W''(gfab) W'(bcdg) W(gdef) \quad (11)$$

が成立すると $[V, V'] = 0$ が言える (V' は weight W' に対する transfer matrix)。(11) は YBR の一種である。

2. vertex model との対応

Wu,⁴¹⁾ Kadanoff-Wegner⁴²⁾ は、eight-vertex model と 4 体相互作用をもつ Ising model (IRF model である) との等価性を示した。同様の対応関係は一般の q -state model に拡張できて、Fig.5 のようになる (● が IRF spin site)。この対応により、spin の一斉 shift に関して weight が不変 (Z_N -不変性) な IRF model は vertex model と等価 (YBR が同型になり、free energy が等しい) となる。vertex model に変換できる例としては、上記の他に、Potts model⁴³⁾, Ashkin-Teller model⁴⁴⁾ (ただし両者とも解けない) などがある。変換できない例としては、磁場あり Ising model (解けない), hard hexagon^{40, 45)} (解ける) など。

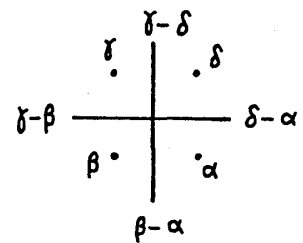


Fig.5

3. 現在までに解かれているモデル

上述の他に、注目すべきものとして $U(1)$ model⁴⁶⁾, Z_n model⁴⁷⁾ がある。この $U(1)$ model は、Plane rotator 的な spin 自由度をもつモデルで、さらに dual 変換したものは、roughening transition に対する SOS (Solid-On-Solid) model に非常に近いものとなっている。

VI. 現状における問題点・今後の課題

① Fermion 系に対する QISM。Fermion 系には、物理的応用上重要なものが多い (例えば Hubbard model, Anderson model etc) にもかかわらず、QISM はほとんどできていな

い。

② 代数化された Bethe 仮説法の完成。state 数 ≥ 3 の vertex model で、 $L_n(\lambda)|0\rangle$ が ($|0\rangle$ をどうとっても) 上三角 (下は下三角) にならない場合がある (local vacuum が存在しない)。このときは従来のままの Faddeev formalism は適用できないので、何らかの拡張が必要である。

③ 因子化 S 行列から、それを与えるモデル (Hamiltonian など) を構成する一般的方法。個別的には、ref 13 のような例 (non-relativistic Z_4 に相当する粒子系) はある。

④ classical YBR⁴⁾。

⑤ tetrahedron equation。2+1 次元の「string」の因子化 S 行列理論⁴⁹⁾ や 3 次元統計力学のモデルの commuting transfer matrix^{50, 51)} に関連する YBR の高次元版。

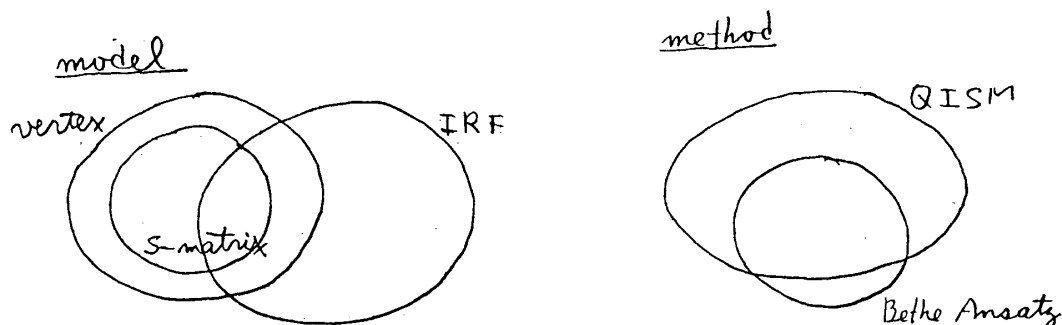
⑥ 多成分・多状態の解けるモデルをみつける。⁵²⁾

⑦ 量子的 Gel'fand-Levitan 法の完成

⑧ 「解けない」モデルへの応用。Perturbation の出発点としての「解ける」モデルの役割があり得る。もちろん、量子完全積分性の「安定性」の議論も必要 (「KAM の定理」に相当するもの)。

以上、思いつくまま挙げてみたが、多少現状では無理な問題もあるかも知れない。

最後に、本稿で述べた事柄の相互関係を模式的に表わしてみると次のようになる：



References

- 1) L. D. Faddeev, Soviet Scientific Reviews Math. Phys C1 (1981) 107.
- 2) H. B. Thacker, Rev. Mod. Phys. 53 (1981) 253.
- 3) 和達三樹, 日本物理学会誌 36 (1981) 786.
- 4) P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, in *Lecture Notes in Physics* 151 (Springer, 1982) p. 61.
- 5) C. N. Yang, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1312.

- 6) R. J. Baxter, *Ann. Phys.* **70** (1972) 193.
- 7) E. Lieb and W. Liniger, *Phys. Rev.* **130** (1963) 1605.
- 8) M. Karowski, H. -J. Thun, T. T. Truong and P. H. Weisz, *Phys. Lett.* **67B** (1977) 321.
- 9) A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B133** (1978) 525.
- 10) A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, *Ann. Phys.* **120** (1979) 253.
- 11) B. Berg, M. Karowski, V. Kurak and P. H. Weisz, *Nucl. Phys.* **B134** (1978) 125.
- 12) A. B. Zamolodchikov, *Comm. Math. Phys.* **69** (1979) 165.
- 13) K. Sogo, M. Uchinami, A. Nakamura and M. Wadati, *Prog. Theor. Phys.* **66** (1981) 1284.
- 14) P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin and E. K. Sklyanin, *Lett. Math. Phys.* **5** (1981) 393.
- 15) A. A. Belavin, *Nucl. Phys.* **B180** [FS2] (1981) 189.
- 16) A. Bovier, preprint.
- 17) V. V. Bazhanov and Yu. G. Stroganov.
- 18) H. B. Thacker and D. Wilkinson, *Phys. Rev.* **D19** (1979) 3660.
- 19) E. K. Sklyanin, *Doklad. Acad. Nauk. SSSR.* **244** (1979) 1337.
- 20) E. K. Sklyanin, L. A. Takhtadzhan and L. D. Faddeev, *Theor. Math. Phys.* **40** (1980) 688.
- 21) L. A. Takhtadzhan and L. D. Faddeev, *Russian Math. Surveys* **34** (1979) 11.
- 22) K. Sogo and M. Wadati, *Prog. Theor. Phys.* **68** (1982) 85.
- 23) V. E. Korepin and A. G. Izergin, preprint.
- 24) D. B. Creamer, H. B. Thacker and D. Wilkinson, *Phys. Rev.* **D21** (1980) 1523.
- 25)
- 26) M. Göckeler, *Z. Phys.* **C11** (1981) 125.
- 27) P. P. Kulish and F. A. Smirnov, *Phys. Lett* **90A** (1982) 74.
- 28) M. Imada, *Prog. Theor. Phys.* **68** (1982) 527.
- 29) K. Sogo and M. Wadati, *Prog. Theor. Phys.* **69** (1983) in press.
- 30) H. B. Thacker, *J. Math. Phys.* **21** (1980) 1115.
- 31) C. P. Yang, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 586.
- 32) B. Sutherland, C. P. Yang and C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 588.
- 33) K. Sogo, M. Uchinami, Y. Akutsu and M. Wadati, *Prog. Theor. Phys.* **68** (1982) 508.
- 34) R. J. Baxter, *Ann. Phys.* **70** (1972) 323.
- 35) Yu. G. Stroganov, *Phys. Lett.* **74A** (1979) 116.
- 36) A. B. Zamolodchikov and V. A. Fateev, *Sov. J. Nucl. Phys.* **32** (1980) 298.
- 37) V. A. Fateev, *Sov. J. Nucl. Phys.* **33** (1981) 761.
- 38) C. L. Schultz, *Phys. Rev. Lett.* **46** (1981) 6291.

表 實

- 39) J. H. H. Perk and C. L. Schultz, preprint.
- 40) R. J. Baxter, in *Fundamental Problems in Statistical Mechanics V*, E. G. D. Cohen ed. (North-Holland, 1980) p. 109.
- 41) F. Y. Wu, Phys. Rev. **B4** (1971) 2312.
- 42) L. P. Kadanoff and F. J. Wegner, Phys. Rev. **B4** (1971) 3989.
- 43) R. B. Potts, Proc. Camb. Phil. Soc. **48** (1952) 106.
- 44) J. Ashkin and E. Teller, Phys. Rev. **64** (1943) 178.
- 45) R. J. Baxter, J. Phys. **A13** (1980) L61.
- 46) V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov, Phys. Lett. **92A** (1982) 35.
- 47) V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov, Phys. Lett. **92A** (1981) 37.
- 48) 例えば, J. D. Weeks, in *Ordering in Strongly Fluctuating Condensed Matter Systems*, T. Riste ed. (Plenum, 1980) p. 293.
- 49) A. B. Zamolodchikov, Comm. Math. Phys. **79** (1981) 489.
- 50) V. V. Bazhanov and Yu. G. Stroganov, preprint.
- 51) M. T. Jaekel and J. M. Maillard, J. Phys. **A15** (1982) 1309.
- 52) K. Sogo and Y. Akutsu, preprint.

アインシュタイン方程式のベックルント変換

筑波大物理 表 實

相対論的な重力場の方程式 (Einstein 方程式) は次式で与えられる

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \kappa T^{\mu\nu}.$$

ここで $R^{\mu\nu}$, R は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ ($ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$) の 2 階微分までを含む曲率テンソル。 $T^{\mu\nu}$ は物質のエネルギー・運動量テンソルであり, 又 $\kappa (= \frac{8\pi}{c^4}G = 2.07 \times 10^{-48} \text{ s/g cm})$ はアインシュタイン定数と呼ばれる。この式を孤立した物体がその外部に作る重力場に適用したときに得られる解 (外部解) を厳密に求める方法の一つについて報告する。

外部解を求めるためには, いろいろな対称性 (例; 球対称解 = Schwarzschild の解) が要請されてきたが, ここではいままで使われた要請をその特別な場合として含むところの定常か