

体のモデル理論とその応用

東海大学理学部 情報数理学科 板井 昌典 (Masanori ITAI)

Department of Mathematical Sciences

Tokai University, Hiratsuka, Japan

RIMS 共同研究 (2006 年 3 月 13 日～3 月 17 日) において, 体のモデル理論に関して行った講義ノートである.

代数的構造のモデル理論は大きな成果をあげてきた. とくに体や群については詳細な結果が得られている. また, これらの成果を用いて代数幾何や数論幾何の未解決問題も解決された.

研究集会では, 解析的構造のモデル理論, とくに解析的ザリスキー幾何 (構造) の現況および関連する話題について概観し, 今後の研究方針について考えた.

目 次

1	講義 1 : $\mathbb{C}_{\text{exp}}$ のモデル理論	2
1.1	Marker の定理, Zilber の定理	2
1.2	仮想元消去について	3
2	講義 2 : Weierstrass の予備定理と量化記号消去	6
2.1	Weierstrass 予備定理	6
2.2	WPT の量化記号消去への応用	7
3	講義 3 : $\mathbb{Q}_p$ のモデル理論	9
3.1	付値とは	9
3.2	$\mathbb{Q}_p$	10
3.3	$\mathbb{C}_p$	12
3.4	p -進閉体のモデル理論: QE	13
4	講義 4・5 : 解析的構造のモデル理論	17
4.1	解析集合	17
4.2	解析的ザリスキー幾何	17
4.3	擬極小構造と Zilber 予想	21
4.4	擬極小構造の簡単な例	21
4.5	今後の研究方針	22

1 講義 1 : $\mathbb{C}_{\exp}$ のモデル理論

1.1 Marker の定理, Zilber の定理

解析的構造のモデル理論を考える場合、複素数体上で考えるか、実数体上で考えるかにより大きな違いがある。実数体上で考える場合には、順序極小理論の発展と相伴って大きな成果が得られている。

他方、複素数体上で考えた場合、実数の場合のような華々しい結果が見当たらない。例えば、 $\mathbb{C}_{\exp} = (\mathbb{C}, +, -, \cdot, \exp, 0, 1)$ のモデル理論は、 $\mathbb{R}_{\exp} = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, \exp, 0, 1)$ に比べ、研究が始まったばかりである。ここでは、 $\mathbb{C}_{\exp}$ に関する基本的な定理を 2 つ紹介する。

命題 1 (Marker) $\mathbb{C}_{\exp}$ はモデル完全ではない。

証明 : $\mathbb{C}_{\exp}$ がモデル完全だとすると、 $\mathbb{C}$ の定義可能集合は、 $\mathbb{C}^n$ における閉集合の射影になっている。 $\mathbb{C}$ は局所コンパクトだから、 $\mathbb{C}$ の定義可能集合は F_σ 集合であることがわかる。補集合もそうだから、結局 $\mathbb{C}$ の定義可能集合は G_δ 集合になっている。

$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{C}_{\exp}$ で定義可能であるから G_δ 集合でなければならないが、これは Baire Category Thm に反する。(Baire の定理から $\mathbb{Q}$ が G_δ 集合でないことを示すことの証明は、例えば Jech の Set Theory にある。)

証明終

定理 2 (Marker) (Schanuel 予想を仮定する。)

$p \in \mathbb{Q}[X, Y]$ を既約とし、 X, Y はともに p に現れているとする。このとき方程式 $f(z) = p(z, e^z) = 0$ は、代数的に独立な無限個の解を持つ。

この定理の証明には次の補題が出発点になる。

補題 3 $f(z) = p(z, e^z)$ とし、 $z, w \neq 0$, $f(z) = f(w) = 0$ かつ $z \neq \pm w$ とする。このとき z と w は代数的に独立である。

証明 : (補題の証明の要点) 補題の証明は背理法で行う。まず z, w はそれぞれ $\mathbb{Q}$ 上超越的であることが分かる。もし z, w が代数的に独立でないならば、

$$\text{tr. deg}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(z, w, e^z, e^w)) = 1$$

でなければならない。そうすると Schanuel 予想から z, w は $\mathbb{Q}$ 上 1 次従属なので、互いに素な整数 m, n が存在して $mz = nw$ が成り立つ。ここからあと議論していつて $m = n$ に到達し矛盾が生じることを示す。

z, w が代数的に従属しているということから $mz = nw$ と仮定するところに Schanuel 予想が必要になっているわけである。

証明終

上の Marker の定理においては、補題 3 の証明で用いたような議論のところで Schanuel 予想を仮定することになる。したがって Marker の定理を Schanuel 予想なしで証明するには全く新たな議論を要するだろう。

次に述べる Zilber の定理は、 Ax が関数体に対しては Schanuel 予想が正しいことを証明したことを用いているので、仮定なしで成立している。

定理 4 (Zilber) $V(\bar{x}, \bar{y}) \subseteq \mathbb{C}^{2n}$ を有限集合 $B \subset \mathbb{C}$ 上定義された代数的多様体とする. ただし $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$ かつ $y_i = \exp x_i$ とする. V は既約とし, normal かつ free とする. このとき, V の generic な解は, 高々可算集合である. このことを, $\mathbb{C}_{\exp}$ は, countable closure property (ccp) を持つという.

証明: $(\bar{a}, \exp(\bar{a})) \in V$ を generic な解とする.

$$S = \{\bar{x} \in \mathbb{C}^n : (\bar{x}, \exp(\bar{x})) \in V\}$$

のなかで, 点 $(\bar{a}, \exp(\bar{a}))$ が孤立していることを示す.

もしそうでなければ,

$$[0, 1] \ni t \mapsto \bar{x}(t) \in S, \quad \bar{x}(0) = \bar{a}$$

となる C^∞ -写像 $t: [0, 1] \rightarrow U \subset S$ が存在する. ただし U は $\bar{a}$ の近傍とする. $y_i(t) = \exp(x_i(t))$ とおく.

0 の近傍で微分可能な関数の芽からなる微分体を $\mathcal{D}_0$ とする. ただし微分作用素は $f \in \mathcal{D}_0$ に対して $Df = \frac{df}{dt}$ とする. $x_1(t), \dots, x_n(t), y_1(t), \dots, y_n(t)$ をこの微分体の要素と考える. 定義から,

$$Dy_i = y_i Dx_i \quad (\text{各 } i \text{ について}) \quad (1)$$

である. $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in V$ であり, また V と $(\bar{a}, \exp(\bar{a}))$ に関する仮定から

$$\text{tr. deg}_B(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = n \quad (2)$$

である.

ここで, 微分 $dx_1(t), \dots, dx_n(t)$ が 1 次従属な場合は, 適当な $\mathbb{Q}$ -線形変換によって変数変換をすることによって $dx_1(t) \equiv \dots \equiv dx_k(t) \equiv 0$ かつ $dx_{k+1}(t), \dots, dx_n(t)$ は 1 次独立としてよい. (n 個の微分が 1 次独立な場合は $k = 0$ と考える) よって $x_1(t) = a_1, \dots, x_k(t) = a_k$, かつ $y_1(t) = \exp(a_1), \dots, y_k(t) = \exp(a_k)$ である. V は normal であり $(\bar{a}, \exp(\bar{a}))$ が generic な解なので

$$\text{tr. deg}_B(a_1, \dots, a_k, \exp(a_1), \dots, \exp(a_k)) \geq k$$

である. よって

$$\begin{aligned} \text{tr. deg}_B(x_{k+1}(t), \dots, x_n(t), y_{k+1}(t), \dots, y_n(t)) \\ &\leq \text{tr. deg}_B(\bar{x}(t), \bar{y}(t), a_1, \dots, a_k, \exp(a_1), \exp(a_k)) \\ &= \text{tr. deg}_B(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) - \text{tr. deg}_B(\bar{a}, \exp(\bar{a})) \\ &\leq n - k \end{aligned} \quad (3)$$

よって Ax の定理から $dx_{k+1}, \dots, dx_n(t)$ が 1 次従属となって, 仮定に反する. したがって V の generic な解は孤立していなければならないので, 高々可算である. **証明終**

1.2 仮想元消去について

数学では, 同値関係や商構造はごく自然に登場する. 群に対して商群を定義したり, 整域から商体を構成したりするのはその典型的な場合である. ところがモデル理論では, 扱う論理式が第一階古典論理式なので, 同値類を点とみなす商構造が扱えない. 構造と, その構造の商構造たちと

を同時に1つの枠組みで扱おうとしてもできないのである。この困難を解消するために、S.Shelah は M^{eq} という構造を考えた。

モデル M とその言語 L を考える。自然数 n に対して、パラメーターを含まない $2n$ -変数 L -論理式で定義される M^n 上の同値関係を E とする。 M^n/E の各同値類をそれぞれ点とみなし、仮想元と呼ぶ。

パラメーターを用いずに定義される (0-定義可能という)、 M 上のあらゆる同値関係の同値類に対するそれぞれの仮想元をすべて合わせた構造を M^{eq} と呼ぶ。すなわち、

$$M^{\text{eq}} = \{e : 0\text{-定義可能な同値関係 } E \text{ が存在して } e \text{ は } E\text{-同値類}\}$$

である。この新しい世界でモデル理論を展開することにすれば、上で述べた困難が解消される。

論理式 $x = y$ を考えると、 M の各元 a を $a/(x = y)$ と考えることによって、 $M \subset M^{\text{eq}}$ であることが分かる。また論理式 $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \bigwedge_{i < n} x_i = y_i$ を考えると、 $(a_1, \dots, a_n) \in M^n$ を $\bar{a}/\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \in M^{\text{eq}}$ と同一視するのは自然である。

定義 5 $X \subseteq M^n$ を定義可能な集合とし、 X を定義する論理式を $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ とする。ここで $\bar{x}$ の長さは n で $\bar{a} \in M$ の長さは m とする。 L -論理式 $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ に対して、 $2m$ -変数同値関係 E_φ を、

$$E_\varphi(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \iff \forall \bar{x} (\varphi(\bar{x}, \bar{y}_1) \iff \varphi(\bar{x}, \bar{y}_2))$$

によって定義する。 $\bar{a}/E_\varphi \in M^{\text{eq}}$ を X の標準仮想パラメーター (あるいは標準基底) と呼ぶ。

$X \subseteq M^n$ を定義可能集合とし、 $e \in M^{\text{eq}}$ を X の標準仮想パラメーターとする。この e に対して、 $\bar{b} \in M^m$ が存在して、

$$e \in \text{dcl}^{\text{eq}}(\bar{b}) \text{ かつ } \bar{b} \in \text{dcl}^{\text{eq}}(e)$$

という関係が成り立っているとする。このとき、

$$\forall \sigma \in \text{Aut}(M) (\sigma(X) = X \text{ (集合を固定)} \iff \sigma(\bar{b}) = \bar{b} \text{ (各点を固定)})$$

である。この $\bar{b}$ は、 X を定義する最も本質的なパラメーターと考えることができる。 $\bar{b}$ を X の標準実パラメーターと呼ぶことにする。

例 6 関係として等号だけを持つ無限集合 M を考える。 $a, b \in M$ に対して、 $\{a, b\} \subset M$ は論理式 $\varphi(x, a, b) := "x = a \vee x = b"$ で定義される。この φ に対しては、標準実パラメーターは存在しない。

例 7 $L = \{E\}$ ただし E は2変数述語記号とする。 M を L -構造とし、 E は M 上の同値関係で、同値類の個数は無限個で、各同値類は無限集合になっている。この場合各同値類に対して、標準実パラメーターは存在しない。

共同研究期間中に次の問題について考察をした。

注 8 複素数体に指数関数を付け加えた構造 $\mathbb{C}_{\text{exp}} = (\mathbb{C}, +, \cdot, 1, 0, \text{exp})$ は、仮想元を消去しないと思われる。まず exp を用いると、有理数が $\mathbb{C}_{\text{exp}}$ の中で定義可能である。実際、論理式

$$\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \exists \alpha \exists \beta (\text{exp}(\alpha) = \text{exp}(\beta) = 1 \wedge \alpha \neq 0 \wedge x = \beta/\alpha)$$

は有理数を定義している. この $\varphi(x)$ を用いて, $x, y \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\exists z(\varphi(z) \wedge z = x - y)$$

のとき, $x \sim y$ と定義する. この同値関係の同値類に対しては, 標準実パラメーターが存在しないと考えられるので, $\mathbb{C}_{\text{exp}}$ は仮想元を消去しないはずである.

実は, 仮想元消去にはここで定義した以外に「弱い仮想元消去」という概念があり, その定義は

$$e \in \text{dcl}^{\text{eq}}(\bar{b}) \text{ かつ } \bar{b} \in \text{acl}^{\text{eq}}(e)$$

である. 体に関しては, 仮想元の「弱い消去」と「強い消去」は同値であるので, $\mathbb{C}_{\text{exp}}$ が仮想元の弱い消去を持たないことを示さなければならない.

2 講義 2 : Weierstrass の予備定理と量化記号消去

実数, 複素数, あるいは p -進閉体のそれぞれにおいて解析関数を付け加えた構造のモデル理論を展開する場合には, そのような構造での「定義可能」な集合がどのような形をしているかを知る必要がある. そのような場合に威力を発揮するのが Weierstrass の予備定理である.

Denef, van den Dries によってどのように活用されたかを概観しよう.

2.1 Weierstrass 予備定理

まず予備定理 (準備定理) の内容を復習する. F を体とし, $F[[x_1, \dots, x_n]]$ を F 係数形式的ベキ級数環, $F\{x_1, \dots, x_n\}$ を F 係数収束ベキ級数環とする. これら 2 つの環はいずれも局所環である. さらに, $R_n = F[[x_1, \dots, x_n]]$ または $R_n = F\{x_1, \dots, x_n\}$ とする.

定理 9 (Weierstrass 予備定理) $f = \sum_I c_I x^I \in R_n$ を非可逆元とする. 各 i (ただし $0 \leq i \leq d-1$) について $c_{0 \dots 0_i} = 0$ でありかつ $c_{0 \dots 0_d} \neq 0$ とすると,

(1) 任意の $g \in R_n$ に対し,

$$g - qf = a_0 + a_1 x_n + \dots + a_{d-1} x_n^{d-1} \quad (a_i \in R_{n-1}) \quad (4)$$

となるような q と a_i が一意的に存在する.

(2) R_n の可逆元 u が存在して

$$f = u \cdot \left(x_n^d + \sum_{i=1}^d b_i x_n^{d-i} \right) \quad (b_i \text{ は } R_{n-1} \text{ の非可逆元})$$

となる.

局所環 R_n に対して中山の補題を用いて, Weierstrass 予備定理を証明することが出来る.

補題 10 (中山の補題) A を局所環, m を極大イデアルとする. A 加群 M と M の部分加群 N について (1) と (2) は同値である.

(1) $M = N$

(2) M/N は A 上有限生成であり, $M = mM + N$.

証明: (WPT の証明 (存在に関する部分), 『複素解析幾何と $\bar{\partial}$ 方程式』, 大沢健夫著, 倍風館, 参照)

$R_{n-1}^f := F[[x_1, \dots, x_{n-1}, f]]$ または $F\{x_1, \dots, x_{n-1}, f\}$ とおく.

$$R_n / \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i R_n + f R_n \right) \sim F[x_n] / x_n^d F[x_n] \quad (F \text{ 加群として})$$

だから $R_n / \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i R_n + f R_n \right)$ は $1, x_n, \dots, x_n^{d-1}$ の剰余類によって生成される, R_{n-1}^f 加群である. R_{n-1}^f は局所環であり, その極大イデアルは $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, f$ によって生成される. よって

$$R_n = \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i R_n + f R_n \right) + \sum_{k=0}^{d-1} x_n^k R_{n-1}^f$$

であることから、中山の補題より

$$R_n = \sum_{k=0}^{d-1} x_n^k R_{n-1}^f$$

であることが分かるので

$$g = a'_0 + a'_1 x_n + a'_2 x_n^2 + \cdots + a'_{d-1} x_n^{d-1} \quad (a'_i \in R_{n-1}^f)$$

である。これから等式 (4) が得られる。

証明終

系 11 (WPT の帰結)

- (1) R_n は PID
- (2) R_n はネーター環
- (3) 陰関数定理
- (4) 量化記号消去 QE

2.2 WPT の量化記号消去への応用

解析的構造の 1 階モデル理論を展開する場合、まず「定義可能」集合の形を具体的に知ることが望ましい。そのためには、量化記号消去が必要になる。論理式には「解析関数」に対応する関数記号が現れ、変数の個数に関する帰納法により各種の主張を証明する際には何らかの形の WPT が必要になる。

この論法を、Denef と van den Dries の結果によって確認しよう。

まず $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}_p^n$ あるいは $\mathbb{Z}_p^n$ の部分集合に関して 3 つの概念、すなわち semi-algebraic, semi-analytic, sub-analytic という概念を定義する。

大雑把に言えば、多項式と不等号で定義される集合が semi-algebraic で、解析関数と不等号で定義される集合が semi-analytic、そして semi-analytic 集合の射影になっているのが sub-analytic 集合である。

2.2.1 $\mathbb{Z}_p$ の量化記号消去

論文 [DD] において Denef は、 $\mathbb{Q}_p$ が量化記号を消去する、すなわち semi-algebraic な集合の射影が semi-algebraic になっているという Macintyre の定理を用いて、

定理 12 (Denef の解析的量化記号消去) $\mathbb{Z}_p$ の L_{an}^D -理論は量化記号を消去する。

を得た。ここで言語 L_{an}^D は環の言語に、各 $f \in \mathbb{Z}_p\{X_1, \dots, X_m\}$ に対応する関数記号、2 項関係記号 D 、および単項関係 P_n ($n \in \mathbb{N}$) を付け加えた言語である。ただし

$$D(x, y) = \begin{cases} x/y & |x| \leq |y| \text{ かつ } y \neq 0 \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases}$$

であり「 x は n 乗根を持つ」を $P_n(x)$ で表す。

Denef の証明において $\mathbb{Z}_p\{X_1, \dots, X_m\}$ のネーター性は重要であり、ここに WPT が関係している、また前述したように量化記号消去を変数の個数に関する帰納法で証明する際に、変数を 1 個減らす過程でも WPT は必要である。

2.2.2 順序極小性に関連して

ここでは [vdD] にある定理を紹介しよう.

定義 13 集合 $X \subseteq \mathbb{R}^m$ は, $f(X) \subseteq \mathbb{R}^m$ が sub-analytic であるとき, finitely sub-analytic であると呼ばれる. ただし,

$$f(x_1, \dots, x_m) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}}, \dots, \frac{x_m}{\sqrt{1+x_m^2}} \right)$$

とする.

グラフが finitely sub-analytic な関数を finitely sub-analytic 関数と言う. 典型的な例は $\tan^{-1} x$ である.

定理 14 $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を finitely sub-analytic 関数とすると, $a \in \mathbb{R}$ と $d \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $t > a$ に対して $|f(t)|^d < t^d$ である.

証明: 変換 $t = \frac{1}{x}$ を用いて, f に関する議論を, subanalytic なグラフを持つ関数 $g: (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, (ただし $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$) に関する議論に置き換える.

関数 g のグラフは $\mathbb{R}^2$ の subanalytic 集合なので Lojasiewicz の定理により semianalytic である. よって点 $(0, 0)$ の近傍で収束するべき級数 $F(X, Y) = \sum a_{mn} X^m Y^n$ が存在して, 近傍内ですべての正の x に対して $F(x, g(x)) = 0$ が成り立っている. g が 0 の近くで恒等的にゼロでなければ, X の適当なべきで割ったものを考えることにより F が X で割り切れないと仮定する. したがって WPT より

$$F = Y^k + a_1(X)Y^{k-1} + \dots + a_k(X)$$

の形をしているとしてよい. ここで $a_i(X)$ は 0 の近くで収束しているべき級数で $a_i(0) = 0$ である.

よって $F(x, g(x)) = 0$ であることと g の連続性より正の小さい x に対して $g(x)$ の Puiseux 級数展開 $c_1 x^{\frac{1}{k}} + c_2 x^{\frac{2}{k}} + \dots$ が得られる. この結果を f に関して翻訳すれば $t \rightarrow \infty$ のとき $f(t) \sim c \cdot t^r$ ということになるので定理が証明された. 証明終

3 講義 3 : $\mathbb{Q}_p$ のモデル理論

p -進閉体 (p -adically closed field) $\mathbb{Q}_p$ のモデル理論について整理し, $\mathbb{C}_p$ のモデル理論を構築したい. しかしながら, p -adically closed fields のモデル理論が成功している理由が,

1. 値群が $\mathbb{Z}$ -群であること.
2. Hensel の定理が成り立つこと.
3. 剰余体が有限体であること.

に強く依存しているように考えられるので, $\mathbb{C}_p$ のモデル理論を展開するにはかなり大胆な発想の転換が必要であろう. 他方で, ACVF (algebraically closed valued fields) の理論では, 仮想元消去をはじめ, 安定性理論との相似性など重要な結果が多数得られているので, $\mathbb{C}_p$ についても ACVF の文脈の中で考えることが自然かも知れない.

まずは, 付値体について復習することから始める.

3.1 付値とは

付値に関しては, 永田の『可換体論』(新版) 4 章, Fried, Jarden の *Field Arithmetic* [FJ] が詳しい.

定義 15 F を体とし, $\Gamma = (\Gamma, +, <)$ を順序群とする. $v : F \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ が次の性質をもつとき F の付値という.

1. $v(ab) = v(a) + v(b)$
2. $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$
3. $v(a) = \infty$ if and only if $a = 0$
4. $v(a) \neq 0$ となる $a \in F^\times = \{x \in F : x \neq 0\}$ が存在する.

v が F の付値であるとき, (F, v) を付値体という.

注 16 付値には乗法付値と加法付値と呼ばれる 2 種の付値がある. 上の付値は加法付値と呼ばれるものである.

命題 17 (基本性質) 1. $v(1) = 0, v(-a) = v(a)$

2. $a \neq 0$ のとき, $v(a^{-1}) = -v(a)$

3. $v(a) < v(b)$ ならば $v(a + b) = v(a)$

定義 18 (F, v) を付値体とする.

1. $\Gamma_v = v(F^\times)$ は Γ の部分群になるが, これを v の値群と呼ぶ.
2. $O_v = \{a \in F : v(a) \geq 0\}$ は F の部分環になるが, これを v の付値環と呼ぶ.

3. $\mathfrak{M}_v = \{a \in F : v(a) > 0\}$ は O_v の唯一の極大イデアルになるが, $\overline{F}_v = O_v/\mathfrak{M}_v$ を F の v における剰余体と呼ぶ.

命題 19 F を標数 0 の体とし, O を部分環とする.

$$\forall x \in F (x \neq 0 \rightarrow x \in O \vee x^{-1} \in O)$$

が成り立つとき, O が (F, v) の付値置環になるような付値 v が存在する.

証明: $U = \{x \in F : x \in O \wedge x^{-1} \in O\}$ とおく. このとき $\Gamma = F^\times/U$ は可換群になり, $x, y \in F^\times$ にたいして

$$xU \geq yU \iff xy^{-1} \in O$$

によって Γ に順序を入れ, $v(x) = xU$ と定義すると (F, v) は付値体になり O がその付値環になる.

証明終

3.2 $\mathbb{Q}_p$

有理数体 $\mathbb{Q}$ を通常の付値 (絶対値) に関して完備化して実数体 $\mathbb{R}$ を構成したように, 有理数体 $\mathbb{Q}$ を p -進付値に関して完備化すると p -進閉体 $\mathbb{Q}_p$ が出来る.

3.2.1 p -進付値

定義 20 p を素数とする. $x \in \mathbb{Q}$ に対して, $x = p^n \frac{a}{b}$ ただし a, b はそれぞれ p と互いに素と書くことができる. この n を x の p -進付値とよび, $n = v_p(x)$ と書く. $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ と定義し, p -進絶対値と呼ぶ. この p -進絶対値から距離を定義し, この距離によって $\mathbb{Q}$ を完備化したものを p -進数体と言う.

$a \in \mathbb{Q}_p$ とすると

$$a = a_m p^{-m} + a_{-(m-1)} p^{-(m-1)} + \cdots + a_1 p^{-1} + a_0 + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \cdots$$

ただし各 i について a_i は $0 \leq a_i < p$ である. $a \in \mathbb{Q}_p$ をこのように書いたとき, 最初に 0 でない a_i が現れる $m \in \mathbb{Z}$ を a の p -進付値とし $v_p(a) = m$ と定める. そして $|a|_p = p^{-v_p(a)}$ と定義する.

通常の絶対値 $|x|$ から定まる距離に関して有理数体 $\mathbb{Q}$ を完備化したものが実数体 $\mathbb{R}$ になっていることに対応している.

命題 21 $\mathbb{Q}_p$ は p -進付値から定まる距離に関して完備である.

命題 22 $\mathbb{Q}_p$ の値群 $v_p(\mathbb{Q}_p)$ は $(\mathbb{Z}, +, <)$ である.

命題 23 $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ を数列とし, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の収束について考える.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

証明：級数が収束するなら、 $|c_n|_p \rightarrow 0$ である。この証明はいつも通り出来る。

逆に $|c_n|_p \rightarrow 0$ とする。有限和

$$S_N = \sum_{n=1}^N c_n$$

を考える。 $\mathbb{Q}_p$ は完備だから、数列 $\{s_N\}_{N=1}^{\infty}$ がコーシー列であることを示せばよい。いま $N < M$ とすると

$$|S_M - S_N|_p = |c_{N+1} + \cdots + c_M|_p \leq \max\{|c_{N+1}|_p, \dots, |c_M|_p\}$$

だから $|S_M - S_N|_p \rightarrow 0$ となるのでコーシー性が証明された。

証明終

定義 24 1. $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$ $\mathbb{Z}_p$ を p -進整数と呼ぶ。局所環である。

2. $\mathfrak{m} = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p < 1\}$ は $\mathbb{Z}_p$ の唯一の極大イデアルである。また $\mathfrak{m} = p\mathbb{Z}_p$ である。

3. $\mathbb{Z}_p/\mathfrak{m} = \mathbb{F}_p$, 標数 p の素体である。

3.2.2 Hensel の補題

定理 25 (Hensel の補題, p -進 Newton の補題) $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ とする。 $a_0 \in \mathbb{Z}_p$ が $f(a_0) \equiv 0 \pmod{p}$ かつ $f'(a_0) \not\equiv 0 \pmod{p}$ を満たしているとする。このとき

$$f(a) = 0 \quad \text{かつ} \quad a \equiv a_0 \pmod{p}$$

をみたす $a \in \mathbb{Z}_p$ が唯一存在する。

系 26 $f(x) = x^{n+1} + x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0$ は $\mathbb{Q}_p$ に解を持つ。ただし $b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathfrak{m} = p\mathbb{Z}_p$

証明：まず $f(-1) \equiv 0 \pmod{p}$ に注意する。 $f'(-1) \equiv (n+1)(-1)^n + n(-1)^{n-1} \equiv \pm 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ なので Hensel の定理から $f(a) = 0$ かつ $a \equiv -1 \pmod{p}$ となる $a \in \mathbb{Z}_p$ が存在する。

命題 27 $\mathbb{Q}_p$ は代数的に閉じていない。

証明：Hensel の補題の系として、任意の自然数 n に対して $\mathbb{Q}_p$ は拡大次数 n の代数拡大 F を持つことを証明する。

命題 28 (Eisenstein の既約性判定) $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}_p[x]$ とする。

1. $|a_i|_p < 1$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$)

2. $|a_0|_p = 1/p$

が成り立っているならば、 $f(x)$ は $\mathbb{Q}_p[x]$ で既約である。

証明： $\mathbb{Z}_p$ が整域であり、 $\mathbb{Q}_p$ がその商体なので、Gauss の補題により $f(x)$ が $\mathbb{Z}_p[x]$ で既約であることを示せばよい。 $f(x) = g(x)h(x)$ と $\mathbb{Z}_p[x]$ で因数分解出来たとしよう。 $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ である。 $g(x)$ の定数項を b_0 , $h(x)$ の定数項を c_0 とする。 $a_0 = b_0c_0$ なので、 a_0 に対する条件から $|b_0|_p = 1/p$ または $|c_0|_p = 1/p$ である。 $|b_0|_p = 1/p$ の場合を考える。 $c_0 = 1$ でなければならない。 f, g, h をすべて $\text{mod } p$ で考える。 $\tilde{f} = f \text{ mod } p$ とし同様に $\tilde{g}, \tilde{h}$ を定める。 $\tilde{f} = x^n$ だから h は定数関数 1 でなければならない。よって f は既約である。

証明終

注 29 十分条件であるが、必要条件ではない。

系 30 各 n に対して、 $x^n - p$ は $\mathbb{Q}_p[x]$ で既約である。

3.2.3 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大

$\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体 K を p -進体 (p -adic field) という。 K の付値環を $\mathcal{O}$ とし、 $\mathcal{O}$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とすると K の剰余体 $\mathcal{O}/\mathfrak{m} = k$ は有限体になる。 より正確には、標数 p の素体 $\mathbb{F}_p$ の有限次拡大体である。

定義 31 1. $f = [k : \mathbb{F}_p]$

2. $e = [K^\times|_p : \mathbb{Q}_p^\times] = \#(|K^\times|_p, p^\mathbb{Z})$ を K の $\mathbb{Q}_p$ 上の分岐指数とよぶ。

命題 32 (基本性質) 1. K は局所コンパクトかつ完備である。

2. $[K : \mathbb{Q}_p] = ef$

K の元がどういう形をしているかを考えよう。 まず $\mathbb{Q}_p$ の元は、

$$a = a_m p^{-m} + a_{-(m-1)} p^{-(m-1)} + \cdots + a_1 p^{-1} + a_0 + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \cdots$$

という形をしていた。 ここで $a_i \in \mathbb{F}_p$ であった。 K の元を x とすると、

$$x = x_m \pi^{-m} + x_{-(m-1)} \pi^{-(m-1)} + \cdots + x_1 \pi^{-1} + x_0 + x_1 \pi + \cdots$$

という形をしていて、各 $x_i \in \mathbb{F}_{p^f}$ であり、 $\pi^e = p$ となっている。 この π の K での付値を考えると、

$$v_p(\pi^e) = ev_p(\pi) = v_p(p) = 1$$

より $v_p(\pi) = 1/e$ になっている。

3.3 $\mathbb{C}_p$

$\mathbb{Q}_p$ は完備だが、代数的には閉じていない。 p -進付値に関して完備で、しかも代数的に閉じている体はどのようにすれば得られるだろうか。

$\mathbb{Q}_p$ の代数閉包を $\mathbb{Q}_p^{\text{alg}}$ とする。 次に述べるように $\mathbb{Q}_p^{\text{alg}}$ は完備でないので、 $\mathbb{Q}_p^{\text{alg}}$ を完備化したものを考えると、幸いなことに、完備でしかも代数的に閉じた体 $\mathbb{C}_p$ が得られる。

定理 33 $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包 $\mathbb{Q}_p^{\text{alg}}$ は完備でない。

証明: p と互いに素な自然数 n に対して、1 の原始 n 乗根の 1 つを $f(n)$ とする。 また n が p の倍数である場合は、 $f(n) = 1$ とおく。 つぎの級数は収束する。

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) p^n$$

もし $\mathbb{Q}_p^a$ が完備ならば、この級数は $\alpha \in \mathbb{Q}_p^a$ に収束する。よって $\alpha \in K$ となる $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大 K が存在する。

主張：すべての n に対して $f(n) \in K$ である。

$f(1) = 1 \in K$ である。すべての $n < m$ に対して $f(n) \in K$ と仮定する。 $f(m) \in K$ を証明したい。 m が p の倍数ならば明らかだから、 m と p 互いに素と仮定する。帰納法の仮定から、

$$\beta := p^{-m} \left(\alpha - \sum_{n=1}^{m-1} f(n)p^n \right) \in K$$

である。ここで、

$$\beta = f(m) + pf(m+1) + p^2f(m+2) + \cdots +$$

に注意する。

ここで p を $\mathcal{O}_K = \{x \in K : |x|_p \leq 1\}$ の極大イデアルとすると $\beta \equiv f(m) \pmod{p}$ である。よって $f(m)$ が 1 の原始 m 乗根のひとつだから、方程式 $x^m - 1 = 0$ は $\pmod{p}$ に関して根をもつ。Hensel の補題からこの根を K に持ち上げることが出来る。

p と m は互いに素だから 1 の m 乗根は $\pmod{p}$ に関してすべて異なる。したがって $f(m) \in K$ である。よって数学的帰納法から主張が証明された。

主張の帰結として、 $\pmod{p}$ に関して無限個の剰余類が存在することになるが、これは K が $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大であることに反する。

証明終

定義 34 $\mathbb{Q}_p^a$ を完備化したものを $\mathbb{C}_p$ とする。

定理 35 $\mathbb{C}_p$ は完備でありかつ代数的に閉じている。

3.4 p -進閉体のモデル理論：QE

3.4.1 p -進閉体とは

$\mathbb{Q}_p$ の重要な性質の一つが Hensel の補題である。Macintyre は $\mathbb{Q}_p$ のモデル理論を展開し、QE が成り立つことを証明した。その後、Prestel, Roquette は p -進閉体のモデル理論を展開し同様に QE が成り立つことを示している。

定義 36 (p -進閉体) 付値体 (K, v) に対して、剰余体が $\mathbb{F}_p$ であり、 $v(p) = 1$ が値群の最小な正の要素であるとき、 (K, v) を p -進付値体と呼ぶ。

p -進付値体 (K, v) に対して、 (L, v) も p -進付値体で体 L が K の代数拡大になっているなら $L = K$ が成り立つ、すなわち (K, v) の代数拡大体 L で p -進付値体になっているようなものが存在しないとき、 (K, v) を p -進閉体とよぶ。

定理 37 (K, v) を p -進付値体とする。このとき K が p -進閉体であるための必要十分条件は K が Hensel 体であることと (K, v) の値群が $\mathbb{Z}$ -群であることである。

3.4.2 付値体の言語と公理系

p -進閉体のクラスを公理化したい.

定義 38 1. $\mathcal{L}_R = \{+, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, R\}$ を付値体の言語とする. ここで $-$ は 1 変数とし, R は付値環に対応する 1 変数述語記号とする.

2. 付値環に関する公理: $\forall x (x \neq 0 \rightarrow R(x) \vee R(x^{-1}))$

ここで $\mathcal{L}_R$ の言語を用いて,

1. 付値体であることを R を用いて書く.
2. Hensel の定理がなりたつことをやはり R だけで書く.
3. $[K : \mathbb{Q}_p] = n$ であることを書く.

ことによって p -進閉体のモデルの公理化を行う.

3.4.3 量化記号消去

量化記号を消去するには, 代数的閉体のときのように, 論理式の形を考えながら具体的に議論する方法以外に, つぎのような一般論も有用である.

定義 39 (部分構造完全) T を理論とする. つぎの性質を持つとき T は部分構造完全であるという. すなわち, N_1 と N_2 を, 共通な部分構造 M をもつ T の任意なモデルとするならば, $N_1 \equiv_M N_2$ である.

この性質は, つぎのように言い換えてもよい. つまり N が T のモデルで $M \subset N$ を部分構造とすると, $T \cup \mathcal{D}(M)$ は完全である. ここで $\mathcal{D}(M) = \langle M, m \rangle_{m \in M}$ で成り立つ原子文と原子文の否定全体

定理 40 (部分構造完全) T を 1 階述語理論とする. このとき, T が部分構造完全ならば T は量化記号を消去する.

証明: T を部分構造完全とする. $\mathcal{L}$ を T の言語とする. $\varphi(x)$ を $\mathcal{L}$ -論理式とする. 言語 $\mathcal{L}$ に含まれない新たな定数記号 c を導入する. 論理式 $\varphi(x)$ に対して言語 $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$ の理論

$\Sigma = T \cup \{\varphi(c)\} \cup \{\neg\psi(c) : \psi(x) \text{ は } T \vdash \forall x (\psi(x) \rightarrow \varphi(x)) \text{ を満たす量化記号を含まない } \mathcal{L}\text{-論理式}\}$ を考える.

主張: Σ は矛盾している.

もし Σ が無矛盾ならば, N を Σ のモデルとする. 定数記号 c の N における解釈を再び c と書くことにする. この c によって生成される N の部分構造を A をする. $N \models \varphi(c)$ であり, また $N \models T \cup \mathcal{D}(A)$ となっている. よって T の部分構造完全性から

$$T \cup \mathcal{D}(A) \vdash \varphi(c) \quad (5)$$

が成り立っている。よって $\mathcal{D}(A)$ の定義から、量化記号を含まない $\mathcal{L}$ -論理式 $\theta(x)$ が存在して

$$T \vdash \theta(c) \rightarrow \varphi(c) \quad (6)$$

が成り立つ。また $N \models \theta(c)$ である。

定数記号 c は $\mathcal{L}$ に含まれていないから、(6) が成り立つことから述語論理の一般論により

$$T \vdash \forall x(\theta(x) \rightarrow \varphi(x)) \quad (7)$$

が得られる。よって Σ の定義と $N \models \Sigma$ から $N \models \neg\theta(c)$ となって矛盾する。よって Σ は矛盾している。

よってコンパクト性定理より、 Σ の或る有限部分集合 Σ_0 が矛盾している。よって量化記号を含まない有限個の $\mathcal{L}$ -論理式 $\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)$ が存在して、各自然数 i ($i = 1, \dots, n$) に対して

$$T \vdash \forall x(\psi_i(x) \rightarrow \varphi(x)) \quad (8)$$

であり、

$$T \vdash \left(\varphi(c) \rightarrow \bigvee_{i=1}^n \psi_i(c) \right) \quad (9)$$

が成り立つ。定数 c は言語 $\mathcal{L}$ に含まれていないから (9) より

$$T \vdash \forall x \left(\varphi(x) \rightarrow \bigvee_{i=1}^n \psi_i(x) \right) \quad (10)$$

である。よって、(8) と (10) より

$$T \vdash \forall x \left(\varphi(x) \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^n \psi_i(x) \right)$$

となって $\varphi(x)$ と同値で量化記号を含まない論理式が見つかった。

証明終

注 41 実は「部分構造完全」と「量化記号消去」は同値である。([Sa], Thm 13.1 参照)

定義 42 F を体とし、 n を自然数とする。 F^n を次のように定義する： $F^n = \{x^n \in F : x \in F\}$ 。したがって、

$$F \supseteq F^2 \supseteq F^3 \supseteq \dots \supseteq F^n \supseteq \dots$$

となっている。

定理 43 K を p -進付値体とし、 L, L' を K の拡大体とし、ともに p -進閉体とし、かつ $\text{rank}_p(L) = \text{rank}_p(L')$ とする。各自然数 n に対して、

$$K \cap L^n = K \cap (L')^n$$

とすると、 $L \equiv_K L'$ である。

証明: $\widetilde{K}_1$ を L_1 における K の代数閉包とすると, $K \cap L_1^n = K \cap \widetilde{K}_1^n$ である. K の L_2 における代数閉包を $\widetilde{K}_2$ とすると, 同様に $K \cap L_2^n = K \cap \widetilde{K}_2^n$ である. よって仮定から, 各自然数 n について

$$K \cap \widetilde{K}_1^n = K \cap \widetilde{K}_2^n$$

である. このことから $\widetilde{K}_1 \simeq_K \widetilde{K}_2$ が導かれる. よって $\widetilde{K}_1$ と $\widetilde{K}_2$ を同一視して, K の L_1 における代数閉包 $\widetilde{K}$ が L_2 における代数閉包にもなっていると仮定する. よって $L_1 \equiv_{\widetilde{K}} L_2$ を証明すればよい. したがって初めから K は L_1 と L_2 において代数的に閉じていると仮定する. このことから K が p -進閉体であることが出てくる. よって $K_1 \preceq L_1$ かつ $K \preceq L_2$ となり, $L_1 \equiv_K L_2$ が分かる.

証明終

定義 44 $[K : \mathbb{Q}_p] = d$ である p -進閉体のモデル理論を考える場合は, 付値体の言語に, $d = [K : \mathbb{Q}_p]$ 個の定数記号 (K の $\mathbb{Q}_p$ 上の基底) と無限個の 1 変数述語記号 P_n ($n \in \mathbb{N}$) を付け加えた言語 $\mathcal{L}_{d,P_n}$ を p -進閉体の言語とする.

各 P_n に対して, つぎの公理を付け加える.

$$\forall x (P_n(x) \longleftrightarrow \exists y (x = y^n))$$

定理 45 (Macintyre の定理の一般化) p -階数 d の p -進閉体の理論を言語 $\mathcal{L}_{d,P_n}$ で公理化した理論は, 量化記号を消去する.

証明: 定理 43 は, 言語 $\mathcal{L}_{d,P_n}$ で考えたとき, p -進閉体の理論が「部分構造完全である」ということを主張している. よって, 定理 40 より, 量化記号を消去する. 証明終

注 46 p -進閉体の理論の量化記号消去は, J. Denef が cell decomposition という概念を用いて, P. Cohen のアイデアに基づきつつより具体的な手順を与えながら証明している. Denef の証明については本講究録にある井深の解説を参照されたい.

4 講義 4・5：解析的構造のモデル理論

4.1 解析集合

代数曲線の位相的性質に注目しつつ1階の公理系としてまとめたものがザリスキー幾何の理論であるのに対し、解析的ザリスキー幾何は、解析幾何、すなわち解析関数で定義される図形の位相的性質に着目するのモデル理論である。したがって、まず解析集合の基本的な性質を見ておこう。

定義 47 (解析集合) M を複素多様体, $A \subseteq M$.

任意の $x \in A$ に対して, M における x の近傍 U と正則関数 $f_1, \dots, f_k$ が存在して,

$$U \cap A = \{z \in M : f_1(z) = \dots = f_k(z) = 0\}$$

であるとき, A を解析集合という。

命題 48 (基本的性質) 1. 解析集合は局所閉集合:

A が解析集合ならば, A の適当な近傍 U に対して $U \cap \overline{A} = A$

2. M, N 複素多様体, A は M の, B は N の解析集合

i) $A \times B$ は $M \times N$ の解析集合

ii) $\varphi: M \rightarrow N$ が正則ならば, $\varphi^{-1}(B)$ は M の解析集合

3. M は複素多様体, A_1, A_2 は M の解析集合

i) $A_1 \cap A_2$ は解析集合

ii) A_1, A_2 が閉集合ならば $A_1 \cup A_2$ は解析集合

4.2 解析的ザリスキー幾何

ジルバーの講義ノート [Z1] に沿って, 解析的ザリスキー幾何の公理系を紹介する。

定義 49 (公理系) $\mathcal{M} = (M, \mathcal{C}, \dim)$ が以下の公理系を満たすとき, $\mathcal{M}$ を解析的 Zariski 構造と呼ぶ。

(L)

1. 各 C_n は位相空間, 特に閉集合族の共通部分は閉集合

2. 対角集合は閉集合

3. 1点集合は閉集合

4. 閉集合の直積は閉集合

5. $a \in M^k$, $S \subseteq M^{k+l}$ は閉集合

$S(a, M^l) = \{b \in M^l \mid (a, b) \in S\}$ は閉集合

6. 射影は連続写像

次元に関する公理

(DP) 1 点の次元は 0.

(CU) $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$ ならば $\dim S = \max_{i \in \mathbb{N}} \dim S_i$

(WP) $D \subseteq_{op} M^n, V \subseteq_{op} M^k$ かつ $F \subseteq_{cl} D \times V$
 $\text{pr} : D \times V \rightarrow D$ は射影, $\dim \text{pr}(F) = \dim D$. このとき,

$$D_1 - D_2 \subseteq \text{pr}(F) \text{ かつ } \dim(D_1 - D_2) = \dim D$$

となる $D_1, D_2 \subseteq_{cl} D$ が存在する.

既約性に関する公理

定義 50 (強既約構成可能集合) $S \subseteq M^n$ を構成可能集合とする.

任意の開集合 $S' \subsetneq S$ に対して $\dim S' < \dim S$
 が成り立つとき, S を強既約構成可能集合とよぶ.

(AF) S は強既約構成可能集合

$$\dim S = \dim(\text{pr}S) + \min_{a \in \text{pr}S} \dim(\text{pr}^{-1}(a) \cap S)$$

(FC) $S \subseteq M^n$ は強既約構成可能集合

$$\mathcal{P}^{\text{pr}}(S, k) = \{a \in \text{pr}S : \dim(S \cap \text{pr}^{-1}(a)) \geq k\}$$

は $\text{pr}S$ の閉部分集合

解析集合に関する公理

定義 51 $S \subseteq U \subseteq_{op} M^2$ とする.

1. S は U の中で閉集合
2. 任意の $a \in S$ に対して開集合 V_a が存在して, $S \cap V_a$ は有限個の強既約構成可能集合の和集合に分解される.

このとき S を解析集合とよぶ.

(INT) $S_1, S_2 \subseteq_{an} U$ が既約ならば $S_1 \cap S_2$ は解析集合

(CMP) $S \subseteq_{an} U$ かつ $a \in S$ とする.

$$a \in S_a - S'_a \text{ かつ } S = S_a \cup S'_a$$

となる, U の有限個の既約解析集合の和集合 $S_a \subseteq_{an} U$ と $S'_a \subseteq_{an} U$ が存在する. S_a を a の既約成分とよぶ.

(CC) 任意の $S \subseteq_{an} U$ は高々可算個の既約成分の和集合である.

解析的階数

定義 52 $S \subseteq_{cl} U \subseteq_{op} M^n$ に対して, 解析的階数 $\text{ark}_U(S)$ を定義する.

1. $\text{ark}(S) = 0 \iff S = \emptyset$
2. $\text{ark}_U(S) \leq k + 1 \iff (S' \subseteq_{cl} S \text{ が存在して } \text{ark}_U(S') \leq k \text{ かつ } S - S' \subseteq_{an} U - S')$
3. $\text{ark}_U(S)$ は 1, 2 を満たす最小

(AS) 任意の $S \subseteq_{cl} M^n$ に対して $\text{ark}(S) < \omega$

ここまでする解析的ザリスキー構造の公理系である. これらに加えてさらに次の公理

(PS) $S_1, S_2 \subseteq_{an} U \subseteq_{op} M^n$ かつ S_1, S_2 はともに既約. このとき $S_1 \cap S_2$ の任意の既約成分 S_0 に対して

$$\dim S_0 \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim U$$

がなりたつとき, pre-smooth 解析的ザリスキー構造と呼ぶ.

4.2.1 解析的ザリスキー幾何の例

$V = (\mathbb{C}, +)$, $F = (\mathbb{C}, +, \cdot)$, $\exp: V \rightarrow F$ とする.

定理 53 $(V, \exp, F)$ は pre-smooth な解析的ザリスキー構造であり, すべての閉集合は解析的である.

定理 54 (Peatfield) 擬指数関数を持つ, 非可算な体 K_{ex} は pre-smooth な解析的ザリスキー幾何である.

この結果は 2006 年 7 月に発表されたプレプリント [Pe] による. 証明の骨格を簡単に説明する. まず, 非可算な体 K_{ex} の性質は以下の通りである.

1. 非可算な体 K は, 標数 0 の代数的閉体である.
2. $\text{ex}: K^+ \longrightarrow K^\times$ は準同型であり, ex の核は $\mathbb{Z}$ と同型である.
3. (Schanuel 性) K の有限部分集合 A に対して,

$$\text{tr. deg}_{\mathbb{Q}}(A, \text{ex}(A)) - \text{lin. deg}_{\mathbb{Q}}(A) \geq 0$$

4. K の有限集合 A 上の, 既約で free かつ normal な代数的多様体 $V \subset K^{2n}$ に対して $(\bar{z}, \text{ex}(\bar{z}))$ が V の A 上 generic な解になっているような $\bar{z} \in K^n$ が存在する.
5. V を 4 と同様の多様体とし V の次元が n ならば $(\bar{z}, \text{ex}(\bar{z}))$ が V の A 上 generic な解になるような $\bar{z}$ は可算個存在する. ($V \subset K^{2n}$ に注意)

このような K に対して, 無限遠点 ∞ による 1 点コンパクト化したものを $\bar{K}$ する. まず K_{ex} に位相を定義しなければならない. 代数幾何において代数的集合を閉集合とするザリスキー位相を考えたように, まずこれから定義しようとする位相において, 何を閉集合とするかを決めなければならない.

まず simple closed と呼ばれる集合を定義する.

定義 55

$$S(\bar{x}, \bar{y}) := \bigwedge_{i=1}^m y_i = \text{ex}(x_i) \wedge V_S(\bar{x}, \bar{y})$$

とおく. ただし $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_m)$, $n \geq m \geq 0$ かつ V_S は $\mathbb{Q}$ 上の既約な代数的多様体であり, 集合 $S(K^{n+m})$ の射影で次元がゼロのものはすべて 1 点集合になっているとする.

このとき S を simple closed と呼ぶ.

S が simple closed のとき $S(\bar{K}^{n+m})$ の次元は $\dim(V_S) - m$ になる.

定義 56 simple closed な $S(\bar{x}, \bar{y})$ に対して,

$$S^0 := S \wedge \bigwedge \{ \neg S' \mid S' \text{ simple closed, } S'(K) \subsetneq S(K), \dim(S'(K^n)) = \dim(S(K^n)) \}$$

$$S^b := \{ (\bar{x}, \bar{y}) \in \bigcup_{i=1}^k S_i(K^{n+m}) \mid \text{rk}(\text{Jac}(S)(\bar{x}, \bar{y})) < \min_{i=1}^k \{ \text{rk}(\text{Jac}(S_i)(\bar{x}, \bar{y})) \} \}$$

とおく. ただし $S_1, \dots, S_k$ はそれぞれ simple closed であり $S_i(K) \subsetneq S(K)$ $\dim(S_i) = \dim(S)$ とする. (このような S_i が有限個しか存在しないことは証明しなければならないが) S^b を S の main part の境界と呼ぶ.

simple closed な S に対して,

$$\hat{S} := S^0 \vee S^b$$

を S に対応する special closed relation と呼ぶ.

準備が整ったので言語 $\mathcal{L}$ を定義し, $\mathcal{L}$ を用いて K に位相を定義する.

定義 57 言語 $\mathcal{L}$ は環の言語に次の種類の述語記号を添加したものである.

1. 各 simple closed relation S に対応する special closed relation $\hat{S}$ に対応する述語記号
2. K^n および $\bar{K}^n - K^n$ において量化記号を用いずに定義される, 次元 0 のの部分集合に対応する述語記号

ついで, 言語 $\mathcal{L}$ の意味で, 量化記号と否定を用いずに定義される K^n の部分集合の K への射影を $\mathcal{L}$ -closed と呼び, $\mathcal{L}$ -closed 集合を閉集合の基底とするような位相を K に導入する.

Peatfield は [Pe] において, 定義 57 による位相に関して K_{ex} が解析的ザリスキー構造になることを示している.

4.3 擬極小構造と Zilber 予想

解析的ザリスキ幾何と関連して、擬極小構造という概念がある。

定義 58 M を非可算な 1 階の構造とする。 M の定義可能な部分集合 X に対して

$$|X| \leq \aleph_0 \text{ または } |M - X| \leq \aleph_0$$

であるとき、 M を擬極小構造とよぶ。ただし、 X の定義にはパラメーターを用いてよい。

次の予想は非常に興味深い。しかし証明についてはどこから手をつければよいか、暗中模索状態である。

予想 59 (Zilber) $\mathcal{C}_{\text{exp}} = (\mathbb{C}, +, \cdot, \exp, 0, 1)$ は擬極小構造である。

注 60 1. Zilber 予想に対しては、Wilkie が「部分解」を得ている。しかし詳細は不明。

2. 上で紹介した K_{ex} を $L_{\omega_1\omega}(Q)$ (ただし Q は非可算個の存在を主張する量化記号) という、1 階述語論理より高階の論理で公理化することができる。さらにそのモデルは擬極小構造であることも Zilber によって証明されている。

3. 擬極小構造については、非可算範疇的な高階のモデル理論と関係があり、Shelah がすでに excellent class という一般論を展開しており、 K_{ex} の公理化は excellent class の例になっている。

ここで擬極小構造に関する一般論をすこし紹介する。

定理 61 (坪井) • T は ω -安定な理論

• $M \models T$ は擬極小

このとき、 M の初等拡大 M' で ω -飽和なものが存在する。

4.4 擬極小構造の簡単な例

定理 62 (板井・若井) $(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma, 0)$ は擬極小構造である。

ただし、 $x = (x_0, x_1, \dots) \in \mathbb{Q}^\omega$ に対して $\sigma(x) = (x_1, x_2, \dots)$

この $(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma, 0)$ は 1 つの演算と自己準同型を組み合わせで擬極小構造を定義しているが、演算を 2 つ持つような擬極小構造の例はないだろうかという疑問が湧く。

Zilber による K_{ex} の公理化によって Schanuel 予想という仮定の下で、擬極小な体を構成することは可能であるが、もっと素朴な例は存在しないであろうかというのが次の問題である。

問題 63 擬極小な体を構成せよ。(Zilber の構成したものとは「別種」で！)

4.5 今後の研究方針

解析的構造のモデル理論としては2つの話題をしばらく追求していきたい。ひとつは、解析的ザリスキー構造に関するもので、もう1つは C_p あるいはより一般的に p -valued fields に関するものである。

4.5.1 解析的ザリスキー構造

当面の課題は、多くの例を構成したり、探すことである。Peatfield により K_{ex} が、解析的ザリスキー構造であることが示されたので次は量子トーラスと呼ばれるトーラスは解析的ザリスキー構造かという Zilber の問題について挑戦したい。

K_{ex} を $L_{\omega_1 \omega}(Q)$ で公理化した理論は、非可算範疇性を持つことが分かっている。連続体濃度を持つモデルを C_{ex} とする。 C_{ex} と C_{exp} が同型であれば、例えば Schanuel 予想が解けてしまう。Zilber 自身はこのような見方には否定的であるので、 C_{ex} と C_{exp} の非同型を示唆するような事例についても探して行きたい。

ザリスキー幾何では強極小構造に関する群図表 (group configuration) と呼ばれる特殊な図表を用いて、群や体の再構成を行った。解析的ザリスキー幾何における群図表の理論が可能かどうかは不明な段階なので、この点についても考察を進めたい。

4.5.2 C_p について

ACVF の一般論を参照しつつ、 C_p の解析的な構造に注意しながらモデル理論的な性質を調べたい。

また C_p に関連して、 p -adically closed fields や formally p -adic fields のモデル理論的な性質について調べたい。たとえば p -進数体の Grothendieck 環は自明であるという Clucker-Haskel の定理が p -adically closed fields や formally p -adic fields について成り立つかどうかについて調べたい。

参考文献

- [Bo] Elisabeth Bouscaren (Ed.), *Model Theory and Algebraic Geometry*, LNM 1696, Springer, 1998
- [DD] J. Denef, L. van den Dries, *p*-adic and real subanalytic sets, *Annals of Math.*, 125(1988), 79-138
- [FJ] Michael D. Fried, Moshe Jarden, *Field Arithmetic* 2nd Ed, Springer, 2005
- [Ho] Wilfrid Hodges, *Model Theory*, Cambridge UP, 1993
- [ITW] M. Itai, A. Tsuboi, K. Wakai, *Construction of saturated quasi-minimal structure*, *JSL*, vol. 69 no.1 (2004) 9-22
- [Ko] Neal Koblitz, *p*-adic Numbers, *p*-adic Analysis, and Zeta-Functions, 2nd ed., GTM 58, Springer, 1984
- [La] Serge Lang, *Algebra*, Revised 3rd Ed., GTM 211, Springer, 2002
- [Ma] David Marker, *Model Theory: An Introduction*, GTM 217, Springer, 2002
- [Mu] M. Ram Murty, *Introduction to p*-adic Analytic Number Theory, AMS, 2002
- [PR] Alexander Prestel, Peter Roquette, *Formally p*-adic Fields, LNM 1050, Springer, 1984
- [Ro] Alain M. Robert, *A Course in p*-adic Analysis, GTM 198, Springer, 2000
- [Pe] N. Peatfield, *Pseudo-exponentiation is analytic Zariski*, preprint, 2006
- [PZ] N. Peatfield, B. Zilber, *Analytic Zariski structures and the Hrushovski construction*, *APAL*, 132(2005) 127-180
- [Sa] Gerald E. Sacks, *Saturated Model Theory*, Benjamin, 1972
- [Wi] A. J. Wilkie, *Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential functions*, *Jour. of the AMS*, vol. 9, no. 3, 1051-1094
- [vdD] Lou van den Dries, *A generalization of the Tarski-Seidenberg Theorem and some nondefinability results*, *Bull. of the AMS*, vol. 15, no. 2, 189-193
- [Z1] B. Zilber, *Notes on Zariski Geometries* (20 June, 2005)
<http://www.maths.ox.ac.uk/zilber/>
- [Z2] B. Zilber, *Pseudo-exponentiation on algebraically closed fields of characteristic zero*, *APAL*, 132(2005) 67-95
- [Z3] B. Zilber, *A theory of a generic function with derivations*, *Logic and Algebra, Contemporary Mathematics*, vol. 302, pp. 85-100, 2002

[Na] 永田 雅宣,『可換体論』(新版), 裳華房, 1985

[It] 板井 昌典,『幾何的モデル理論入門』, 日本評論社, 2002