

Clebsch - Gordan Coefficients for $U_q(\mathfrak{su}(1,1))$

早大理工数学 蒔川陽一 (Youichi Shibukawa)

本稿では、量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の 1 つの実形である $U_q(\mathfrak{su}(1,1))$ の紹介として、 $U_q(\mathfrak{su}(1,1))$ の無限次元既約ユニタリ表現、特に離散系列の表現とそのテンソル積表現の分解について、Lie 環 $\mathfrak{sl}_2$ の表現論と対比させながら扱っていく。

1. 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ とその実形の表現

以下、本稿を通じて q は $0 < q < 1$ であるとする。

1.1 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

定義 1.1.1 Lie 環 $\mathfrak{sl}_2$ の包絡環 $U(\mathfrak{sl}_2)$ の q -analogue $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ は、次の生成元と基本関係式により定めらる $\mathbb{C}$ 上の algebra である。

生成元 $k^{\pm 1}, e, f$

基本関係式 $kk^{-1} = k^{-1}k = 1$

$$ke k^{-1} = qe, \quad kf k^{-1} = q^{-1}f$$

$$[e, f] = \frac{k^2 - k^{-2}}{q - q^{-1}}$$

この $U_q(s/2)$ を省略して U_q と表し、「量子群 U_q 」¹⁾ と書くこともある。¹⁾で U_q が $s/2$ の包絡環の q -analogue と呼ばれるか²⁾ ということについては、神保 [2] を参照のこと。

さらに、量子群 U_q は Hopf 代数の構造を持つ。以下に余積 Δ を定義しておく。

定義 1.1.2 余積 Δ は $U_q \rightarrow U_q \otimes U_q$ の algebra homomorphism で、生成元上

$$\begin{cases} \Delta(k^{\pm 1}) = k^{\pm 1} \otimes k^{\pm 1} \\ \Delta(e) = k^{-1} \otimes e + e \otimes k \\ \Delta(f) = k^{-1} \otimes f + f \otimes k \end{cases}$$

となつてゐる。

1.2. Lie 環 $s/2$ の実現

定義 1.2.1 Lie 環 $s/2$ は

$$s/2 = \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}F \oplus \mathbb{C}H$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

という 3 次元ベクトル空間で、次の bracket 積が定められてい

るものである。

$$[X, Y] = XY - YX \quad (\forall X, Y \in \mathfrak{sl}_2)$$

よく知られているように、Lie 環 $\mathfrak{sl}_2$ は 2 変数の多項式環 $\mathbb{C}[s, t]$ 上の微分作用素として実現される。実際、

$$E := s\partial_t, \quad F := t\partial_s, \quad H := s\partial_s - t\partial_t$$

とおいてやるとよい。これは Lie 環 $\mathfrak{sl}_2$ の表現を $\mathbb{C}[s, t]$ 上に構成したということである。このとき、既約成分として次のものが現れる。

$$V_j := \bigoplus_{m=-j}^j \mathbb{C} T_m^j \quad (j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots, \quad m = -j, -j+1, \dots, j)$$

$$T_m^j := \frac{s^{j+m} t^{j-m}}{\{(j+m)!(j-m)!\}^{\frac{1}{2}}}$$

そして基底 $\{T_m^j\}$ に対する H, E, F の作用が

$$\begin{cases} HT_m^j = 2m T_m^j \\ ET_m^j = \{(j+m+1)(j-m)\}^{\frac{1}{2}} T_{m+1}^j \\ FT_m^j = \{(j+m)(j-m+1)\}^{\frac{1}{2}} T_{m-1}^j \end{cases}$$

となることは、容易に確かめられる。

この表現は Lie 環 $\mathfrak{sl}_2$ のコンパクトな実形 $\mathfrak{su}(2)$ の既約ユニタリ表現となる。

定義 1.2.2 $\mathfrak{su}(2) = \{A \in \mathfrak{sl}_2 \mid A + {}^c\bar{A} = 0\}$

この $\mathfrak{su}(2)$ の定義には別の表示がある。

定義 1.2.3 antilinear な antiautomorphism である写像 $*$: $\mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathfrak{sl}_2$

と $H^* = H$, $E^* = F$, $F^* = E$ で定まる。これを

$$\mathfrak{su}(2) := \{ A \in \mathfrak{sl}_2 \mid A^* = -A \}$$

実際、 $A \in \mathfrak{sl}_2$ に対し、 $A^* = {}^t \bar{A}$ となるので、定義 1.2.2 がこのように書き換えられることは当然である。そこで、以下我々は $\mathfrak{su}(2)$ と $\mathfrak{sl}_2$ と写像 $*$ との組とみはして置く。

$$\mathfrak{su}(2) := (\mathfrak{sl}_2, *)$$

定義 1.2.4 $\mathfrak{sl}_2$ の表現 V に、

$$\langle a v, w \rangle = \langle v, a^* w \rangle \quad a \in \mathfrak{sl}_2, v, w \in V$$

を満たす Hermite 内積が定められているとす。表現 V を $\mathfrak{su}(2)$ のユニタリ表現という。

前出の V_f に対しては、

$$\langle T_m^j, T_{m'}^{j'} \rangle = \delta_{mm'}$$

として Hermite 内積を導入するのによい。

1.3 量子群 U_q の実現

セクション 1.2 と同様に、量子群 U_q にも実現がある。 q , u を変数とする。そして、

$$A := \left\{ \varphi = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} \varphi_{mn} q^m u^n \mid \varphi_{mn} \in \mathbb{C}, \exists m_0 \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } \varphi_{mn} = 0 (\forall m > m_0) \right\}$$

$$\varphi = \psi \iff \varphi_{mn} = \psi_{mn} (\forall m, n)$$

とおく。これは、 q については負中を許している。また φ の

中の和には形式的無限和も許してゐるベクトル空間である。

この A には代数構造と U_q -module の構造が入る。

代数構造 $x^m u^n \cdot x^{m'} u^{n'} := q^{m'n} x^{m+m'} u^{n+n'}$

正確には、

$$\varphi \cdot \psi := \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} \left(\sum_{\substack{m' \in \mathbb{Z} \\ n' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} \varphi_{m-m', n'} \psi_{m', n-n'} q^{m'n'} \right) x^m u^n$$

係数のところに現はてゐる m', n' は、 $(m, n) \in \text{fix } L$ と
 して、いつでも有限の範囲しか動かないことに注意。

U_q -module 構造

$$\begin{cases} e x^m u^n = q^{\frac{1}{2}(-m+n-1)} [n] x^{m+1} u^{n-1} \\ f x^m u^n = q^{\frac{1}{2}(m-n-1)} [m] x^{m-1} u^{n+1} \\ k x^m u^n = q^{\frac{1}{2}(m-n)} x^m u^n \end{cases}$$

ただし、 $[m] = \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}}$ とおく。これは q -integer と呼ば
 れる。

Remark この代数構造と U_q -module 構造の間には、 q -Leibniz
 rule と呼ばれる関係がある。これは次のとおりである。

$$a(x^m u^n \cdot x^{m'} u^{n'}) = \mu(\Delta(a)(x^m u^n \otimes x^{m'} u^{n'}))$$

ただし、 $\mu(\varphi \otimes \psi) = \varphi \psi$ である。

A の既約成分 (a / 部) は次のようになっている。

$$\tilde{V}_j := \bigoplus_{m=-j}^j \mathbb{C} \tilde{T}_m^j \quad (j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots)$$

$$\tilde{T}_m^j := \frac{\alpha^{j+m} u^{j-m}}{([j+m]! [j-m]!)^{\frac{1}{2}}}$$

ただし、 $[m]! = [m][m-1]\cdots[1]$, $[0]! = 1$ とする。

$$\begin{cases} k^{\pm 1} \tilde{T}_m^j = q^{\pm m} \tilde{T}_m^j \\ e \tilde{T}_m^j = ([j+m+1][j-m])^{\frac{1}{2}} \tilde{T}_{m+1}^j \\ f \tilde{T}_m^j = ([j+m][j-m+1])^{\frac{1}{2}} \tilde{T}_{m-1}^j \end{cases}$$

前出の表現 V_j と比較してみると、 $\tilde{T}_m^j$ や、 e, f の作用については、整数が q -integer に変わっただけである。

1.4 量子群 U_q の実形

前出の既約表現 $\tilde{V}_j$ は、量子群 U_q の実形 $U_q(\mathfrak{su}(2))$ の既約ユニタリ表現となっている。これについて説明していく。

まずここで、 $U_q(\mathfrak{su}(2))$ といっているのは、量子群 $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ と写像 $*$: $U_q(\mathfrak{sl}(2)) \rightarrow U_q(\mathfrak{sl}(2))$ の組のことである (定義 1.2.3 およびその下参照)。

$$U_q(\mathfrak{su}(2)) := (U_q(\mathfrak{sl}(2)), *)$$

この $*$ は antilinear 1st antiautomorphism で、 $U_q(\mathfrak{su}(2))$ の場合、

$$k^* = k, \quad e^* = f, \quad f^* = e.$$

というものである。このように $*$ を定めると、 $\tilde{V}_j$ に次のような Hermite 内積が入る。

$$\begin{aligned} \langle a v, w \rangle &= \langle v, a^* w \rangle & a \in U_q, \quad v, w \in \tilde{V}_j \\ \langle \tilde{T}_m^j, \tilde{T}_{m'}^{j'} \rangle &= \delta_{mm'}. \end{aligned}$$

これをもって、表現 $\tilde{V}_j$ はユニタリ表現であるといっている。
 $U_q(su(2))$ の既約ユニタリ表現が、 $\tilde{V}_j$ ($j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots$) で尽く
 していることはよく知られている事実である。

さて、Lie 環 $s_{1/2}$ には、実形 $su(2)$ の他に non-compact な
 実形である $su(1,1)$ も存在する。その q -analogue $U_q(su(1,1))$
 は、

$$U_q(su(1,1)) := (U_q(s_{1/2}), *)$$

$$k^* = k, \quad e^* = -f, \quad f^* = -e.$$

とし定義している。

1.5 離散系列の表現

前出の表現 $\tilde{V}_j$ は $U_q(su(2))$ の既約ユニタリ表現ではあるが
 $U_q(su(1,1))$ の既約ユニタリ表現とはなっていない。ユニタリ
 性が成立しないからである。実際、 $U_q(su(1,1))$ の既約ユニタリ
 表現は無限次元表現である。この中で最も簡単な表現が、
 次に示す離散系列の表現である。

$$V_l = \bigoplus_{m=l+1}^{\infty} \mathbb{C} \xi_m^l = \{ \varphi \in A \mid \varphi = \sum_{\substack{m \geq l+1 \\ \text{有限和}}} \varphi_m \xi_m^l \}$$

$$(l=0, \frac{1}{2}, 1, \dots, \quad m=l+1, l+2, \dots)$$

$$\xi_m^l = (-1)^{m-l-1} q^{-\frac{1}{2}(m-l-1)(m+l+2)} \left(\frac{[m+l; q]!}{[m-l-1; q]! [2l+1; q]!} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \times x^{-m-l-1} u^{m-l-1}$$

$$\begin{cases} k \xi_m^l = q^{-m} \xi_m^l \\ e \xi_m^l = -q^{-m+\frac{3}{2}} ([m+l; q] [m-l-1; q])^{\frac{1}{2}} \xi_{m-1}^l \\ f \xi_m^l = q^{-m+\frac{1}{2}} ([m+l+1; q] [m-l; q])^{\frac{1}{2}} \xi_{m+1}^l \end{cases}$$

$$\langle \xi_m^l, \xi_{m'}^l \rangle = \delta_{mm'}$$

ただし、 $[n; q] = \frac{1-q^{2n}}{1-q^2} = q^{n-1} [n]$ とおく。ここで、 ξ_m^l の中に、 q の負乗が出てきていることに注意。

2. $U_q(su(1,1))$ の Clebsch-Gordan 係数

このセクションでは、 $U_q(su(1,1))$ の離散系列 V_j のテンソル積表現の分解と、それに応じた Clebsch-Gordan 係数の計算方法を示していく。この方法は、 $su(2)$ の場合でいうと van der Waerden が示した不変式を用いる方法ということになる。以下、これを説明する。

2.1 $su(2)$ の Clebsch-Gordan 係数 (van der Waerden の方法)

定義 2.1.1 2変数多項式環 $\mathbb{C}[\bar{s}, \bar{t}]$ 上、 $s/2$ の作用を

$$E = -\bar{t} \partial_{\bar{s}}, \quad F = -\bar{s} \partial_{\bar{t}}, \quad H = -\bar{s} \partial_{\bar{s}} + \bar{t} \partial_{\bar{t}}$$

と定める。このとき、 $su(2)$ の既約ユニタリ表現 V_j の conjugate 表現 $\bar{V}_j$ をその既約成分、すなわち、

$$\bar{V}_j = \bigoplus_{m=-j}^j \mathbb{C} \bar{T}_m^j$$

$$\bar{T}_m^j = \frac{\bar{s}^{j+m} \bar{t}^{j-m}}{\{(j+m)!(j-m)!\}^{\frac{1}{2}}}$$

と定義する。

定義 2.1.2 $\varphi \in \mathbb{C}[s, t, \bar{s}, \bar{t}]$

(又は、 $\varphi \in \mathbb{C}[s_1, t_1, s_2, t_2, \bar{s}, \bar{t}]$) が不変式

$$\iff \begin{matrix} H\varphi = E\varphi = F\varphi = 0. \\ \text{def.} \end{matrix}$$

例 2.1.3 $s_1 t_2 - t_1 s_2, s\bar{s} + t\bar{t}$ は不変式。

$$\textcircled{\text{⊙}} \quad E(s_1 t_2 - t_1 s_2) = (s_1 \partial_{t_1} + s_2 \partial_{t_2})(s_1 t_2 - t_1 s_2)$$

$$= -s_1 s_2 + s_2 s_1$$

$$= 0$$

$$F(s\bar{s} + t\bar{t}) = (t\partial_s - \bar{s}\partial_{\bar{t}})(s\bar{s} + t\bar{t})$$

$$= t\bar{s} - \bar{s}t$$

$$= 0$$

あとは省略。

このように $s\bar{s} + t\bar{t}$ が不変式であることがわかったので、

$(s\bar{s} + t\bar{t})^{2j}$ ($j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots$) も不変式である (Leibniz rule が存在するから)。ところが、この式を 2 項展開すると

$$I := (s\bar{s} + t\bar{t})^{2j} = \sum_{m=-j}^j (2j)! (s\bar{s})^{j+m} (t\bar{t})^{j-m} / (j+m)!(j-m)!$$

$$= (2j)! \sum_{m=-j}^j T_m^j \bar{T}_m^j$$

となり、 $(S\bar{S}+t\bar{t})^{2j} \in V_j$ の $\bar{V}_j$ に入り、 $2j$ である。

一方、 $S_1 t_2 - t_1 S_2$ も不変式である。

$(S_1 t_2 - t_1 S_2)^{j_1+j_2-j} (S_1 \bar{S} + t_1 \bar{t})^{j_1-j_2+j} (S_2 \bar{S} + t_2 \bar{t})^{-j_1+j_2+j}$
も不変式となる。ただし、

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2, \quad j_1, j_2 = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$$

とする。二式を展開すると、結局、

$$\begin{aligned} I' &= (S_1 t_2 - t_1 S_2)^{j_1+j_2-j} (S_1 \bar{S} + t_1 \bar{t})^{j_1-j_2+j} (S_2 \bar{S} + t_2 \bar{t})^{-j_1+j_2+j} \\ &= \sum_{\substack{m, m_1, m_2 \\ m=m_1+m_2}} \left\{ \sum_{\alpha} (-1)^{j_1+j_2-j-\alpha} \binom{j_1+j_2-j}{\alpha} \binom{j_1-j_2+j}{j_1+m_1-\alpha} \binom{-j_1+j_2+j}{j-j_1+m_2+\alpha} \right\} \\ &\quad \times \left\{ (j_1+m_1)! (j_1-m_1)! (j_2+m_2)! (j_2-m_2)! (j+m)! (j-m)! \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times T_{m_1}^{j_1} T_{m_2}^{j_2} \bar{T}_m^j \\ &= (-1)^{j_1+j_2-j} (j_1+j_2-j)! (j_1-j_2+j)! (-j_1+j_2+j)! \\ &\quad \times \sum_{m=m_1+m_2} \left\{ \frac{(j_1-m_1)! (j_2-m_2)! (j+m)!}{(j_1+m_1)! (j_2+m_2)! (j-m)!} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{\alpha} (-1)^{\alpha} \binom{j_1+m_1}{\alpha} \binom{j_2+m_2}{j-j_1+m_2+\alpha} \binom{j-m}{j_2-m_2-\alpha} \right\} T_{m_1}^{j_1} T_{m_2}^{j_2} \bar{T}_m^j \end{aligned}$$

二式を表現の形で与えてみる。よく知られているように、

定理 2.1.4 (Clebsch - Gordan) $V_{j_1} \otimes V_{j_2} \cong \bigoplus_{j'=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} V_{j'}$

二式を用いると、

$$\begin{aligned}
 (V_{j_1} \otimes V_{j_2}) \otimes \bar{V}_j &\simeq \left(\bigoplus_{j'=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} V_{j'} \right) \otimes \bar{V}_j \\
 &\downarrow \\
 &I' \\
 &= V_j \otimes \bar{V}_j \oplus \left(\bigoplus_{j' \neq j} V_{j'} \otimes \bar{V}_j \right) \\
 &\downarrow \\
 &I
 \end{aligned}$$

すなわち、 I の属してゐる V_j の $\bar{V}_j$ の $V_j \in V_{j_1} \otimes V_{j_2}$ の分解により現はれてくる V_j とみればよい。

$$I = (2j)! \sum_m T_m^j(j_1, j_2) \bar{T}_m^j, \quad \bar{T}_m^j(j_1, j_2) \in V_j \subset V_{j_1} \otimes V_{j_2}.$$

さらに、定理 2.1.4 により、

$$T_m^j(j_1, j_2) = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle T_{m_1}^{j_1} T_{m_2}^{j_2}.$$

と表はれる。ここに出てくる係数 $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle$ を Clebsch-Gordan 係数という。したがって、結局、

$$I = (2j)! \sum_{m, m_1, m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle T_{m_1}^{j_1} T_{m_2}^{j_2} \bar{T}_m^j$$

となる。

ここで、van der Waerden は不変式論から導かれる次の定理を用いた。

定理 2.1.5 (不変式論) $I = c I' \quad (\exists c \in \mathbb{C})$

より、Clebsch-Gordan 係数が求まるのである。

2.2 $U_q(\mathfrak{su}(1,1))$ の Clebsch-Gordan 係数.

セクション 2.1 と同様にして、離散系列の表現のテンソル積 $V_{l_1} \otimes V_{l_2}$ に応じた Clebsch-Gordan 係数を求めていく。まずは、テンソル積表現の分解から見ていく。

定理 2.2.1 ([1]) $U_q(\mathfrak{su}(1,1))$ -module として

$$V_{l_1} \otimes V_{l_2} \simeq \bigoplus_{l' \geq l_1 + l_2 + 1} V_{l'}$$

したがって、この分解に応じて

$$e_{l'}^{l'}(l_1, l_2) = \sum_{m_1, m_2} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l' \\ m_1 & m_2 & m \end{bmatrix} e_{m_1}^{l_1} e_{m_2}^{l_2}$$

と表される。この係数を Clebsch-Gordan 係数という。次に、 V_l の conjugate な表現を定義する。

定義 2.2.2

$$\bar{A} := \left\{ \mathcal{F} = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} \mathcal{F}_{m,n} \bar{x}^m \bar{u}^n \mid \mathcal{F}_{m,n} \in \mathbb{C}, \exists m_0 \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } \mathcal{F}_{m,n} = 0 \ (\forall m > m_0) \right\}$$

と定め、 A と同様にして、 $\bar{A}$ に代数構造を定める (x と $\bar{x}$, u と $\bar{u}$ を入れかえる)。一方、 U_q -module 構造は次の通りとする。

$$\begin{cases} e \bar{x}^m \bar{u}^n = -q^{\frac{1}{2}(m-n-1)} [m] \bar{x}^{m-1} \bar{u}^{n+1} \\ f \bar{x}^m \bar{u}^n = -q^{\frac{1}{2}(-m+n-1)} [n] \bar{x}^{m+1} \bar{u}^{n-1} \\ k \bar{x}^m \bar{u}^n = q^{-\frac{1}{2}(m-n)} \bar{x}^m \bar{u}^n \end{cases}$$

このとき、離散系列の表現 V_ℓ の conjugate な表現 $\bar{V}_\ell$ を

$$\bar{V}_\ell = \bigoplus_{m \geq \ell+1} \mathbb{C} \bar{\xi}_m^\ell$$

$$\bar{\xi}_m^\ell = (-1)^{m-\ell-1} q^{-\frac{1}{2}(m-\ell-1)(m+\ell+2)} \left(\frac{[m+\ell; q]!}{[m-\ell-1; q]! [2\ell+1; q]!} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \times \bar{x}^{-m-\ell-1} \bar{u}^{m-\ell-1}$$

と定義する。

定義 2.2.3

$$A_1 \otimes A_2 \otimes \bar{A} := \left\{ \varphi = \sum_{\substack{m_1, m_2, m \in \mathbb{Z} \\ m_1, m_2, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} \varphi_{m_1, n_1, m_2, n_2, m, n} x_1^{m_1} u_1^{n_1} x_2^{m_2} u_2^{n_2} \bar{x}^m \bar{u}^n \mid \right.$$

$$\varphi_{m_1, n_1, m_2, n_2, m, n} \in \mathbb{C}, \exists m_0 \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } \varphi_{m_1, n_1, m_2, n_2, m, n} = 0 \\ \left. \forall m_1, m_2, m > m_0 \right\}$$

$$A \otimes \bar{A} := \left\{ \varphi = \sum_{\substack{m, m' \in \mathbb{Z} \\ m, m' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} \varphi_{m, n, m', n'} x^m u^n \bar{x}^{m'} \bar{u}^{n'} \mid \varphi_{m, n, m', n'} \in \mathbb{C}, \right.$$

$$\left. \exists m_0 \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } \varphi_{m, n, m', n'} = 0 \quad \forall m, m' > m_0 \right\}$$

代数構造は前と同様に入仕る。ただし、index が違ふと commute するとは限らない。 U_q -module 構造は余積 Δ を用いて定義する。

$$\begin{cases} a\varphi = \mu \circ \text{id} \otimes \mu (\text{id} \otimes \Delta \circ \Delta(a) \cdot \varphi) & \varphi \in A_1 \otimes A_2 \otimes \bar{A} \\ a\varphi = \mu(\Delta(a) \varphi) & \varphi \in A \otimes \bar{A} \end{cases}$$

ここで、 $A_1 \otimes A_2 \otimes \bar{A}$ や $A \otimes \bar{A}$ には q -Leibniz rule が成り立つことに注意。

定義 2.2.4 $I \in A_1 \otimes A_2 \otimes \bar{A}$ (又は $I \in A \otimes \bar{A}$) が不変式

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} hI = I, \quad eI = fI = 0$$

先程の例 2.1.3 の f は形の α 不変式が存在する。

例 2.2.5. $q^{\frac{1}{2}} x \bar{x} + q^{-\frac{1}{2}} u \bar{u}, \quad q^{\frac{1}{2}} x_1 u_2 - q^{-\frac{1}{2}} u_1 x_2$

次に $(q^{\frac{1}{2}} x \bar{x} + q^{-\frac{1}{2}} u \bar{u})^p$ ($p \in \mathbb{Z}$) が $V_\ell \otimes \bar{V}_\ell$ ($\ell = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$) に属する f 用に p を定めよう。いや、今度は、

$$p = -2\ell - 2 \quad (< 0)$$

と、負中になろう。しかも、

$$q^2 x \bar{x} \cdot u \bar{u} = u \bar{u} \cdot x \bar{x}$$

となる。そこで、次の形式的な 2 項展開の公式を用いる。

定理 2.2.6 (2 項展開) $q^2 XY = YX$ のとき、

$$(X + Y)^m = \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} X^{m-n} Y^n \quad (m \in \mathbb{Z})$$

ただし、 $m \geq 0$ のとき、

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{cases} \frac{[m; q]!}{[n; q]! [m-n; q]!} & m \geq n \geq 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$m \geq 1$ のとき、

$$\begin{bmatrix} -m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m \end{bmatrix} (-q^{-2m})^n q^{-n(n-1)}$$

よって、

$$\begin{aligned}
 I &:= (q^{\frac{1}{2}} x \bar{x} + q^{-\frac{1}{2}} u \bar{u})^{-2l-2} \\
 &= \sum_{m \geq l+1} \begin{bmatrix} l+m \\ m-l-1 \end{bmatrix} (-q^{-2(2l+2)})^{m-l-1} q^{-(m-l-1)(m-l-2)} \\
 &\quad \times (q^{\frac{1}{2}} x \bar{x})^{-m-l-1} (q^{-\frac{1}{2}} u \bar{u})^{m-l-1} \\
 &= \sum_{m \geq l+1} (-1)^{m-l-1} q^{-m} \xi_m^l \bar{\xi}_m^l
 \end{aligned}$$

実際、 $\sum_{m \geq l+1} (-1)^{m-l-1} q^{-m} \xi_m^l \bar{\xi}_m^l \in A \otimes \bar{A}$ は不変式である（正確には、 $\sum_{m \geq l+1} (-1)^{m-l-1} q^{-m} \xi_m^l \bar{\xi}_m^l$ で $(q^{\frac{1}{2}} x \bar{x} + q^{-\frac{1}{2}} u \bar{u})^{-2l-2}$ を定義するという方がよい。セクション 2.1 と対比させるために、このような形で説明した）。したがって、セクション 2.1 で見たように、 I は

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{m \geq l+1} (-1)^{m-l-1} q^{-m} \xi_m^l(l_1, l_2) \bar{\xi}_m^l \in A_1 \otimes A_2 \otimes \bar{A} \\
 &= \sum_{m \geq l+1} (-1)^{m-l-1} q^{-m} \sum_{m_1, m_2} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{bmatrix} \xi_{m_1}^{l_1} \xi_{m_2}^{l_2} \bar{\xi}_m^l
 \end{aligned}$$

とみなせる。

一方、 I' の方は、

$$\begin{aligned}
 I' &:= (q^{\frac{1}{2}} x_1 \bar{x} + q^{-\frac{1}{2}} u_1 \bar{u})^{-l-l_1+l_2-1} (q^{\frac{1}{2}} x_1 u_2 - q^{-\frac{1}{2}} u_1 x_2)^{l-l_1-l_2-1} \\
 &\quad \times (q^{\frac{1}{2}} x_2 \bar{x} + q^{-\frac{1}{2}} u_2 \bar{u})^{-l+l_1-l_2-1} \quad (l \geq l_1 + l_2 + 1)
 \end{aligned}$$

とおくことがよい。ただし、

$$\begin{aligned}
 & (q^{\frac{1}{2}}x_1u_2 - q^{-\frac{1}{2}}u_1x_2)^{l-l_1-l_2-1} \\
 &= \sum_{\beta \geq 0} \begin{bmatrix} l-l_1-l_2-1 \\ \beta \end{bmatrix} (q^{\frac{1}{2}}x_1u_2)^{l-l_1-l_2-1-\beta} (-q^{-\frac{1}{2}}u_1x_2)^{\beta}
 \end{aligned}$$

$$(\in A_1 \otimes A_2 \otimes \bar{A})$$

と定める (こうすると、不変式になるのだ)。

ここで注意して欲しいのは、 $A_1 \otimes A_2 \otimes \bar{A}$ には q -Leibniz rule がないので、 I_1, I_2 が不変式であつてもその積 $I_1 I_2$ は必ずしも不変式とはならない、ということである。したがつて、 I' は不変式であるが、その積の順番を入れかえたもの、例えば、

$$\begin{aligned}
 & (q^{\frac{1}{2}}x_1u_2 - q^{-\frac{1}{2}}u_1x_2)^{l-l_1-l_2-1} (q^{\frac{1}{2}}x_1\bar{x} + q^{-\frac{1}{2}}u_1\bar{u})^{-l-l_1+l_2-1} \\
 & \times (q^{\frac{1}{2}}x_2\bar{x} + q^{-\frac{1}{2}}u_2\bar{u})^{-l+l_1-l_2-1}
 \end{aligned}$$

は必ずしも不変式ではない。

さて、不変式が2つ見つかったのであるから、あと必要なものは、それらが定数倍を除いて一致するということである。これは不変式の係数が満たすべき漸化式を求め、これが初期条件を除いて一意的に解けることから証明される。

命題 2.2.7 ([1]) $I = c I'$ ($\exists c \in \mathbb{C}$)

よつてこれから Clebsch-Gordan 係数を求めることができる。

定理 2.2.8 ([1])

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{bmatrix} \\
 &= \delta_{m, m_1+m_2} q^{2(l_1+1)\{(m-l-1)-(m_1-l_1-1)\}} \\
 & \times \left\{ \frac{[m-l-1]! [m_1-l_1-1]! [m_2-l_2-1]! [l-l_1-l_2-1]! [l+l_1+l_2+1]! [2l+1]}{[m+l]! [m_1+l_1]! [m_2+l_2]! [l+l_1-l_2]! [l-l_1+l_2]!} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 & \times \sum_{\nu} (-1)^{\nu} q^{\nu^2 + \nu(4l_1+3)} \\
 & \times \frac{[m+l-(m_2+l_2)-1-\nu]! [m_2+l_2+\nu]!}{[\nu]! [l-l_1-l_2-1-\nu]! [m_1-l_1-1-\nu]! [(m-l-1)-(m_1-l_1-1)+\nu]!}
 \end{aligned}$$

ここで、 ν は、階乗が非負整数となるところのみを動く。また、上では $[n; q]$ を簡単に $[n]$ と表している。この係数は、basic hypergeometric series ${}_3\phi_2$, 特には q -Hahn 多項式で表される。

参考文献

- [1] Y. S.: Clebsch-Gordan coefficients for $U_q(su(1,1))$ and $U_q(sl_2)$, and linearization formula of matrix elements. preprint (1990)
- [2] 神保道夫: 量子群とヤン・バクスター方程式. シュプリンガー
フェアラーク東京
- [3] G. Gasper, M. Rahman: Basic hypergeometric series. Encyclopedia of Math. and its appli. Vol. 35 Cambridge Univ. Press 1990.
- [4] N. A. Liskova, A. N. Kirillov: Clebsch-Gordan and Racah-Wigner coefficients for $U_q(SU(1,1))$. RIMS preprint (1991)

- [5] T. Masuda, K. Mimachi, Y. Nakagami, M. Noumi, Y. Saburi, K. Ueno :
Unitary representations of the quantum group $SU_q(1,1)$ I, II. *Lett. Math. Phys.* 19 187-204 (1990)
- [6] H. Ruegg: A simple derivation of the quantum Clebsch-Gordan coefficients for $SU(2)_q$. *J. Math. Phys.* 31 (5) 1085-1087 (1990)
- [7] B. L. van der Waerden : Group theory and quantum mechanics. Springer-Verlag 1974

以上.